

MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

(Última actualización: 6/4/2019)

Fernando Revilla Jiménez
<http://www.fernandorevilla.es>

© *Monografías matemáticas* por Fernando Revilla Jiménez se distribuye
bajo la licencia:
[Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional](#).

Prólogo

Cada fascículo de estas *Monografías matemáticas* consta de 25 monografías. Pueden considerarse como anexos a mis libros *Problemas resueltos de álgebra* y *Problemas resueltos de análisis matemático*. Se irá actualizando con la inclusión de nuevos fascículos.

Espero que pueda ser de interés para estudiantes de Ciencias e Ingenierías.

Índice

1. Monografías 1-25	1
1. Diferencias de orden k y monomios generalizados	1
2. Funciones cumpliendo $f(x) - f(y) \leq k_f \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y $	6
3. Distancia $d(x, y) = f(x) - f(y) $ en los reales	8
4. Curvatura, torsión y ecuaciones intrínsecas	9
5. Esquema de urnas de Poisson. Función generatriz	11
6. Cálculo de $\sqrt{A}$, A^{-1} y e^A por matrices componentes	13
7. Cociente de factores integrantes	14
8. Los grupos aditivo y multiplicativo de un cuerpo no son iso- morfos	15
9. Desarrollo de Taylor de orden n de $f(x, y) = \log(x + y)$. . .	16
10. Polinomio de $\mathbb{Z}[x]$ con raíz $\alpha = 2 + \sqrt[3]{3}$	17
11. Configuración de centro en un sistema autónomo	18
12. Matrices cuadradas invertibles con coeficientes enteros	20
13. Cálculo de $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \int_{x - \frac{\log x}{2x}}^x e^{-t^2} dt$	20
14. Inversa de $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e interpretación geométrica	22
15. Integral $\int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx$ por residuos	22
16. Estudio de la biyectividad de $f(X) = (A \cap X, B \cap X)$	24
17. Extremos de $f : (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^m y^n z^p$ sobre un plano	25
18. $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{5x - 5e^x + 5}$ sin usar la regla de L'Hôpital	26
19. Diagonalización de $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con funciones hiperbólicas . . .	27
20. Infinitud de los números primos, demostración topológica . .	28
21. A y B matrices reales y semejantes como complejas, lo son como reales	29
22. El conjunto de las fracciones diádicas en $[0, 1]$ es denso	30
23. Integral triple $\iiint_T x^m y^n z^p (1 - x - y - z)^q dx dy dz$	30
24. Máximo de $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \log(1 + x_i)$ con $\sum_{i=1}^n x_i = a$	32
25. Ideal maximal en el anillo de las funciones de clase infinito . .	33

2. Monografías 26-50	35
26. Suma $\sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$ en un espacio de matrices	35
27. Caracterización de una topología por axiomas de clausura de Kuratowski	36
28. Acotación por $e^{\alpha t}$ de las soluciones de un sistema diferencial .	37
29. Generatrices rectilíneas de un hiperboloide de una hoja	38
30. Semianillo tropical	40
31. Seminorma del supremo en el anillo de las funciones continuas	42
32. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x)\} \cup \{(0, 0)\}$ conexo, pero no por caminos	43
33. Límite $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ por tres métodos	44
34. Teorema de Casorati-Weierstrass: singularidades de $1/f$	44
35. Mínimo de $L(f) = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)}$ mediante la desigualdad de Schwarz	45
36. Polinomios de Legendre y operador simétrico	46
37. Forma bilineal a partir de una suma directa	48
38. Un operador autoadjunto y unitario	49
39. Métrica producto $d(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$	50
40. Número combinatorio $\binom{2n}{n}$ e integral	52
41. Igualdad integral $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t \log^2 t} dt = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{\log t} dt$	52
42. Ordinales racionales y norma p -ádica	53
43. Familia de rectas $6px - 2y + x + p^2 = 0$	55
44. Principio del triángulo isósceles en normas no arquimedianas	56
45. Hélice circular: longitud, curvatura y torsión	57
46. Una curva no rectificable	59
47. Función entera que es polinómica	60
48. Dos parametrizaciones de la elipse	61
49. Dos parametrizaciones de la hipérbola	62
50. Factor integrante de la forma $\mu = \mu(xy^2)$	63
3. Monografías 51-75	67
51. La rosa de cuatro pétalos es un conjunto algebraico	67
52. Imágenes inversas de conjuntos compactos	68
53. Derivabilidad de una función compleja como suma de dos series	68
54. Existencia de ceros en el disco unidad	69
55. Unidades en el anillo de las series formales $A[[X]]$	70
56. Producto de Cauchy de series igual a la unidad	70
57. El anillo de las funciones continuas no es noetheriano	71
58. $X = \{(t, t) : t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}$ no es cerrado con la topología de Zariski	72
59. Ecuación $f'(\lambda x) = f'(x) \sin x + f(x) \cos x$	72

60.	Lema de Gauss	73
61.	Criterio de Eisenstein	74
62.	Todo grupo de orden 4 es abeliano	75
63.	Wronskiano	75
64.	Iteraciones de Picard	76
65.	Afijos formando un triángulo rectángulo isósceles	78
66.	La función de Thomae es integrable Riemann en $[0, 1]$	79
67.	Ideal generado por un subconjunto de un anillo	80
68.	Caracterización de anillos noetherianos	81
69.	Polinomio de Motzkin	82
70.	Recíproco del teorema del valor medio	83
71.	R dominio de integridad y no cuerpo, implica $R[x]$ no es D.I.P.	83
72.	$n^5 - n$ es divisible por 30	84
73.	Matriz de Gram y dependencia lineal	84
74.	Generador de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$	85
75.	Cardinal de un cuerpo finito	85

4. Monografías 76-100 87

76.	Funciones monótonas, crecientes y decrecientes	87
77.	Funciones de variación acotada	89
78.	Variación total de una función	92
79.	Diferencia de funciones crecientes	95
80.	Funciones holomorfas en un disco	95
81.	Ecuación diferencial de la ley de absorción de Lambert	96
82.	Derivada de un determinante	97
83.	Cambio de referencia en el espacio afín	99
84.	Cardinales infinitos: elementos no regulares	101
85.	Distancia de un plano y de una curva al origen	102
86.	Grupo de Klein y sus automorfismos	104
87.	Singularidades y residuos de $f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}$	105
88.	Singularidades y residuos de $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z-1}$	106
89.	Singularidad y residuo en el origen de $f(z) = \frac{1}{2+z^2-2\cosh z}$	106
90.	Integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta}$	107
91.	Suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$	109
92.	Cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$	110
93.	Puntos de inflexión de una familia de curvas	112
94.	Menor subanillo que contiene a un conjunto	113
95.	Ecuación diferencial transformable en exacta por simplificación	114
96.	Sensibilidad a condiciones iniciales en métricas equivalentes	115
97.	Factorización en $\mathbb{C}[x]$ de $p(x) = (x+1)^n + (x-1)^n$	116
98.	Grupos topológicos	117

99.	Convergencia de una serie según parámetro	118
100.	Límite de una sucesión recurrente aplicando el criterio de Stolz	119
5.	Monografías 101-125	121
101.	Serie de los inversos de los números primos	121
102.	Los complejos no pueden ser un cuerpo ordenado	122
103.	Límite usando la fórmula de Taylor	123
104.	Condición necesaria y suficiente para que $A \cup B^c = B$	123
105.	Condiciones suficientes para la irreducibilidad en $\mathbb{K}[x]$	124
106.	Teorema de los círculos de Gershgorin	125
107.	Derivada $f^{(2016)}(0)$ para $f(x) = x^2 \log(x+1)$	126
108.	Factorización de un polinomio homogéneo en $\mathbb{R}[x, y]$	127
109.	Rango de una función definida en $[0, 1]$	129
110.	Topología cociente en X/R	129
111.	Acotación del rango del producto de dos matrices	131
112.	Espacio vectorial como suma directa de dos núcleos	132
113.	Desigualdad de Schwarz y norma en los espacios prehilbertianos	132
114.	Espacio prehilbertiano de las sucesiones finitamente no nulas	134
115.	$\langle 2, x \rangle$ no es ideal principal en $\mathbb{Z}[x]$	135
116.	Teorema de la buena ordenación de Zermelo.	135
117.	Teorema de los valores extremos sobre un compacto	138
118.	Métodos de Jacobi y Gauss-Seidel	138
119.	Triedro de Frenet, rectas y planos asociados	141
120.	Caracterizaciones de la continuidad en espacios topológicos .	143
121.	Números armónicos y constante de Euler Mascheroni	144
122.	Determinante de una matriz solución de un S.D.L.H.	146
123.	Variación de las constantes	148
124.	Caracterizaciones de cuerpos	149
125.	Norma en un anillo unitario	150
6.	Monografías 126-150	153
126.	Una sucesión de Cauchy con la distancia p -ádica	153
127.	Anillo de las sucesiones de Cauchy en un anillo normado . . .	154
128.	Ideal en el anillo de las sucesiones de Cauchy	156
129.	Norma en el anillo cociente $\widehat{R}$ de las sucesiones de Cauchy sobre el ideal de las nulas	156
130.	R como subanillo de $\widehat{R}$	158
131.	Completación de todo anillo normado	158
132.	Conservación de normas no arquimediadas por completación .	160
133.	Cuerpo $\mathbb{Q}_p$ de los números p -ádicos y subanillo $\mathbb{Z}_p$	161
134.	Sucesiones eventualmente constantes con normas no arquime- dianas	162

135.	Fórmula de Stirling	162
136.	Teorema de compactificación de Alexandrov	167
137.	Matriz equivalente en forma canónica	170
138.	Representación paramétrica regular	172
139.	Fórmula de Bayes	173
140.	Distribución de Poisson	174
141.	Cambio admisible de parámetro	176
142.	Curvas regulares	177
143.	EDO homogénea con coeficiente analíticos	178
144.	Límite de una sucesión por la definición	183
145.	Inverso de un elemento en $\mathbb{Q}/\langle x^2 + x + 1 \rangle$	183
146.	Caracterización de $a \ker f$ para un homomorfismo de grupos .	184
147.	Límite de una sucesión de conjuntos	184
148.	Ecuaciones paramétricas de la intersección de una esfera y un plano	187
149.	Cuerpo primo	189
150.	Cuerpo de ruptura de un polinomio	190

7. Monografías 151-175 193

151.	Completación de todo espacio métrico	193
152.	Álgebras uniformemente densas, teorema Stone-Weierstrass .	197
153.	Teorema de Wedderburn	199
154.	Un espacio vectorial no usual	204
155.	Espacio vectorial de las matrices circulantes	206
156.	Probabilidad de la unión de n sucesos	207
157.	Cardinal de la unión de n conjuntos	209
158.	Valores propios y determinante de una matriz circulante . . .	211
159.	Teorema de reordenación de Riemann	214
160.	Derivada aritmética natural	217
161.	Propiedades de la derivada aritmética natural	218
162.	Cotas para la derivada aritmética natural	220
163.	Primeras ecuaciones diferenciales aritméticas	221
164.	Conjetura de Goldbach y derivada aritmética	221
165.	Conjetura de los primos gemelos y derivada aritmética	222
166.	Conjetura de Sophie Germain	222
167.	La ecuación diferencial aritmética $n' = n$	223
168.	Derivada aritmética entera	224
169.	Derivada aritmética racional	225
170.	Derivada aritmética en dominios de factorización única	226
171.	Derivada aritmética y anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$	228
172.	Ecuación diofántica lineal en dos incógnitas	230
173.	Teorema del valor medio escalar	232

174. El número e es trascendente	233
175. Desigualdad de Jensen	236
8. Monografías 176-200	239
176. Topología final	239
177. Operador de Sturm-Liouville	240
178. Ecuación de Legendre	242
179. Iteración de punto fijo	245
180. Polinomios de Bernstein	248
181. Espacios l_p	252
182. Concepto de aplicación multilinear	255
183. Espacio vectorial de las aplicaciones multilineales	257
184. Problema de la aplicación universal	258
185. Espacio vectorial producto	260
186. Espacio suma directa externa	261
187. Base del espacio suma directa externa	262
188. Solución al problema de la aplicación universal	263
189. Concepto de espacio topológico (I)	264
190. Concepto de espacio topológico (II)	265
191. Concepto de espacio topológico (III)	267
192. Punto de acumulación (I)	268
193. Punto de acumulación (II)	269
194. Los grupos $\mathbb{R}^\times$ y $\mathbb{C}^\times$ no son isomorfos	271
195. Extensión finita y algebraica	271
196. Unicidad del cuerpo de ruptura	272
197. Un cuerpo de matrices isomorfo al de los complejos	272
198. Inverso en un cuerpo de ruptura	273
199. El conjunto de los números algebraicos es contable	274
200. Anillos $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$	274
9. Monografías 201-225	277
201. Teorema de la base de Hilbert	278
202. Separación de puntos y espacio de Hausdorff	279
203. Caracterización de conjuntos algebraicos irreducibles	279
204. Descomposición de un conjunto algebraico en unión de irre- ducibles	280
205. Matrices idempotentes sobre un cuerpo	282
206. Permutación de raíces y automorfismos de cuerpos	283
207. Cuerpo fijo	284
208. Isomorfismo $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$	285
209. Regiones determinadas por n rectas del plano	286
210. Subespacios invariantes (I)	286

211. Subespacios invariantes (II)	288
212. Subespacios invariantes (III)	290
213. Todo grupo de orden primo es cíclico	292
214. Grupos de orden 4	292
215. Grupos de orden $n = 6$	294
216. Derivada de un campo escalar respecto de uno vectorial . . .	296
217. Conjunto ordenado de las cortaduras de Dedekind	298
218. Suma de cortaduras de Dedekind	299
219. Ecuación cúbica	302
220. Ecuación cuártica	306
221. Orden lexicográfico	308
222. Topología del orden	309
223. Regla y compás	311
224. Duplicación del cubo	314
225. Cuadratura del círculo	315

10. Monografías 226-250 317

226. EDO por cambio de variable independiente	317
227. Topologías de Zariski y usual en k^n	318
228. Polinomio que se anula en k^n	320
229. Conjuntos equivalentes	321
230. Conjuntos numerables y contables	322
231. Potencia del continuo	324
232. Teorema de Cantor	325
233. Teorema de Cantor-Bernstein	325

Fascículo 1

Monografías 1-25

1. Diferencias de orden k y monomios generalizados

(a) Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, \dots$ es una sucesión de números reales, se definen las *diferencias de órdenes* $1, 2, 3, \dots, k \dots$ de la forma

$$\begin{aligned}\Delta a_m &= a_{m+1} - a_m \\ \Delta^k a_m &= \Delta \left(\Delta^{k-1} a_m \right) \text{ si } k > 1.\end{aligned}$$

Determinar explícitamente $\Delta^2 a_m$ y $\Delta^3 a_m$.

(b) Demostrar que $\Delta^k a_m = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} a_{m+k-j}$.

(c) Calcular explícitamente $\Delta^4 a_m$, y $\Delta^5 a_m$.

(d) Sea $\mathcal{S}$ el espacio vectorial real de las sucesiones reales. Demostrar que la aplicación $\Delta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ es lineal. ¿Es $\Delta^k : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ lineal?

(e) Se llaman *monomios generalizados* a los polinomios en n :

$$\begin{aligned}n^{(0)} &= 1, \quad n^{(1)} = n, \quad n^{(2)} = n(n-1), \quad n^{(3)} = n(n-1)(n-2), \\ &\dots, \quad n^{(k)} = n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).\end{aligned}$$

Nótese que $n^{(k)} = V_{n,k}$ es decir, son las variaciones de n elementos tomados de k en k . Demostrar que $B = \dots \{n^{(0)}, n^{(1)}, n^{(2)}, \dots, n^{(k)}\}$ es base de $\mathbb{R}_k[n]$.

(f) Se considera el polinomio $p(n) = n^4 - 3n^3 + 7n^2 + n - 5 \in \mathbb{R}_4[n]$. Expresarlo como combinación lineal de la base $B = \{n^{(0)}, n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}, n^{(4)}\}$.

(g) Demostrar que para $k \geq 1$ el operador Δ actúa sobre los monomios generalizados, como el operador derivación. Es decir, demostrar que se verifica $\Delta n^{(k)} = k n^{(k-1)}$.

(h) Supongamos que se verifica $a_k = \Delta A_k$ para $k = 0, 1, \dots, n+1$. Demostrar que

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_{n+1} - A_0.$$

(i) Demostrar que una solución de $n^{(k)} = \Delta A_k$ es $A_k = \frac{n^{(k+1)}}{k+1}$.

Nota. Denotamos a A_k por $\text{Int} \left(n^{(k)} \right)$ por analogía con el operador integral. Quedaría por tanto

$$\text{Int} \left(n^{(k)} \right) = \frac{n^{(k+1)}}{k+1}.$$

(j) Usando los dos apartados anteriores, dar un procedimiento para calcular sumas del tipo

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k \quad (k \text{ entero positivo}).$$

(k) Aplicar dicho procedimiento al cálculo de las sumas

$$a) S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

$$b) S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

$$c) S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4.$$

Solución. (a) Tenemos

$$\Delta^2 a_m = \Delta (\Delta a_m) = \Delta (a_{m+1} - a_m)$$

$$= a_{m+2} - a_{m+1} - (a_{m+1} - a_m) = a_{m+2} - 2a_{m+1} + a_m.$$

$$\Delta^3 a_m = \Delta (\Delta^2 a_m) = \Delta (a_{m+2} - 2a_{m+1} + a_m)$$

$$= a_{m+3} - 2a_{m+2} + a_{m+1} - (a_{m+2} - 2a_{m+1} + a_m)$$

$$= a_{m+3} - 3a_{m+2} + 3a_{m+1} - a_m.$$

(b) Veamos (por ejemplo), que la fórmula es cierta para $k = 1$ y $k = 2$. Desarrollando el segundo miembro,

$$\sum_{j=0}^1 (-1)^j \binom{1}{j} a_{m+1-j} = (-1)^0 \binom{1}{0} a_{m+1} + (-1)^1 \binom{1}{1} a_m = a_{m+1} - a_m = \Delta^1 a_m,$$

$$\sum_{j=0}^2 (-1)^j \binom{2}{j} a_{m+2-j} = (-1)^0 \binom{2}{0} a_{m+2} + (-1)^1 \binom{2}{1} a_{m+1} + (-1)^2 \binom{2}{2} a_m$$

$$= a_{m+2} - 2a_{m+1} + a_m = \Delta^2 a_m.$$

Suponiendo que la fórmula dada es cierta, veamos que es cierta para $k + 1$.
Tenemos

$$\begin{aligned}\Delta^{k+1}a_m &= \Delta\left(\Delta^k a_m\right) = \Delta\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} a_{m+k-j} \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} a_{m+k+1-j} - \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} a_{m+k-j} \quad (*)\end{aligned}$$

El primer sumando de la línea (*) lo podemos escribir en forma

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} a_{m+k+1-j} &= a_{m+k+1} + \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} a_{m+k+1-j} \\ &= \binom{k+1}{0} (-1)^0 a_{m+k+1} + \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} a_{m+k+1-j}.\end{aligned}$$

El sustraendo de la línea (*) lo podemos escribir en forma

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} a_{m+k-j} &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} a_{m+k-j} + (-1)^k a_m \\ &= \sum_{j=i-1}^k (-1)^{i-1} \binom{k}{i-1} a_{m+k+1-i} + \binom{k+1}{k+1} (-1)^k a_m.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\Delta^{k+1}a_m &= \binom{k+1}{0} (-1)^0 a_{m+k+1} + \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} a_{m+k+1-j} \\ &+ \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j-1} a_{m+k+1-j} + \binom{k+1}{k+1} (-1)^{k+1} a_m = \binom{k+1}{0} (-1)^0 a_{m+k+1} \\ &+ \sum_{j=1}^k (-1)^j \left[\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} \right] a_{m+k+1-j} + \binom{k+1}{k+1} (-1)^{k+1} a_m.\end{aligned}$$

Usando la conocida fórmula de combinatoria $\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} = \binom{k+1}{j}$ queda

$$\Delta^{k+1}a_m = \binom{k+1}{0} (-1)^0 a_{m+k+1} + \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k+1}{j} a_{m+k+1-j}$$

$$+ \binom{k+1}{k+1} (-1)^{k+1} a_m = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{k+1}{j} a_{m+(k+1)-j}$$

y la fórmula es por tanto cierta para $k+1$.

(c) Usando la obvia analogía de la fórmula del apartado anterior con la del binomio de Newton,

$$\begin{aligned} (a-b)^4 &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\ \Rightarrow \Delta^4 a_m &= a_{m+4} - 4a_{m+3} + 6a_{m+2} - 4a_{m+1} + a_m. \\ (a-b)^5 &= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \\ \Rightarrow \Delta^5 a_m &= a_{m+5} - 5a_{m+4} + 10a_{m+3} - 10a_{m+2} + 5a_{m+1} - a_m. \end{aligned}$$

(d) Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $a_m, b_m \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha a_m + \beta b_m) &= (\alpha a_{m+1} + \beta b_{m+1}) - (\alpha a_m + \beta b_m) \\ &= \alpha(a_{m+1} - a_m) + \beta(b_{m+1} - b_m) = \alpha \Delta a_m + \beta \Delta b_m, \end{aligned}$$

luego Δ es lineal. Dado que $\Delta^k = \Delta \circ \Delta \circ \dots \circ \Delta$ (k veces) y que la composición de aplicaciones lineales es lineal, concluimos que Δ^k también es lineal.

(e) Los $k+1$ polinomios de B son de distinto grado y por tanto linealmente independientes. Por otra parte, $\dim \mathbb{R}_k[n] = k+1$ lo cual implica que B es base de $\mathbb{R}_k[n]$.

(f) Expresando $p(n) = \sum_{i=0}^4 \alpha_i n^{(i)}$, operando el segundo miembro, identificando coeficientes y resolviendo el sistema lineal en las incógnitas α_i obtenemos

$$\alpha_0 = -5, \quad \alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 5, \quad \alpha_3 = 3, \quad \alpha_4 = 1,$$

es decir $p(n) = -5n^{(0)} + 6n^{(1)} + 5n^{(2)} + 3n^{(3)} + n^{(4)}$.

Nota. Se demuestra que se pueden hallar los coeficientes α_i usando de forma general el siguiente algoritmo:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -3 & 7 & 1 & \boxed{-5} \\ & & 1 & -2 & 5 & \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 6 & \end{array} \quad \alpha_0 = -5,$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & 5 & \boxed{6} \\ & & 2 & 0 & \\ \hline & 1 & 0 & 5 & \end{array} \quad \alpha_1 = 6,$$

$$\begin{array}{r|rr} 3 & 1 & 0 & \boxed{5} \\ & & 3 & \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{3} & \end{array} \quad \alpha_2 = 5, \alpha_3 = 3, \alpha_4 = 1.$$

(g) Tenemos

$$\begin{aligned}\Delta n^{(k)} &= (n+1)^{(k)} - n^{(k)} = (n+1)n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+2) \\ &\quad - n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+2)(n-k+1) \\ &= [n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+2)] (n+1 - n + k - 1) \\ &= kn(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+2) = k\Delta n^{(k-1)}.\end{aligned}$$

(h) Dado que $a_k = \Delta A_k = A_{k+1} - A_k$ tenemos

$$\begin{aligned}k=0, \quad a_0 &= A_1 - A_0 \\ k=1, \quad a_1 &= A_2 - A_1 \\ k=2, \quad a_2 &= A_3 - A_2 \\ &\dots \\ k=n, \quad a_n &= A_{n+1} - A_n.\end{aligned}$$

Sumando y cancelando, obtenemos

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_{n+1} - A_0.$$

(i) Tenemos

$$\Delta \left(\frac{n^{(k+1)}}{k+1} \right) \underbrace{=}_{\Delta \text{ lineal}} \frac{1}{k+1} \Delta n^{(k+1)} = \frac{1}{k+1} (k+1)n^{(k)} = n^{(k)}.$$

(j) Por el apartado 5, podemos expresar n^k en la forma

$$n^k = \alpha_0 n^{(0)} + \alpha_1 n^{(1)} + \alpha_2 n^{(2)} + \dots + \alpha_k n^{(k)}.$$

Debido a la linealidad de Δ , y usando el apartado 9,

$$\begin{aligned}\text{Int} \left(n^k \right) &= \alpha_0 \text{Int} \left(n^{(0)} \right) + \alpha_1 \text{Int} \left(n^{(1)} \right) + \alpha_2 \text{Int} \left(n^{(2)} \right) + \dots + \alpha_k \text{Int} \left(n^{(k)} \right) \\ &= \alpha_0 \frac{n^{(1)}}{1} + \alpha_1 \frac{n^{(2)}}{2} + \alpha_2 \frac{n^{(3)}}{3} + \dots + \alpha_k \frac{n^{(k+1)}}{k+1}.\end{aligned}$$

Por el apartado 8, y teniendo en cuenta que $\Delta 0 = 0$,

$$\begin{aligned}S_k &= 0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k = \text{Int} \left((n+1)^k \right) - 0 \\ &= \alpha_0 \frac{(n+1)^{(1)}}{1} + \alpha_1 \frac{(n+1)^{(2)}}{2} + \alpha_2 \frac{(n+1)^{(3)}}{3} + \dots + \alpha_k \frac{(n+1)^{(k+1)}}{k+1}.\end{aligned}$$

(k) a) Expresando n^2 en función de monomios generalizados obtenemos $n^2 = n^{(1)} + n^{(2)}$. Usando el apartado anterior,

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{(n+1)^{(2)}}{2} + \frac{(n+1)^{(3)}}{3} = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3} \\ &= \dots = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

b) Expresando n^3 en función de monomios generalizados obtenemos $n^3 = n^{(1)} + 3n^{(2)} + n^{(3)}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{(n+1)^{(2)}}{2} + 3\frac{(n+1)^{(3)}}{3} + \frac{(n+1)^{(4)}}{4} \\ &= \frac{(n+1)n}{2} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \\ &= \dots = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

c) Expresando n^4 en función de monomios generalizados obtenemos $n^4 = n^{(1)} + 7n^{(2)} + 6n^{(3)} + n^{(4)}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{(n+1)^{(2)}}{2} + 7\frac{(n+1)^{(3)}}{3} + 6\frac{(n+1)^{(4)}}{4} + \frac{(n+1)^{(5)}}{5} \\ &= \frac{(n+1)n}{2} + \frac{7(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{3(n+1)n(n-1)(n-2)}{2} \\ &\quad + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5} = \dots = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}. \end{aligned}$$

2. Funciones cumpliendo $f(x) - f(y) \leq k_f |\sin x - \sin y|$

Sea E el conjunto de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verificando que existe una constante $k_f \leq 0$ tal que

$$f(x) - f(y) \leq k_f |\sin x - \sin y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- (a) Demostrar que si $f \in E$, f es periódica de periodo 2π , continua y acotada.
- (b) Sea $f \in E$ tal que f es derivable en $\mathbb{R}$. Estudiar si $f' \in E$.
- (c) Demostrar que para todo $f \in E$ se verifica $f'(\pi/2) = 0$.
- (d) Estudiar si puede pertenecer E una función h verificando $h(t) = t$ para todo $t \in [0, \pi/2]$.

Solución. (a) Tenemos las siguientes implicaciones para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &\leq k_f |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \Rightarrow f(y) - f(x) \leq k_f |\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x| \\ &= k_f |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \Rightarrow \begin{cases} -k_f |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq f(x) - f(y) \\ f(x) - f(y) \leq k_f |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \end{cases} \\ &\Rightarrow 0 \leq |f(x) - f(y)| \leq k_f |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y|. \quad (1) \end{aligned}$$

Sea $y \in \mathbb{R}$ y llamemos $x = y + 2\pi$. De la relación (1), obtenemos

$$0 \leq |f(y + 2\pi) - f(y)| \leq k_f |\operatorname{sen}(y + 2\pi) - \operatorname{sen} y| = 0.$$

Es decir, $f(y + 2\pi) - f(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$ luego f es periódica de periodo 2π . Tomando $x = y + h$,

$$0 \leq |f(y + h) - f(y)| \leq k_f |\operatorname{sen}(y + h) - \operatorname{sen} y|.$$

El tercer miembro tiende a 0 cuando $h \rightarrow 0$, por tanto $|f(y + h) - f(y)| \rightarrow 0$ es decir, $\lim_{h \rightarrow 0} f(y + h) = f(y)$, lo cual implica que f es continua para todo $y \in \mathbb{R}$. Veamos que f está acotada. En efecto, tomando $y = 0$,

$$|f(x)| - |f(0)| \leq |f(x) - f(0)| \leq k_f |\operatorname{sen} x| \leq k_f.$$

Es decir $|f(x)| \leq |f(0)| + k_f$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego f está acotada en $\mathbb{R}$.

(b) Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$. Esta función es derivable en $\mathbb{R}$. Por otra parte, $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y \leq |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y|$ lo cual implica que $f \in E$. Veamos que la función $f'(x) = \cos x$ no pertenece a E . En efecto, haciendo $y = \pi - x$,

$$\begin{aligned} \cos x - \cos y &= \cos x - \cos(\pi - x) = 2 \cos x, \\ |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| &= |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(\pi - x)| = 0. \end{aligned}$$

No existe por tanto constante $k_{f'}$ cumpliendo $\cos x - \cos y \leq k_{f'} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, luego $f' \notin E$.

(c) Haciendo $y = \pi/2$, tenemos las implicaciones

$$\begin{aligned} 0 &\leq |f(x) - f(\pi/2)| \leq k_f |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(\pi/2)| \\ &\stackrel{\text{si } x \neq \pi/2}{\Rightarrow} 0 \leq \left| \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} \right| \leq k_f \left| \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(\pi/2)}{x - \pi/2} \right| \\ &= k_f \left| 2 \cos \frac{x + \pi/2}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{x - \pi/2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x - \pi/2} \right) \right|. \end{aligned}$$

Se verifica

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos \frac{x + \pi/2}{2} \cos(\pi/2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \operatorname{sen} \frac{x - \pi/2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x - \pi/2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{x - \pi/2}{2} \cdot \frac{1}{x - \pi/2} = \frac{1}{2}.$$

En consecuencia

$$\left| \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} \right| \rightarrow 0 \text{ si } x \rightarrow \pi/2,$$

y por tanto

$$f'(\pi/2) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} = 0.$$

(d) La derivada por la izquierda de h en $\pi/2$ es

$$h'(\pi/2-) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(\pi/2 + h) - f(\pi/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\pi/2 + h - \pi/2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} 1 = 1.$$

La función h no puede pertenecer a E pues según el apartado anterior, se debería verificar $h'(\pi/2-) = 0$.

3. Distancia $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ en los reales

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente.

- (a) Demostrar que $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia en $\mathbb{R}$.
- (b) Demostrar que si f no es continua, la distancia d no es equivalente a la distancia usual $d_u(x, y) = |x - y|$.
- (c) Demostrar que si f es continua, la distancia d es equivalente a la distancia usual d_u .
- (d) Demostrar que si f es lineal, d puede definirse mediante una norma.

Solución. (a) Se cumplen los axiomas de distancia. En efecto,

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Como f es estrictamente creciente, es inyectiva, luego $x = y$. (ii) $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d(y, x)$. (iii) $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)|$

$$\leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| = d(x, z) + d(z, y).$$

(b) Si f no es continua en algún punto x_0 , entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe al menos un $y \in \mathbb{R}$ tal que $|x_0 - y| < \delta$ y $|f(x_0) - f(y)| \geq \epsilon$. Consideremos la bola con la distancia d

$$B_d(x_0, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R} : d(x_0, y) = |f(x_0) - f(y)| < \epsilon\}.$$

Entonces, toda bola

$$B_{d_u}(x_0, \delta) = \{y \in \mathbb{R} : d(x_0, y) = |x_0 - y| < \delta\}$$

con la distancia usual no está contenida en $B_d(x_0, \epsilon)$, lo cual implica que d y d_u no son equivalentes de acuerdo con un conocido teorema de caracterización.

(c) Consideremos cualquier bola $B_d(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R} : d(x, y) = |f(x) - f(y)| < \epsilon\}$. Veamos que existe $B_{d_u}(x, \delta)$ tal que $B_{d_u}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$. En efecto, como f es continua en x , dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo y que satisface $|x - y| < \delta$ se verifica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Esto prueba que $B_{d_u}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$.

Recíprocamente, veamos que dada cualquier bola $B_{d_u}(x, \epsilon)$ existe una bola $B_d(x, \delta)$ tal que $B_d(x, \delta) \subset B_{d_u}(x, \epsilon)$. En efecto, al ser f estrictamente creciente y continua, existe y es continua la función $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Por tanto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(y))| = |x - y| < \epsilon,$$

es decir, $d(x, y) < \delta \Rightarrow d_u(x, y) < \epsilon$ lo cual prueba que $B_d(x, \delta) \subset B_{d_u}(x, \epsilon)$. De acuerdo con un conocido teorema de caracterización, concluimos que d y d_u son equivalentes.

(d) Veamos que la aplicación

$$\| \cdot \| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|x\| = |f(x)|,$$

es una norma. En efecto,

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Por ser f lineal y estrictamente creciente, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |f(\lambda x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)| = |\lambda| \|x\|$.

(iii) $\|x + y\| = |f(x + y)| = |f(x) + f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| = \|x\| + \|y\|$.

La distancia inducida por esta norma es

$$d(x, y) = \|x - y\| = |f(x - y)| = |f(x) - f(y)|,$$

que es la distancia dada.

4. Curvatura, torsión y ecuaciones intrínsecas

(a) Determinése en $t = 1$ la curvatura y la torsión de la curva

$$x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3.$$

(b) Determinénsen las ecuaciones intrínsecas de la catenaria de ecuación

$$x = a \cosh \frac{x}{a}, \quad y = t.$$

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. Industriales, UNED).

Solución. (a) Representamos la curva en forma vectorial $\vec{r} = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$. Tenemos

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt}(1) = (0, 6, 6),$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (-6t, 6, 6t) \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1) = (-6, 6, 6),$$

$$\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = (-6, 0, 6) \Rightarrow \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}(1) = (-6, 0, 6),$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(1) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -36\vec{j} + 36\vec{k},$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt}(1) \right| = 6\sqrt{2}, \quad \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(1) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1) \right| = 36\sqrt{2},$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}(1) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1) \right)^2 = 7,$$

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}(1), \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1), \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}(1) \right] = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 216.$$

La curvatura $\kappa(1)$ y torsión $\tau(1)$ de la curva en $t = 1$ son por tanto

$$\kappa(1) = \frac{\left| \frac{d\vec{r}}{dt}(1) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1) \right|}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt}(1) \right|^3} = \frac{36\sqrt{2}}{(6\sqrt{2})^3} = \frac{1}{12},$$

$$\tau(1) = \frac{\left[\frac{d\vec{r}}{dt}(1), \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1), \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}(1) \right]}{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}(1) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1) \right)^2} = \frac{216}{72} = 3.$$

(b) Las ecuaciones intrínsecas de una curva vienen dadas por $\kappa = \kappa(s)$, $\tau = \tau(s)$ siendo κ la curvatura, τ la torsión y s el parámetro arco. Tenemos

$$\kappa^2 = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}{(x'^2 + y'^2)^3} = \frac{\begin{vmatrix} \sinh \frac{t}{a} & 1 \\ \frac{1}{a} \cosh \frac{t}{a} & 0 \end{vmatrix}^2}{(\sinh^2 \frac{t}{a} + 1)^3} = \frac{\frac{1}{a^2} \cosh^2 \frac{t}{a}}{(\cosh^2 \frac{t}{a})^3} = \frac{1}{a^2 \cosh^4 \frac{t}{a}}. \quad (1)$$

La longitud del arco es

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du = \int_0^t \sqrt{\sinh^2 \frac{u}{a} + 1} du \\ &= \int_0^t \cosh \frac{u}{a} du = \left[a \sinh \frac{u}{a} \right]_0^t = a \sinh \frac{t}{a}. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$s^2 + a^2 = a^2 \sinh^2 \frac{t}{a} + a^2 = a^2 \cosh^2 \frac{t}{a}. \quad (2).$$

Eliminando t de las relaciones (1) y (2) obtenemos $\kappa = \frac{a}{s^2 + a^2}$. Dado que la curva es plana, su torsión es 0, por tanto las ecuaciones intrínsecas de la catenaria son

$$\begin{cases} \kappa = \frac{a}{s^2 + a^2} \\ \tau = 0. \end{cases}$$

5. Esquema de urnas de Poisson. Función generatriz

(a) Supongamos que realizamos n experimentos aleatorios y que en el experimento r -ésimo la probabilidad del suceso A (éxito) es p_r y la del complementario (fracaso) es $q_r = 1 - p_r$. Llamemos p_{rn} a la probabilidad de obtener r éxitos en las n pruebas. Denotemos

$$\alpha_n(\xi) = p_{0n} + p_{1n}\xi + p_{2n}\xi^2 + \dots + p_{rn}\xi^r + \dots$$

(suma con un número finito de términos pues $p_{rn} = 0$ si $r > n$). Demostrar que se verifica

$$\alpha_n(\xi) = (p_1\xi + q_1)(p_2\xi + q_2)\dots(p_n\xi + q_n).$$

Nota: como consecuencia, la identificación de los coeficientes de ξ^r en la igualdad anterior permite calcular p_{rn} en función de las probabilidades p_i y q_j .

(b) Tres urnas U_1, U_2, U_3 tienen las siguientes composiciones

$$\begin{aligned} U_1 &: 2 \text{ bolas blancas y } 3 \text{ negras,} \\ U_2 &: 1 \text{ blanca y } 2 \text{ negras,} \\ U_3 &: 3 \text{ blancas y } 3 \text{ negras.} \end{aligned}$$

Se extrae una bola de cada urna. Usar la función generatriz para hallar la probabilidad de obtener exactamente dos bolas blancas.

Solución. (a) Consideremos los sucesos: $C \equiv$ éxito en la prueba n , $D \equiv r - 1$ éxitos en las $n - 1$ primeras pruebas, $E \equiv$ fracaso en la prueba n y $F \equiv r$ éxitos en las $n - 1$ primeras pruebas. Entonces, el suceso $B \equiv r$ éxitos en las n pruebas es $B = (C \cap D) \cup (E \cap F)$ y por tanto

$$p_{rn} = p_n q_{r-1, n-1} + q_n p_{r, n-1}.$$

Además tenemos las condiciones límites:

- (i) $p_{r0} = 0$ si $r > 1$.
- (ii) $p_{00} = 1$.
- (iii) $p_{0n} = q_1 q_2 \dots q_n$ si $n > 0$.

Introducimos ahora la llamada función generatriz $\alpha_n(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} p_{rn} \xi^r$, suma esta que ya hemos comentado que tiene un número finito de términos. Tenemos las siguientes igualdades

$$q_n \alpha_{n-1}(\xi) = q_n \sum_{r=0}^{\infty} p_{r, n-1} \xi^r = q_n p_{0, n-1} + \sum_{r=1}^{\infty} q_n p_{r, n-1} \xi^r. \quad [1]$$

$$\xi p_n \alpha_{n-1}(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} \xi p_n p_{r, n-1} \xi^r = \sum_{r=1}^{\infty} p_n p_{r, n-1} \xi^r. \quad [2]$$

Sumando las dos igualdades anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} (p_n \xi + q_n) \alpha_{n-1}(\xi) &= q_n p_{0, n-1} + \sum_{r=1}^{\infty} (q_n p_{r, n-1} + p_n p_{r-1, n-1}) \xi^r \\ &= q_n q_1 q_2 \dots q_{n-1} + \sum_{r=1}^{\infty} p_{rn} \xi^r = p_{0n} + \sum_{r=1}^{\infty} p_{rn} \xi^r = \sum_{r=0}^{\infty} p_{rn} \xi^r = \alpha_n(\xi). \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_n(\xi) &= (p_n \xi + q_n) \alpha_{n-1}(\xi) = (p_n \xi + q_n) (p_{n-1} \xi + q_{n-1}) \alpha_{n-2}(\xi) \\ &= \dots = (p_n \xi + q_n) (p_{n-1} \xi + q_{n-1}) \dots (p_2 \xi + q_2) \alpha_1(\xi). \end{aligned}$$

Pero $\alpha_1(\xi) = p_{01} + p_{11} \xi = p_1 \xi + q_1$, de lo que concluimos

$$\alpha_n(\xi) = (p_1 \xi + q_1) (p_2 \xi + q_2) \dots (p_n \xi + q_n).$$

(b) Tenemos

$$\alpha_3(\xi) = p_{03} + p_{13} \xi + p_{23} \xi^2 + p_{33} \xi^3 = (p_1 \xi + q_1) (p_2 \xi + q_2) (p_3 \xi + q_3).$$

Igualando los coeficientes de ξ^2 : $p_{23} = p_1 p_2 q_3 + q_1 p_2 p_3 + p_1 q_2 p_3$, con lo cual la probabilidad de obtener exactamente dos bolas blancas es

$$p_{23} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \dots = \frac{3}{10}.$$

6. Cálculo de $\sqrt{A}$, A^{-1} y e^A por matrices componentes

Se considera la matriz real: $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

- (a) Calcular sus matrices componentes.
 (b) Como aplicación, calcular $\sqrt{A}$, A^{-1} y e^A .

Solución. Recordamos el siguiente teorema:

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ de polinomio mínimo

$$\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}.$$

Entonces, existen matrices A_{ik} con $i = 1, 2, \dots, s$, $k = 0, 1, \dots, m_i - 1$ tales que para toda función $f : \Omega \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que existe $f(A)$ es decir $\exists f^{(k)}(\lambda_i)$ con $i = 1, 2, \dots, s$, $k = 0, 1, \dots, m_i - 1$ se verifica

$$f(A) = \sum_{i=1}^s \sum_{k=0}^{m_i-1} f^{(k)}(\lambda_i) A_{ik}.$$

A las matrices A_{ik} se las llama *matrices componentes* de A .

(a) El polinomio mínimo de la matriz A es $\mu(\lambda) = (\lambda - 4)^2$. Es decir $\lambda_1 = 4$ es el único valor propio de A , las matrices componentes de A son A_{10} , A_{11} y para toda función f para la cual exista $f(A)$ (es decir, existen $f(4)$ y $f'(4)$) se verifica:

$$f(A) = f(4)A_{10} + f'(4)A_{11}. \quad (*)$$

Para hallar las matrices componentes elegimos las funciones polinómicas (siempre están definidas) $f(\lambda) = 1$, $f(\lambda) = \lambda$ y aplicamos la fórmula (*) lo cual nos conduce al sistema matricial:

$$\begin{cases} I = A_{10} \\ A = 4A_{10} + A_{11} \end{cases}$$

que resuelto proporciona

$$A_{10} = I, \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Aplicando (*) a la función $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ y usando $f'(\lambda) = 1/(2\sqrt{\lambda})$ obtenemos:

$$f(A) = \sqrt{A} = 2A_{10} + \frac{1}{4}A_{11} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Aplicando (*) a la función $f(\lambda) = 1/\lambda$ y usando $f'(\lambda) = -1/\lambda^2$ obtenemos:

$$f(A) = \frac{1}{A} = A^{-1} = \frac{1}{4}A_{10} - \frac{1}{16}A_{11} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Aplicando (*) a la función $f(\lambda) = e^\lambda$ y usando $f'(\lambda) = e^\lambda$ obtenemos:

$$f(A) = e^A = e^4 A_{10} + e^4 A_{11} = e^4 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Cociente de factores integrantes

Demostrar que si μ_1 y μ_2 son factores integrantes de la ecuación diferencial

$$Pdx + Qdy = 0 \quad (1)$$

entonces $\frac{\mu_2}{\mu_1} = C$ con C constante es solución de (1).

Solución. Diferenciando $\frac{\mu_2}{\mu_1} = C$:

$$d\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) = dC, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_2 \cdot \frac{1}{\mu_1}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_2 \cdot \frac{1}{\mu_1}\right)dy = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \mu_2}{\partial x} \frac{1}{\mu_1} + \mu_2 \left(-\frac{1}{\mu_1^2}\right) \frac{\partial \mu_1}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial y} \frac{1}{\mu_1} + \mu_2 \left(-\frac{1}{\mu_1^2}\right) \frac{\partial \mu_1}{\partial y}\right)dy = 0.$$

Multiplicando por μ_1^2 :

$$\left(\mu_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - \mu_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial x}\right)dx + \left(\mu_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial y} - \mu_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial y}\right)dy = 0. \quad (2)$$

Por ser μ_1 factor integrante de (1),

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu_1 P) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu_1 Q) = 0,$$

$$P \frac{\partial \mu_1}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + \mu_1 \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \quad (3)$$

Por ser μ_2 factor integrante de (1),

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu_2 P) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu_2 Q) = 0,$$

$$P \frac{\partial \mu_2}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu_2}{\partial x} + \mu_2 \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0. \quad (4)$$

De (3) y (4)

$$\mu_2 \left(P \frac{\partial \mu_1}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \right) - \mu_1 \left(P \frac{\partial \mu_2}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu_2}{\partial x} \right) = 0,$$

es decir

$$\left(\mu_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - \mu_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial x} \right) dx + \left(\mu_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial y} - \mu_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial y} \right) dy = 0,$$

que es justamente la expresión (2) lo cual reduce (2) a (1), y queda demostrado que $\frac{\mu_2}{\mu_1} = C$ es solución de (1).

8. Los grupos aditivo y multiplicativo de un cuerpo no son isomorfos

Demostrar que los grupos aditivo y multiplicativo de un cuerpo nunca son isomorfos.

Solución. Sea K un cuerpo y sean K^+ y $K^\times$ los grupos aditivo y multiplicativo de K respectivamente. Si K^+ es finito, entonces $|F^\times| = |F^+| - 1$, por tanto no existe biyección $\Phi : K^+ \rightarrow K^\times$ lo cual implica que K^+ y $K^\times$ no son isomorfos.

Supongamos ahora que K es infinito y que $\Phi : K^+ \rightarrow K^\times$ es isomorfismo de grupos, con lo cual será $\Phi(0) = 1$.

Si $1 = -1$, sea $\Phi(1) = a$. Entonces, $\Phi(-1) = a^{-1}$ y también $\Phi(1) = \Phi(-1) = a$. Por tanto

$$a^2 = \Phi(1)\Phi(-1) = \Phi(1 - 1) = \Phi(0) = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \vee a = -1$$

$$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow \begin{cases} \Phi(0) = 1 \\ y \\ \Phi(1) = a = 1 \end{cases} \Rightarrow \Phi \text{ no es inyectiva,}$$

lo cual es absurdo.

Si $1 \neq -1$, sea $b \in K$ tal que $\Phi(b) = -1$. Entonces

$$\Phi(2b) = \Phi(b + b) = \Phi(b)^2 = 1.$$

Como Φ es inyectiva, $2b = 0$, es decir $b = 0$ (pues $1 + 1 \neq 0$). Por tanto $1 = \Phi(0) = -1$, lo cual es absurdo.

9. Desarrollo de Taylor de orden n de $f(x, y) = \log(x + y)$

Desarrollar la función $f(x, y) = \log(x + y)$ por la fórmula de Taylor de orden n en un entorno de $(1, 1)$.

Solución. Hallemos las primeras derivadas parciales de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x + y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x + y)^2}.$$

Demostremos por inducción que en general se verifica

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = (-1)^{n+1} (n-1)! (x + y)^{-n}, \quad (\alpha + \beta = n).$$

La fórmula es claramente cierta para $n = 1$. Supongamos que es cierta para $n - 1$ y veamos que también es cierta para n . En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{\alpha-1} \partial y^\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} ((-1)^n (n-2)! (x + y)^{-n+1}) \\ &= (-1)^n (n-2)! \cdot (-n+1) (x + y)^{-n} = (-1)^{n+1} (n-1)! (x + y)^{-n}. \\ \frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^\alpha \partial y^{\beta-1}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} ((-1)^n (n-2)! (x + y)^{-n+1}) \\ &= (-1)^n (n-2)! \cdot (-n+1) (x + y)^{-n} = (-1)^{n+1} (n-1)! (x + y)^{-n}. \end{aligned}$$

Nota. Estamos usando el que f es de clase infinito en un entorno de $(1, 1)$ es consecuencia, las parciales sucesivas no dependen del orden de derivación.

Se verifica $f(1, 1) = \log 2$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \left((x-1) \frac{\partial}{\partial x} + (y-1) \frac{\partial}{\partial y} \right)^1 f(1, 1) &= (x-1) \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) + (y-1) \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \\ &= \frac{1}{2} [(x-1) + (y-1)]. \\ \left((x-1) \frac{\partial}{\partial x} + (y-1) \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(1, 1) &= (x-1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) \\ &\quad + 2(x-1)(y-1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) + (y-1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2^2} [(x-1) + (y-1)]^2.$$

En general,

$$\left((x-1) \frac{\partial}{\partial x} + (y-1) \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(1,1) = (-1)^{n+1} (n-1)! \frac{1}{2^n} [(x-1) + (y-1)]^n.$$

El desarrollo pedido es por tanto

$$\begin{aligned} \log(x+y) &= \log 2 + \frac{1}{2} [(x-1) + (y-1)] - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} [(x-1) + (y-1)]^2 \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} [(x-1) + (y-1)]^n \\ &\quad + (-1)^{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(\xi+\eta)^{n+1}} [(x-1) + (y-1)]^{n+1}, \end{aligned}$$

con (ξ, η) en el segmento que une los puntos $(1, 1)$ y (x, y) .

10. Polinomio de $\mathbb{Z}[x]$ con raíz $\alpha = 2 + \sqrt[3]{3}$

(a) Encontrar un polinomio $p(x)$ de tercer grado de $\mathbb{Z}[x]$ admitiendo como raíz $\alpha = 2 + \sqrt[3]{3}$.

(b) Descomponer $p(x)$ en producto de factores irreducibles en $\mathbb{R}[x]$.

Solución. (a) Sea $p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \in \mathbb{Z}[x]$ con $c_3 \neq 0$. Si tiene como raíz a α ,

$$\begin{aligned} c_3\alpha^3 + c_2\alpha^2 + c_1\alpha + c_0 &= 0, \\ \alpha^3 &= -\frac{c_2}{c_3}\alpha^2 - \frac{c_1}{c_3}\alpha - \frac{c_0}{c_3} = b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0, \quad (b_k \in \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Es decir, necesariamente α^3 ha de ser combinación lineal racional de $\alpha^2, \alpha, 1$. Tenemos

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \left(2 + \sqrt[3]{3}\right)^2 = 4 + 4 \cdot 3^{1/3} + 3^{2/3}, \\ \alpha^3 &= \left(2 + \sqrt[3]{3}\right)^3 = 11 + 12 \cdot 3^{1/3} + 6 \cdot 3^{2/3}. \end{aligned}$$

La igualdad $\alpha^3 = b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0$ equivale a

$$\begin{aligned} 11 + 12 \cdot 3^{1/3} + 6 \cdot 3^{2/3} &= b_2 \left(4 + 4 \cdot 3^{1/3} + 3^{2/3}\right) \\ &\quad + b_1 \left(2 + 3^{1/3}\right) + b_0. \end{aligned}$$

La igualdad anterior se verifica si

$$\begin{cases} b_2 = 6 \\ b_1 + 4b_2 = 12 \\ b_0 + 2b_1 + 4b_2 = 11. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos $b_2 = 6$, $b_1 = -12$, $b_0 = 11$.
Obtenemos el polinomio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 11$.

(b) Aplicando la regla de Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 + 3^{1/3} & 1 & -6 & 12 & -11 \\ & & 2 + 3^{1/3} & -8 - 2 \cdot 3^{1/3} + 3^{2/3} & 11 \\ \hline & 1 & -4 + 3^{1/3} & 4 - 2 \cdot 3^{1/3} + 3^{2/3} & 0 \end{array}$$

El polinomio $p(x)$ lo podemos por tanto expresar en la forma

$$p(x) = (x - \alpha)q(x), \text{ con } q(x) = x^2 + \left(-4 + 3^{1/3}\right)x + 4 - 2 \cdot 3^{1/3} + 3^{2/3}.$$

El discriminante de $q(x)$ es

$$D = \left(-4 + 3^{1/3}\right)^2 - 4\left(4 - 2 \cdot 3^{1/3} + 3^{2/3}\right) = -3 \cdot 3^{2/3} < 0,$$

luego $q(x)$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ y la descomposición pedida es $p(x) = (x - \alpha)q(x)$.

11. Configuración de centro en un sistema autónomo

Se considera el sistema diferencial $X' = AX$, con $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Se pide:

- (a) Escribir la forma general de la solución para resolver el sistema con la condición inicial $X(0) = (1, 0)^t$.
- (b) Dibujar la órbita que pasa por el punto $(1, 0)$.
- (c) Calcular la matriz exponencial $\exp(tA)$.

Solución. (a) El polinomio característico de A es $\lambda^2 + 1 = 0$ y por tanto los valores propios son $\lambda = \alpha \pm \beta i = \pm i$. El subespacio propio asociado al valor propio i , y una base del mismo son:

$$V_i \equiv \begin{cases} (1 - i)x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + (-1 - i)x_2 = 0, \end{cases} \quad B_i = \{(1 + i, 1)^t\}.$$

Como A es real, una base de V_{-i} es $B_{-i} = \{(1-i, 1)^t\}$. Este vector lo podemos expresar en la forma $(1-i, 1)^t = U + iV$ con $U = (1, 1)^t$ y $V = (-1, 0)^t$. Por un conocido teorema, si $P = [U, V]$, entonces:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

y el cambio $X = PX^*$ proporciona las soluciones:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

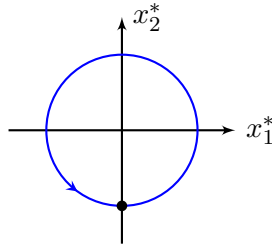
Para $X = (1, 0)^t$ tenemos:

$$X = PX^* \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

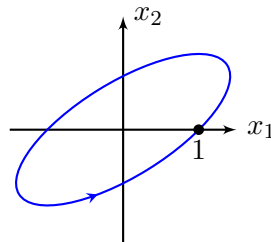
Es decir, la solución que cumple que cumple la condición inicial $X(0) = (1, 0)^t$ es:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(b) La órbita que pasa por $(1, 0)$ es una circunferencia de centro el origen y radio 1 en el plano $x_1^*x_2^*$ recorrida en sentido antihorario:



El cambio $X = PX^*$ proporciona la correspondiente elipse en el plano x_1x_2 .



(c) La matriz Q cuyas columnas son los vectores propios verifica $Q^{-1}AP = D$ con $D = \text{diag}(i, -i)$, por tanto:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Qe^{tD}Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & -2 \sin t \\ \sin t & -\sin t + \cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

12. Matrices cuadradas invertibles con coeficientes enteros

Sea $\sum_n = \mathbb{Z}^{n \times n}$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que una matrix $M \in \sum_n$ admita una inversa en $\sum_n$ es que

$$\det M = \pm 1.$$

Solución. Si M es inversible en $\sum_n$ entonces

$$(\det M)(\det M^{-1}) = \det(MM^{-1}) = \det I = 1$$

y dado que $\det M$ y $\det M^{-1}$ son enteros, ha de ser necesariamente $\det M = \pm 1$. Recíprocamente, si $M \in \sum_n$ y $\det M = \pm 1$, entonces M tiene inversa en $\mathbb{R}^{n \times n}$ (pues su determinante es no nulo). Cada elemento de M^{-1} es cociente de un adjunto de M (que es entero) entre ± 1 , y por tanto es entero. Es decir, $M^{-1} \in \sum_n$.

13. Cálculo de $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \int_{x - \frac{\log x}{2x}}^x e^{-t^2} dt$

Evaluar justificadamente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \int_{x - \frac{\log x}{2x}}^x e^{-t^2} dt.$$

Solución. Hallemos el límite de cada uno de los factores que aparecen. El límite del primer factor es

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Hallemos el límite del segundo factor. Tenemos

$$x > x - \frac{\log x}{2x} \Leftrightarrow \frac{\log x}{2x} > 0,$$

y esto último ocurre para $x > 1$. Dado que $0 < e^{-t^2}$ para todo t real,

$$0 \leq \int_{x - \frac{\log x}{2x}}^x e^{-t^2} dt.$$

Dado que $e^{-t^2} \leq 1$ para todo t real,

$$\int_{x - \frac{\log x}{2x}}^x e^{-t^2} dt \leq \int_{x - \frac{\log x}{2x}}^x 1 dt = x - \left(x - \frac{\log x}{2x}\right) = \frac{\log x}{2x}.$$

En consecuencia

$$0 \leq \int_{x - \frac{\log x}{2x}}^x e^{-t^2} dt \leq \frac{\log x}{2x}.$$

Usando la regla de L'Hopital obtenemos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{2x} = 0$ y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x - \frac{\log x}{2x}}^x e^{-t^2} dt = 0.$$

Llamando L al límite pedido, usando la regla de L'Hopital y usando el teorema fundamental del Cálculo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{x - \frac{\log x}{2x}}^x e^{-t^2} dt}{e^{-x^2}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2} - e^{\left(x - \frac{\log x}{2x}\right)^2} \left(x - \frac{\log x}{2x}\right)'}{-2xe^{-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2} \left(1 - e^{\frac{\log x}{x} - \frac{\log^2 x}{4x^2}}\right) \left(1 - \frac{(1/x)2x - 2 \log x}{4x^2}\right)}{-2xe^{-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - e^{\frac{\log x}{x} - \frac{\log^2 x}{4x^2}}\right) \left(1 - \frac{1 - \log x}{2x^2}\right)}{-2x}. \end{aligned}$$

Halleemos límites de expresiones que aparecen en el límite anterior:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} \underbrace{=}_{\text{L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^2 x}{4x^2} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \log x}{2x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2}\right) = 0.$$

El límite pedido es por tanto

$$L = \frac{(1 - e^0)(1 - 0)}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0.$$

14. Inversa de $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e interpretación geométrica

Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- (a) Hallar A^2 y A^{-1} .
 (b) Interpretar geoméricamente el resultado.

Solución. (a) Operando obtenemos $A^2 = 9I$, y de $A \left(\frac{1}{9}A \right) = I$ deducimos que $A^{-1} = \frac{1}{9}A$.

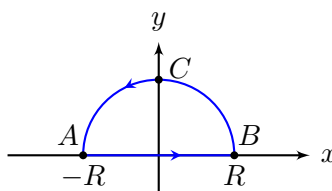
(b) Llamando $B = \frac{1}{3}A$, obtenemos $B^2 = I$, es decir $B^{-1} = B$. Por otra parte B es simétrica, con lo cual $B^t = B^{-1}$ y por tanto es ortogonal. Hallando los valores propios de B , obtenemos $\lambda_1 = 1$ (simple) y $\lambda_2 = -1$ (doble) lo cual implica que B representa una simetría axial en $\mathbb{R}^3$.

Concluimos que $A = 3B$ representa la composición de una simetría axial con una homotecia de razón 3.

15. Integral $\int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx$ por residuos

Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx$.

Sugerencia: considerar $\int_{\gamma} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz$ siendo γ la curva $ABCA$ de la figura



Solución. Sea Γ la curva ABC , es decir la semicircunferencia superior. Tenemos

$$\int_{-R}^R \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz = \int_{\gamma} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz. \quad (1)$$

Podemos expresar

$$\begin{aligned}
 \int_{-R}^R \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx &= \int_{-R}^0 \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx + \int_0^R \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx \\
 &\stackrel{t=-x}{=} \int_R^0 \frac{\log(-t+i)}{t^2+1} (-dt) + \int_0^R \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx \\
 &= \int_0^R \frac{\log(-x+i)}{x^2+1} dx + \int_0^R \frac{\log(x+i)}{x^2+1} dx = \int_0^R \frac{\log(i-x) + \log(i+x)}{x^2+1} dx.
 \end{aligned}$$

Simplifiquemos el numerador,

$$\begin{aligned}
 \log(i-x) + \log(i+x) &= \log(i-x)(i+x) \\
 &= \log(-1-x^2) = \log(-1)(x^2+1) \\
 &= \log(-1) + \log(x^2+1) = \pi i + \log(x^2+1).
 \end{aligned}$$

La expresión (1) equivale por tanto a

$$\begin{aligned}
 \pi i \int_0^R \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^R \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx + \int_{\Gamma} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz \\
 = \int_{\gamma} \frac{\log(z+i)}{z^2+i} dz. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Hallemos los límites cuando $R \rightarrow +\infty$ de los sumandos que aparecen en (2).

(i) Límite de la primera integral.

$$\begin{aligned}
 \lim_{R \rightarrow +\infty} \pi i \int_0^R \frac{dx}{x^2+1} &= \pi i \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi i [\arctan x]_0^{+\infty} \\
 &= \pi i [\arctan(+\infty) - \arctan 0] = \pi i \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2} i.
 \end{aligned}$$

(ii) Límite de la segunda integral.

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx = I.$$

(iii) Límite de la tercera integral. Acotemos el módulo de la función integrando en Γ :

$$\left| \frac{\log(z+i)}{z^2+1} \right| \leq \frac{|\log(z+i)|}{|z|^2} \leq \frac{\log|z+i|}{|z|^2}$$

$$\leq \frac{\log(|z| + |i|)}{|z|^2} \underbrace{\leq}_{\text{si } |z| \text{ suf. grande}} \frac{\log 2|z|}{|z|^2} = \frac{\log 2R}{R^2}.$$

La longitud de Γ es πR , por tanto

$$0 \leq \left| \int_{\Gamma} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz \right| \leq \frac{\log 2R}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi \log 2R}{R} \rightarrow 0 \text{ si } R \rightarrow +\infty.$$

En consecuencia,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz = 0.$$

(iv) Límite de la cuarta integral. El único polo de $f(z) = \frac{\log(z+i)}{z^2+1}$ en el semiplano superior para $R > 1$ es $z = i$, y su residuo es

$$\begin{aligned} \text{Res } [f, i] &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} (z-i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\log(z+i)}{z+i} \\ &= \frac{\log(2i)}{2i} = \frac{\log 2 + (\pi/2)i}{2i}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{\gamma} \frac{\log(z+i)}{z^2+1} dz = 2\pi i \left(\frac{\log 2 + (\pi/2)i}{2i} \right) = \pi \log 2 + \frac{\pi^2}{2} i.$$

De los límites tomados en (2) deducimos

$$\frac{\pi^2}{2} i + I + 0 = \pi \log 2 + \frac{\pi^2}{2} i,$$

luego la integral pedida es

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \log 2.$$

16. Estudio de la biyectividad de $f(X) = (A \cap X, B \cap X)$

Sean A y B dos partes no vacías de un conjunto E y

$$f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), \quad f(X) = (A \cap X, B \cap X).$$

- (a) Estudiar la inyectividad de f .
- (b) Estudiar la sobreyectividad de f .
- (c) Determinar f^{-1} en los casos en los que f sea biyectiva.

Solución. (a) Veamos que f es inyectiva si y sólo si $A \cup B = E$. En efecto, supongamos que f es inyectiva. Tenemos $f(E) = (A \cap E, B \cap E) = (A, B)$. Por otra parte $f(A \cup B) = (A \cap (A \cup B), B \cap (A \cup B)) = (A, B)$. Es decir $f(E) = f(A \cup B)$, luego $A \cup B = E$ por ser f inyectiva. Recíprocamente, supongamos que $A \cup B = E$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(X) = f(Y) &\Rightarrow (A \cap X, B \cap X) = (A \cap Y, B \cap Y) \\ &\Rightarrow \begin{cases} A \cap X = A \cap Y \\ B \cap X = B \cap Y \end{cases} \Rightarrow (A \cap X) \cup (B \cap X) = (A \cap Y) \cup (B \cap Y) \\ &\Rightarrow X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B) \Rightarrow X \cap E = Y \cap E \Rightarrow X = Y \end{aligned}$$

y por tanto, f es inyectiva.

(b) Veamos que f es sobreyectiva si y solamente si $A \cap B = \emptyset$. En efecto, si f es sobreyectiva existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tal que $f(X) = (A, \emptyset)$. Entonces, $A \cap X = A$ y $B \cap X = \emptyset$. De aquí se deduce $A \subset X \subset B^c$, luego $A \cap B = \emptyset$. Recíprocamente, si $A \cap B = \emptyset$, sea $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Tenemos

$$\begin{aligned} f(X \cup Y) &= (A \cap (X \cup Y), B \cap (X \cup Y)) \\ &= ((A \cap X) \cup (A \cap Y), (B \cap X) \cup (B \cap Y)) = (X \cup \emptyset, \emptyset \cup Y) = (X, Y), \end{aligned}$$

luego f es sobreyectiva.

(c) De los apartados anteriores, f es biyectiva si y sólo si, A y B son complementarios en E . Si es biyectiva,

$$f^{-1} : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(E), \quad f^{-1}(X, Y) = X \cup Y.$$

17. Extremos de $f : (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^m y^n z^p$ sobre un plano

Hallar, caso de existir, los valores extremos de la función

$$f : (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^m y^n z^p \quad (m, n, p \text{ enteros positivos})$$

con $x + y + z = a$ ($a \in \mathbb{R}^+$).

Solución. El problema es equivalente a hallar los extremos de la función

$$g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x^m y^n (a - x - y)^p$$

en el abierto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, a - x - y > 0\}$. Puntos críticos de g ,

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} [ma - my - (m + p)x] x^{m-1} y^n (a - x - y)^{p-1} \\ [na - nx - (n + p)y] x^m y^{n-1} (a - x - y)^{p-1}. \end{cases}$$

Como $x > 0$, $y > 0$, y $a - x - y > 0$, el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} (m+p)x + my = ma \\ nx + (n+p)y = na, \end{cases}$$

cuya única solución es

$$P = \left(\frac{ma}{m+n+p}, \frac{na}{m+n+p} \right),$$

y se comprueba inmediatamente que $P \in \Omega$. El hessiano de g en P es

$$\begin{aligned} H_g(P) &= \det \begin{bmatrix} g_{xx}(P) & g_{xy}(P) \\ g_{yx}(P) & g_{yy}(P) \end{bmatrix} = \dots \\ &= (m+n+p) \left(\frac{ma}{m+n+p} \right)^{2(m+n+p-2)} m^{2m-1} n^{2n-1} p^{2p-1} > 0. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(P) &= \dots \\ &= -(m+p) \left(\frac{ma}{m+n+p} \right)^{m-1} \left(\frac{na}{m+n+p} \right)^n \left(\frac{pa}{m+n+p} \right)^{p-1} < 0. \end{aligned}$$

Dado que $g \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, deducimos por un conocido teorema que g alcanza un máximo en el punto P . Hallando la z que corresponde al punto P , obtenemos

$$f_{\max} \left(\frac{ma}{m+n+p}, \frac{na}{m+n+p}, \frac{pa}{m+n+p} \right) = m^m n^n p^p \left(\frac{a}{m+n+p} \right)^{m+n+p}.$$

18. $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{5x - 5e^x + 5}$ sin usar la regla de L'Hôpital

Si usar la regla de L'Hôpital, calcular el límite

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x}{5x - 5e^x + 5}$$

Solución. Podemos expresar

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{5} \frac{x^2}{1+x-e^x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x^2}{1+x-e^x}}_A$$

y por tanto, basta hallar A . Sea $x > 0$ y consideremos la función

$$F : [0, x] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = t^2 - \frac{x^2}{1+x-e^x} (1+t-e^t).$$

Es inmediato verificar las hipótesis del teorema de Rolle para F en $[0, x]$ obteniendo un $\xi \in (0, x)$ tal que

$$\frac{x^2}{1+x-e^x} = \frac{2\xi}{1-e^\xi}.$$

Usando que $e^\xi - 1 \sim \xi$ cuando $\xi \rightarrow 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{5} \frac{x^2}{1+x-e^x} = \frac{1}{5} \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{2\xi}{-\xi} = -\frac{2}{5}.$$

Usando la misma función F en el intervalo $[x, 0]$ con $x < 0$ obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{5} \frac{x^2}{1+x-e^x} = \frac{2}{5},$$

con lo cual $L = -2/5$.

19. Diagonalización de $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con funciones hiperbólicas

Estudiar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ la siguiente matriz es diagonalizable en $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{bmatrix}.$$

En cada caso, hallar la forma canónica de A .

Solución. Polinomio característico de A

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \lambda^2 - (\text{traza } A)\lambda + \det A = \lambda^2 - (2 \cosh x)\lambda + \cosh^2 x - \sinh^2 x \\ &= \lambda^2 - (e^x + e^{-x})\lambda + 1. \end{aligned}$$

Valores propios de A

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (e^x + e^{-x})\lambda + 1 = 0 &\Leftrightarrow \lambda = \frac{e^x + e^{-x} \pm \sqrt{(e^x + e^{-x})^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x} \pm \sqrt{e^{2x} + e^{-2x} - 2}}{2} = \frac{e^x + e^{-x} \pm \sqrt{(e^x - e^{-x})^2}}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x} \pm (e^x - e^{-x})}{2} = \{e^x, e^{-x}\}. \end{aligned}$$

Entonces, $e^x = e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Para $x = 0$ obtenemos la matriz $A = I$, que es diagonal. Si $x \neq 0$, tenemos $e^x \neq e^{-x}$ y A es

diagonalizable en $\mathbb{R}$ al tener dos valores propios reales simples. Concluimos que A es diagonalizable para todo $x \in \mathbb{R}$ siendo su matriz diagonal;

$$D = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{bmatrix}.$$

20. Infinitud de los números primos, demostración topológica

Desarrollamos la demostración de Furstenberg de la infinitud de los números primos basada en ideas topológicas.

Proporcionar una demostración topológica de la infinitud de los números primos

Solución. Para cada a, b números enteros con $b \neq 0$ consideramos el subconjunto de $\mathbb{Z}$:

$$a + b\mathbb{Z} = \{ \dots, a - 2b, a - b, a, a + b, a + 2b, \dots \},$$

y la clase $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $\mathbb{Z}$: $\mathcal{B} = \{a + b\mathbb{Z} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ es decir, $\mathcal{B}$ es la clase de todas las progresiones aritméticas no constantes en $\mathbb{Z}$. Dado que $a + b\mathbb{Z} = a - b\mathbb{Z}$ también podemos suponer que $b > 0$. Veamos que $\mathcal{B}$ cumple las dos conocidas condiciones para formar base de una topología en $\mathbb{Z}$.

(i) Como $0 + 1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ se verifica trivialmente que $\mathbb{Z}$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

(ii) Sean $a + b\mathbb{Z}$ y $a' + b'\mathbb{Z}$ elementos de $\mathcal{B}$ y $c \in (a + b\mathbb{Z}) \cap (a' + b'\mathbb{Z})$, entonces $a + b\mathbb{Z} = c + b\mathbb{Z}$ y $a' + b'\mathbb{Z} = c + b'\mathbb{Z}$. Si d es el mínimo común múltiplo de b y b' es claro que $c \in c + d\mathbb{Z} \subset (c + b\mathbb{Z}) \cap (c + b'\mathbb{Z})$. Concluimos pues que $\mathcal{B}$ es base para una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{Z}$.

Para cada primo p el subconjunto de $\mathbb{Z}$,

$$F_p = \mathbb{Z} - ((1 + p\mathbb{Z}) \cup (2 + p\mathbb{Z}) \cup \dots \cup ((p - 1) + p\mathbb{Z}))$$

es cerrado pues es el complementario de una unión de abiertos (que es abierto). Sea ahora $F = \bigcup_p F_p$ en donde p varía en el conjunto de los números primos. Si solamente existiera un número finito de primos, entonces F sería unión finita de cerrados y por tanto, cerrado. Dado que $F_p = p\mathbb{Z}$ todo entero $k \neq \pm 1$ pertenece a algún F_p , es decir $\mathbb{Z} - F = \{-1, 1\}$. Pero claramente $\{-1, 1\}$ no es abierto por no ser unión de progresiones aritméticas no constantes y por tanto F no es cerrado.

Por tanto, de la hipótesis de existir solamente un número finito de primos llegamos al absurdo de que existe un conjunto F en una topología $\mathcal{T}$ que es a la vez cerrado y no cerrado. Se concluye pues que existen infinitos números primos.

21. A y B matrices reales y semejantes como complejas, lo son como reales

(i) Sean A y B matrices reales y semejantes como matrices complejas. Demostrar que también son semejantes como matrices reales.

(ii) Aplicación. Demostrar que si X es una matriz real tal que $X^2 = -I$, entonces, para algún n entero positivo,

$$X = PJP^{-1} \text{ con } J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

donde P es una matriz real no singular e I_n la matriz identidad de orden n .

Solución. (i) Si A y B son semejantes como matrices complejas, existe una matriz compleja P invertible tal que $B = P^{-1}AP$. Expresemos $P = Q + iR$ en donde Q y R son reales. Tenemos las equivalencias

$$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow PB = AP \Leftrightarrow (Q + iR)B = A(Q + iR)$$

$$\Leftrightarrow QB + iRB = AQ + iAR \Leftrightarrow QB = AQ \wedge RB = AR.$$

Por tanto, para todo λ real o complejo se verifica

$$(Q + \lambda R)B = A(Q + \lambda R). \quad (*)$$

El polinomio $\phi(\lambda) = \det(Q + \lambda R)$ es polinomio con coeficientes reales y además no tiene nulos todos sus coeficientes pues $\phi(i) = \det(Q + iR) = \det P \neq 0$. Esto implica que existen valores reales de λ tales que $\phi(\lambda) \neq 0$. Sea λ_0 uno de estos valores y consideremos la matriz $S = Q + \lambda_0 R$. Esta matriz es real, invertible y verifica según (*) que $B = S^{-1}AS$ i.e. A y B son semejantes como matrices reales.

(ii) Dado que $X^2 + I = 0$, un polinomio anulador de X es $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, luego el polinomio mínimo $\mu(\lambda)$ de X divide a $p(\lambda)$. Como p y μ han de tener los mismos factores irreducibles en $\mathbb{R}[\lambda]$, necesariamente $\mu(\lambda) = \lambda^2 + 1$, por tanto y los valores propios de X como matriz compleja son $\pm i$ y al ser X es real, aparecen con la misma multiplicidad.

Dado que $\mu(\lambda)$ se descompone en factores lineales en $\mathbb{C}[\lambda]$, X es diagonalizable en $\mathbb{C}$ y semejante a la matriz diagonal $D = \text{diag}(iI_n, -iI_n)$. Por

otra parte

$$J^2 = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} = -I,$$

luego J es semejante a D y por tanto J es semejante a X (como matrices complejas). Del apartado anterior deducimos que existe P real e invertible tal que $X = PJP^{-1}$.

22. El conjunto de las fracciones diádicas en $[0, 1]$ es denso

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de las fracciones diádicas (fracciones cuyos denominadores son potencias naturales de 2) en el intervalo $[0, 1]$. Es decir

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{15}{16}, \dots \right\}.$$

Demostrar que $\mathcal{D}$ es denso en $[0, 1]$, i.e. $\overline{\mathcal{D}} = [0, 1]$.

Solución. Como $\mathcal{D} \subset [0, 1]$ y $[0, 1]$ es cerrado, se verifica $\overline{\mathcal{D}} \subset [0, 1]$ pues $\overline{\mathcal{D}}$ es el menor de los cerrados que contiene a $\mathcal{D}$. Veamos ahora que $[0, 1] \subset \overline{\mathcal{D}}$. Es suficiente demostrar que para todo $a \in [0, 1]$, cualquier intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ con $\epsilon > 0$ contiene un punto de $\mathcal{D}$. Dado que $\lim (1/2^n) = 0$, existe una potencia $q = 2^{n_0}$ tal que $0 < 1/q < \epsilon$. Consideremos ahora los intervalos

$$\left[0, \frac{1}{q}\right], \left[\frac{1}{q}, \frac{2}{q}\right], \left[\frac{2}{q}, \frac{3}{q}\right], \dots, \left[\frac{q-2}{q}, \frac{q-1}{q}\right], \left[\frac{q-1}{q}, 1\right].$$

Como $[0, 1]$ es la unión de los intervalos anteriores, el punto a pertenece a alguno de ellos; llamémosle $\left[\frac{m}{q}, \frac{m+1}{q}\right]$. Es decir, se verifica $\frac{m}{q} \leq a \leq \frac{m+1}{q}$. Ahora bien, como $1/q < \epsilon$,

$$a - \epsilon < \frac{m}{q} \leq a < a + \epsilon.$$

Esto implica que el punto m/q de $\mathcal{D}$ pertenece al intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ y queda demostrado que $\mathcal{D}$ es denso en $[0, 1]$.

23. Integral triple $\iiint_T x^m y^n z^p (1 - x - y - z)^q dx dy dz$

Calcular la integral triple

$$I = \iiint_T x^m y^n z^p (1 - x - y - z)^q dx dy dz$$

siendo T el recinto limitado por los tres planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$, y m, n, p, q enteros positivos.

Solución. Podemos expresar I como las integrales reiteradas

$$I = \int_0^1 x^m dx \int_0^{1-x} y^n dy \int_0^{1-x-y} z^p (1-x-y-z)^q dz.$$

Denotando $a = 1 - x - y$, la tercera integral iterada es

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x-y} z^p (1-x-y-z)^q dz &= \int_0^a z^p (a-z)^q dz = a^q \int_0^a z^p \left(1 - \frac{z}{a}\right)^q dz \\ &= a^{p+q+1} \int_0^a \left(\frac{z}{a}\right)^p \left(1 - \frac{z}{a}\right)^q d\left(\frac{z}{a}\right) \underset{t=z/a}{=} a^{p+q+1} \int_0^1 t^p (1-t)^q dt \\ &= a^{p+q+1} B(p+1, q+1) = a^{p+q+1} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = a^{p+q+1} \frac{p!q!}{(p+q+1)!}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$I = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \int_0^1 x^m dx \int_0^{1-x} y^n (1-x-y)^{p+q+1} dy.$$

Llamando $b = 1 - x$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x} y^n (1-x-y)^{p+q+1} dy &= \int_0^b y^n (b-y)^{p+q+1} dy \\ &= b^{p+q+1} \int_0^b y^n \left(1 - \frac{y}{b}\right)^{p+q+1} dy = b^{n+p+q+2} \int_0^b \left(\frac{y}{b}\right)^n \left(1 - \frac{y}{b}\right)^{p+q+1} d\left(\frac{y}{b}\right) \\ &\underset{t=y/b}{=} b^{n+p+q+2} \int_0^1 t^n (1-t)^{p+q+1} dt = b^{n+p+q+2} B(n+1, p+q+2) \\ &= b^{n+p+q+2} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(p+q+2)}{\Gamma(n+p+q+3)} = b^{n+p+q+2} \frac{n!(p+q+1)!}{(n+p+q+2)!}. \end{aligned}$$

Podemos por tanto escribir

$$\begin{aligned} I &= \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \frac{n!(p+q+1)!}{(n+p+q+2)!} \int_0^1 x^m (1-x)^{n+p+q+2} dx \\ &= \frac{n!p!q!}{(n+p+q+2)!} B(m+1, n+p+q+3) \\ &= \frac{n!p!q!}{(n+p+q+2)!} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+p+q+3)}{\Gamma(m+n+p+q+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!p!q!}{(n+p+q+2)!} \frac{m!(n+p+q+2)!}{(m+n+p+q+3)!} \\
&= \boxed{\frac{m!n!p!q!}{(m+n+p+q+3)!}}.
\end{aligned}$$

24. Máximo de $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \log(1 + x_i)$ con $\sum_{i=1}^n x_i = a$

Determinar el máximo de la función

$$f : (\mathbb{R}^+)^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \log(1 + x_i),$$

con la restricción $x_1 + \dots + x_n = a$ (a real y positivo).

Sugerencia: usar que la media geométrica de n números reales y no negativos no es mayor que su media aritmética.

Solución. Podemos expresar $f(x_1, \dots, x_n) = \log \prod_{i=1}^n (1 + x_i)$. Dado que la función logaritmo es estrictamente creciente, el punto donde se alcanza el máximo absoluto de f es el mismo en el que se alcanza el máximo absoluto de

$$g(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i).$$

Usando que la media geométrica de n números reales y no negativos no es mayor que su media aritmética,

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (1 + x_i)} \leq \frac{\sum_{i=1}^n (1 + x_i)}{n} \text{ o bien ,}$$

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^n (1 + x_i) \right)^n}{n^n}.$$

Como $x_1 + \dots + x_n = a$, se verifica

$$\begin{aligned}
g(x_1, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n (1 + x_i) = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \\
&\leq \frac{[(1 + x_1) + \dots + (1 + x_{n-1}) + (1 + (a - x_1 - \dots - x_{n-1}))]^n}{n^n}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(a+n)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = K.$$

El número K es por tanto una cota superior de g , cota superior que se alcanza pues

$$P = \left(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}\right) \Rightarrow g(P) = \left(1 + \frac{a}{n}\right) \left(1 + \frac{a}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{a}{n}\right) = K.$$

El máximo de la función f es por tanto

$$f_{\max}(P) = \log \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = n \log \left(1 + \frac{a}{n}\right).$$

25. Ideal maximal en el anillo de las funciones de clase infinito

- (a) Sea $A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones de clase infinito de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que es un subanillo del anillo $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de las funciones reales de variable real, con las operaciones habituales suma y producto.
 (b) Demostrar que $I = \{f \in A : f(0) = 0\}$ es ideal de A .
 (c) Demostrar que I es ideal maximal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Solución. (a) Si f y g son funciones de clase infinito en $\mathbb{R}$, también lo son $f - g$ y fg , de acuerdo con conocidas propiedades de análisis. Por el teorema de caracterización de subanillos concluimos que A es subanillo del anillo $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Además, al ser $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ conmutativo así lo es A , y al ser la función constante 1 de clase infinito, A es unitario.

(b) Para todo $f, g \in I$ se verifica $(f - g)(0) = f(0) - g(0) = 0 - 0 = 0$, es decir $f - g \in I$. Para todo $h \in A$ y para todo $f \in I$ se verifica $(hf)(0) = h(0)f(0) = h(0) \cdot 0 = 0$, es decir $hf \in I$. Concluimos que I es ideal de A .

(c) Bastará demostrar que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/I$ es un cuerpo. Sea $[f] \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/I$ con $[f] \neq [0]$, esto implica que $f - 0 = f \notin I$ y por tanto $f(0) \neq 0$. Consideremos la función constante $g(x) = 1/f(0)$ que claramente es de clase infinito. Tenemos

$$(fg - 1)(0) = f(0) \cdot \frac{1}{f(0)} - 1 = 0 \Rightarrow fg - 1 = I \Rightarrow [f][g] = [fg] = [1],$$

y por tanto todo elemento no nulo de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/I$ tiene inverso.

Fascículo 2

Monografías 26-50

26. Suma $\sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$ en un espacio de matrices

Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de los reales o los complejos, y $\| \cdot \|$ una norma matricial en el espacio vectorial $E = \mathbb{K}^{n \times n}$ de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en $\mathbb{K}$. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tal que $\|A - I\| < 1$. Demostrar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$ es absolutamente convergente y que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k = A^{-1}.$$

Solución. Dado que la norma dada es matricial, se verifica $\|M\| \leq \|M\| \|N\|$ para todo par de matrices $M, N \in E$. Entonces,

$$\|(I - A)^k\| \leq \|I - A\|^k = \|A - I\|^k.$$

La serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} \|A - I\|^k$ es convergente pues por hipótesis, el módulo de $\|A - I\|$ es menor que 1. Entonces, usando el criterio de la mayorante

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|(I - A)^k\| \leq \|A - I\|^k \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|(I - A)^k\| &\text{ es conv. } \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k \text{ abs. conv.} \end{aligned}$$

Denotemos ahora $B = I - A$. Tenemos

$$\begin{aligned} (I - B) \sum_{k=0}^{n-1} B^k &= (I - B)(I + B + B^2 + \cdots + B^{n-1}) \\ &= (I + B + B^2 + \cdots + B^{n-1}) - (B + B^2 + B^3 + \cdots + B^n) = I - B^n. \end{aligned}$$

Al ser la norma dada una norma matricial se verifica $\rho(B) \leq \|B\|$, siendo $\rho(B)$ el radio espectral de B , con lo cual $B^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces,

$$(I-B) \sum_{k=0}^{n-1} B^k = I - B^n \Rightarrow (I-B) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} B^k = I - 0 \Rightarrow (I-B) \sum_{k=0}^{\infty} B^k = I$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{B=I-A} A \sum_{k=0}^{\infty} (I-A)^k = I \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (I-A)^k = A^{-1}.$$

27. Caracterización de una topología por axiomas de clausura de Kuratowski

Sea X un conjunto no vacío y sea $k : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ una aplicación que satisface los llamados axiomas de clausura de Kuratowski:

- $[K_1] \quad k(\emptyset) = \emptyset.$
- $[K_2] \quad A \subset k(A) \text{ para todo } A \in \mathcal{P}(X).$
- $[K_3] \quad k(A \cup B) = k(A) \cup k(B) \text{ para todo } A, B \in \mathcal{P}(X).$
- $[K_4] \quad k(k(A)) = k(A) \text{ para todo } A \in \mathcal{P}(X).$

Demostrar que existe una única topología en $\mathcal{T}$ tal que $k(A)$ es la clausura de A para todo $A \subset X$.

Solución. Supongamos que existe una topología $\mathcal{T}$ en X de tal manera que la clausura o adherencia de cada conjunto A coincide con $k(A)$ i.e. $\overline{A} = k(A)$. Por la conocida caracterización de los cerrados de una topología, la familia de cerrados de $\mathcal{T}$ ha de ser necesariamente

$$\mathcal{F} = \{F \subset X : k(F) = F\},$$

la cual determina unívocamente una topología

$$\mathcal{T} = \{G \subset X : G^c \in \mathcal{F}\}.$$

Veamos que $\mathcal{F}$ cumple las tres propiedades de los cerrados que caracterizan a una topología. Es decir,

- (a) $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{F}$.
- (b) Uniones finitas de elementos de $\mathcal{F}$ pertenecen a $\mathcal{F}$.
- (c) Intersecciones cualesquiera de elementos de $\mathcal{F}$ pertenecen a $\mathcal{F}$.

Efectivamente,

- (a) $\emptyset \in \mathcal{F}$ por $[K_1]$. Por $[K_2]$ se verifica $X \subset k(X)$, luego $X = k(X)$ y por

tanto $X \in \mathcal{F}$.

(b) Si $\{F_i\}$ es familia finita de elementos de $\mathcal{F}$ tenemos por $[K_2]$

$$k(\cup_i F_i) = \cup_i k(F_i) = \cup_i F_i \Rightarrow \cup_i F_i \in \mathcal{F}.$$

(c) Del axioma $[K_3]$,

$$M \subset N \Rightarrow k(N) = k[(N \setminus M) \cup M] = k(N \setminus M) \cup k(M) \Rightarrow k(M) \subset k(N).$$

Sea ahora $\{F_i\}$ una familia (finita o no) de elementos de $\mathcal{F}$ y llamemos $F = \cap_i F_i$. Entonces,

$$F \subset F_i \forall i \Rightarrow k(F) \subset k(F_i) \forall i \Rightarrow k(F) \subset \cap_i k(F_i) = \cap_i F_i = F$$

es decir $F \subset k(F)$, y por el axioma $[K_2]$, $F \subset k(F)$ luego $k(F) = F$ y por tanto $F \in \mathcal{F}$.

Falta demostrar que para todo $A \subset X$ se verifica $\bar{A} = k(A)$. En efecto,

$$\bar{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F} \wedge A \subset F} F = \bigcap_{k(F)=F \wedge A \subset F} F.$$

Por $[K_4]$, $k(A) = k(k(A))$ es un conjunto cerrado que contiene a A y por tanto $\bar{A} \subset k(A)$. Por otra parte,

$$A \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F} \wedge A \subset F} F \Rightarrow k(A) \subset k\left(\bigcap_{F \in \mathcal{F} \wedge A \subset F} F\right) = \bigcap_{F \in \mathcal{F} \wedge A \subset F} F = \bar{A}.$$

Es decir, $\bar{A} \subset k(A)$ y $k(A) \subset \bar{A}$ luego $k(A) = \bar{A}$.

28. Acotación por $e^{\alpha t}$ de las soluciones de un sistema diferencial

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con n valores propios distintos y la parte real de cada valor propio λ es menor que algún número negativo α . Demuestre que para cada solución de $X'(t) = Ax(t)$, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\|X(t)\| < e^{\alpha t} \text{ si } t_0 \leq t.$$

Solución. Las soluciones del sistema $X'(t) = Ax(t)$ son de la forma $X(t) = e^{tA}C$. Tomando normas

$$\|X(t)\| \leq \|e^{tA}\| \|C\|. \quad (1)$$

La matriz A tiene n valores propios distintos en $\mathbb{C}$, en consecuencia es diagonalizable en $\mathbb{C}$. Existe por tanto una matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $A = PDP^{-1}$ con D la diagonal de valores propios. Entonces,

$$\|e^{tA}\| = \|Pe^{tD}P^{-1}\| \leq \|P\| \|e^{tD}\| \|P^{-1}\| = c(P) \|e^{tD}\|,$$

en donde $c(P) = \|P\| \|P^{-1}\|$ es el número de condición de P .

La matriz e^{tD} es de la forma

$$e^{tD} = \text{diag} \left(e^{(\alpha_1 + \beta_1 i)t}, e^{(\alpha_1 - \beta_1 i)t}, \dots, e^{(\alpha_p + \beta_p i)t}, e^{(\alpha_p - \beta_p i)t} \right)$$

y $(e^{tD})^* e^{tD} = \text{diag} (e^{2\alpha_1 t}, \dots, e^{2\alpha_p t})$, luego

$$\|e^{tD}\| = \sqrt{\max\{e^{2\alpha_j t}\}} = \max\{e^{\alpha_j t}\} = e^{tm} \quad (m = \max\{\alpha_j\}).$$

Usando (1) podemos escribir $\|X(t)\| \leq c(P) \|C\| e^{mt}$. Tenemos las equivalencias

$$\|X(t)\| \leq e^{\alpha t} \Leftrightarrow c(P) \|C\| e^{mt} \leq e^{\alpha t} \Leftrightarrow c(P) \|C\| \leq e^{(\alpha - m)t}.$$

Dado que $\alpha - m > 0$, se verifica $e^{(\alpha - m)t} \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Es decir, a partir de un t_0 se verifica $c(P) \|C\| \leq e^{(\alpha - m)t}$ y por ende $\|X(t)\| \leq e^{\alpha t}$ si $t \geq t_0$.

29. Generatrices rectilíneas de un hiperboloide de una hoja

Consideremos el hiperboloide de una hoja

$$H : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

y los haces de rectas

$$L_t : \begin{cases} x = a \cos t + \lambda a \sin t \\ y = b \sin t - \lambda b \cos t \\ z = \lambda c \end{cases} \quad L'_t : \begin{cases} x = a \cos t - \lambda a \sin t \\ y = b \sin t + \lambda b \cos t \\ z = \lambda c \end{cases}$$

en donde $t \in [0, 2\pi)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Demostrar que todas las rectas de L_t y todas las de L'_t están contenidas en H .

(b) Demostrar que por cada punto de H pasa una y sólo una recta de cada haz (por tanto L_t y L'_t son dos haces de generatrices rectilíneas de H).

(c) Demostrar que las rectas L_t no se cortan. Idem para las rectas de L'_t .

Solución. (a) Para todo $(t, \lambda) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ y eligiendo un punto genérico $(x, y, z) \in L_t$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= \frac{a^2(\cos^2 t + \lambda^2 \sin^2 t + 2\lambda \cos t \sin t)}{a^2} \\ &\quad + \frac{b^2(\sin^2 t + t^2 \cos^2 t - 2\lambda \sin t \cos t)}{b^2} - \frac{c^2 \lambda^2}{c^2} \\ &= \cos^2 t + \sin^2 t + \lambda^2(\cos^2 t + \sin^2 t) - \lambda^2 = 1, \end{aligned}$$

lo cual prueba que las rectas de L_t están contenidas en H . Análogo razonamiento para L'_t .

(b) Sea (x, y, z) un punto de H y denotemos $\lambda = z/c$. Tenemos

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \frac{x}{a} + \frac{1}{\lambda^2 + 1} \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2 + 1} \frac{x}{a} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \frac{y}{b} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\lambda^2 + 1} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] = \frac{1}{z^2/c^2 + 1} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = 1. \end{aligned}$$

En consecuencia, existe un único $t \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\begin{cases} \sin t = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \frac{x}{a} + \frac{1}{\lambda^2 + 1} \frac{y}{b} \\ \cos t = \frac{1}{\lambda^2 + 1} \frac{x}{a} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \frac{y}{b} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos fácilmente

$$\begin{cases} x = a \cos t + \lambda a \sin t \\ y = b \sin t - \lambda b \cos t \\ z = \lambda c \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi), \lambda \in \mathbb{R}),$$

y por tanto (x, y, z) pertenece a una única recta de L_t .

Para todo punto (x, y, z) de H también se verifica

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \frac{x}{a} - \frac{1}{\lambda^2 + 1} \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2 + 1} \frac{x}{a} + \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \frac{y}{b} \right)^2 = 1.$$

Razonando de manera totalmente análoga deducimos que existe un único $t \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\begin{cases} x = a \cos t - \lambda a \sin t \\ y = b \sin t + \lambda b \cos t \\ z = \lambda c \end{cases} \quad (t \in [0, 2\pi), \lambda \in \mathbb{R}),$$

y por tanto (x, y, z) pertenece a una única recta de L'_t .

(c) Supongamos que las rectas L_{t_1} y L_{t_2} se cortan en el punto (x, y, z) , y que este punto corresponde a los parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Entonces, $\lambda_1 = \lambda_2 = z/c = \lambda$. Además,

$$\begin{cases} \sin t_1 = \sin t_2 = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \frac{x}{a} + \frac{1}{\lambda^2 + 1} \frac{y}{b} \\ \cos t_1 = \cos t_2 = \frac{1}{\lambda^2 + 1} \frac{x}{a} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \frac{y}{b} \end{cases}$$

y por tanto, $t_1 = t_2$. Análogo razonamiento para las rectas L'_t .

30. Semianillo tropical

En el conjunto $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se definen las operaciones

$$x \oplus y = \min\{x, y\}, \quad x \odot y = x + y.$$

- (a) Demostrar que $(\mathbb{T}, \oplus)$ es semigrupo abeliano con elemento neutro.
- (b) Demostrar que $(\mathbb{T}, \odot)$ es también semigrupo conmutativo con elemento unidad.
- (c) Demostrar que la operación $\odot$ es distributiva respecto de la operación $\oplus$. Es decir, que para todo $x, y, z \in \mathbb{T}$ se verifican las igualdades

$$\begin{aligned} i) \quad x \odot (y \oplus z) &= (x \odot y) \oplus (x \odot z), \\ ii) \quad (x \oplus y) \odot z &= (x \odot z) \oplus (y \odot z). \end{aligned}$$

- (d) Demostrar que 0_T anula a todo elemento de $\mathbb{T}$, es decir que

$$0_T \odot x = x \odot 0_T = 0 \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Nota. Los apartados anteriores prueban que $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ es un semianillo conmutativo. Se le denomina *semianillo tropical*.

- (e) Para $n \geq 1$ entero y $a \in \mathbb{T}$, denotamos $a^n = a \odot a \odot \dots \odot a$ (n veces). Demostrar que para todo $x, y \in \mathbb{T}$ se verifica $(x \oplus y)^2 = x^2 \oplus y^2$.
- (f) Demostrar que para todo entero $n \geq 1$ y $x, y \in \mathbb{T}$ se verifica $(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n$.

Solución. (a) *Interna.* Para todo $x, y \in \mathbb{T}$ es evidente que $x \oplus y \in \mathbb{T}$.

Asociativa. Para todo $x, y, z \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned} (x \oplus y) \oplus z &= \min\{x, y\} \oplus z = \min\{\min\{x, y\}, z\} = \min\{x, y, z\} \\ &= \min\{x, \min\{y, z\}\} = x \oplus \min\{y, z\} = x \oplus (y \oplus z). \end{aligned}$$

Existencia de elemento neutro. Denotando $0_T = +\infty$, tenemos para todo $x \in \mathbb{T}$:

$$x \oplus 0_T = \min\{x, +\infty\} = x, \quad 0_T \oplus x = \min\{+\infty, x\} = x,$$

es decir 0_T es elemento neutro para la operación $\oplus$.

Conmutativa. Para todo $x, y \in \mathbb{T}$, $x \oplus y = \min\{x, y\} = \min\{y, x\} = y \oplus x$.

(b) *Interna.* Para todo $x, y \in \mathbb{T}$ es evidente que $x \odot y \in \mathbb{T}$.

Asociativa. Para todo $x, y, z \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned} (x \odot y) \odot z &= (x + y) \odot z = (x + y) + z \\ &= x + (y + z) = x + (y \odot z) = x \odot (y \odot z). \end{aligned}$$

Existencia de elemento unidad. Denotando $1_T = 0$, tenemos para todo $x \in \mathbb{T}$:

$$x \odot 1_T = x + 0 = x, \quad 1_T \odot x = 0 + x = x,$$

es decir 1_T es elemento neutro para la operación $\odot$.

Conmutativa. Para todo $x, y \in \mathbb{T}$, $x \odot y = x + y = y + x = y \odot x$.

(c) i) Para todo $x, y, z \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned} x \odot (y \oplus z) &= x + \min\{y, z\} = \min\{x + y, x + z\} \\ &= (x + y) \oplus (x + z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z). \end{aligned}$$

Dado que las operaciones $\oplus$ y $\odot$ son conmutativas, también se cumple ii).

(d) Para todo $x \in \mathbb{T}$, se verifica

$$0_T \odot x = (+\infty) + x = +\infty = 0_T,$$

y al ser $\odot$ conmutativa, también se verifica $x \odot 0_T = 0_T$.

(e) Para todo x, y elementos de $\mathbb{T}$:

$$\begin{aligned} (x \oplus y)^2 &= (x \oplus y) \odot (x \oplus y) = \min\{x, y\} + \min\{x, y\} \\ &= \min\{2x, x + y, 2y\} = \min\{2x, 2y\}. \end{aligned}$$

$$x^2 \oplus y^2 = (x \odot x) \oplus (y \odot y) = (x + x) \oplus (y + y) = \min\{2x, 2y\}.$$

Es decir, $(x \oplus y)^2 = x^2 \oplus y^2$.

(f) La igualdad es trivialmente cierta para $n = 1$. Sea cierta para $n - 1$.

Entonces,

$$\begin{aligned} (x \oplus y)^n &= (x \oplus y) \odot (x \oplus y)^{n-1} = (x \oplus y) \odot (x^{n-1} \oplus y^{n-1}) \\ &= \min\{x, y\} + \min\{(n-1)x, (n-1)y\} \\ &= \min\{nx, (n-1)x + y, x + (n-1)y, ny\} = \min\{nx, ny\}. \end{aligned}$$

Por otra parte, $x^n \oplus y^n = (nx) \oplus (ny) = \min\{nx, ny\}$ y por tanto la igualdad es cierta para n .

31. Seminorma del supremo en el anillo de las funciones continuas

Sea $R = \mathcal{C}(I)$ el anillo de las funciones reales continuas en el intervalo $I = [a, b]$ con las operaciones habituales suma y producto. Se define la aplicación

$$N : R \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad N(f) = \sup\{|f(x)| : x \in I\}.$$

(a) Demostrar que N es una *seminorma* en R (se la denomina *seminorma del supremo*).

(b) Demostrar que tal seminorma es arquimediana.

Solución. (a) Recordamos que si R es un anillo unitario (elemento unidad 1_R) una seminorma en R es cualquier aplicación $N : R \rightarrow \mathbb{R}^+$ cumpliendo los axiomas

- (1) $N(1_R) = 1$.
- (2) $N(xy) \leq N(x)N(y) \quad \forall x, y \in R$.
- (3) $N(x + y) \leq N(x) + N(y) \quad \forall x, y \in R$.

Veamos que la aplicación dada satisface en el anillo de las funciones dado los axiomas anteriores. Efectivamente, la función N está bien definida por un conocido resultado de Análisis. La función 1_R es $1_R(x) = 1$ para todo $x \in I$, por tanto

$$N(1_R) = \sup\{|1_R(x)| : x \in I\} = \sup\{1 : x \in I\} = 1.$$

Sean ahora $f, g \in R$. Tenemos

$$\begin{aligned} N(fg) &= \sup\{|(fg)(x)| : x \in I\} = \sup\{|f(x)g(x)| : x \in I\} \\ &= \sup\{|f(x)| |g(x)| : x \in I\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| : x \in I\} \sup\{|g(x)| : x \in I\} = N(f)N(g). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} N(f + g) &= \sup\{|(f + g)(x)| : x \in I\} = \sup\{|f(x) + g(x)| : x \in I\} \\ &= \sup\{|f(x)| + |g(x)| : x \in I\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| : x \in I\} + \sup\{|g(x)| : x \in I\} = N(f) + N(g). \end{aligned}$$

Por tanto, N es seminorma.

(b) Recordamos que una seminorma en un anillo unitario R se dice que es *no arquimediana* si el axioma (3) es sustituye por la condición más fuerte

$$(3') \quad N(x + y) \leq \max\{N(x), N(y)\} \forall x, y \in R,$$

llamada desigualdad *ultramétrica*, y si no se cumple (3') la seminorma se dice que es *arquimediana*. Es fácil verificar que en el anillo de las funciones continuas dado, N es arquimediana. En efecto si $f = g = 1_R$ tenemos $N(f) = N(g) = 1$ y

$$N(f + g) = \sup\{(1_R + 1_R)(x) : x \in I\} = \sup\{2 : x \in I\} = 2,$$

lo cual implica que $2 = N(f + g) \not\leq \max\{N(f), N(g)\} = 1$.

32. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x)\} \cup \{(0, 0)\}$ conexo, pero no por caminos

En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual se considera el subconjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x)\} \cup \{(0, 0)\}.$$

- (a) Demostrar que es conexo.
- (b) Demostrar que no es conexo por caminos.

Solución. (a) La función $f(x) = (x, \sin 1/x)$ es continua sobre cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ que no contiene a 0. Escribamos $A = A^+ \cup A^-$ siendo $A^+ = \{(0, 0)\} \cup f((0, +\infty))$ y $A^- = \{(0, 0)\} \cup f((-\infty, 0))$.

Ahora bien, $f((0, +\infty))$ es conexo por ser imagen continua de un conexo. Como $(0, 0)$ es punto límite de $f((0, +\infty))$ se concluye que A^+ es conexo. Análogamente se demuestra que A^- es conexo. Como $A^+ \cap A^- \neq \emptyset$, se deduce que A es conexo.

(b) Supongamos que existiera un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ uniendo $(0, 0)$ con $(1/\pi, 0)$. Consideremos el conjunto cerrado $\gamma^{-1}(\{(0, 0)\})$ y sea M el supremo de este conjunto. Entonces, sobre el intervalo $[M, 1]$ tenemos $\gamma(t) = (0, 0)$ si y solo si $t = M$. Parametricemos la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ de tal manera que $M = 0$. Tenemos:

$$\begin{cases} \gamma(0) = (0, 0) \\ x(t) \neq 0, y(t) = \sin(1/x(t)) \text{ si } t > 0. \end{cases}$$

Elijamos ahora para cada n un entero a_n tal que $2/\pi a_n$ pertenece al intervalo $(0, x(1/n))$. Aplicando el teorema del valor intermedio, obtenemos un $t_n \in (0, 1/n)$ tal que $x(t_n) = 2/\pi a_n$. Entonces, $t_n \rightarrow 0$ pero $\gamma(t_n)$ no tiende a $(0, 0)$. Esto contradice la continuidad de γ .

33. Límite $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ por tres métodos

Calcular $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$,

- (a) Usando la regla de L'Hopital.
- (b) Usando un desarrollo limitado de Maclaurin de $\sin x$.
- (c) Usando algún método esencialmente distinto de los anteriores

Solución. (a) Usando la regla de L'Hopital,

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

$$\underbrace{=}_{1 - \cos x \sim x^2/2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

- (b) Usando el desarrollo limitado de orden 2 del seno,

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - [x - x^3/6 + o(x^3)]}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/6 - o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}.$$

- (c) Usando el cambio de variable $t = 3x$,

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - \sin 3t}{27t^3}$$

Usando la fórmula $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$,

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - 3 \sin t + 4 \sin^3 t}{27t^3}.$$

Entonces,

$$L = \frac{1}{9} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} + \frac{4}{27} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^3,$$

$$L = \frac{1}{9} L + \frac{4}{27}, \quad L = \frac{1}{6}.$$

34. Teorema de Casorati-Weierstrass: singularidades de $1/f$

Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, con singularidad esencial en a y que no se anula en $U \setminus \{a\}$.

(a) Usando el teorema de Casorati-Weierstrass, estudiar el tipo de singularidad que presenta $1/f$ en a .

(b) Verificar el resultado anterior para la función $f(z) = e^{1/z}$, mediante desarrollos en serie de Laurent en una corona de centro 0.

Solución. (a) Recordemos el teorema de Casorati-Weierstrass:

Sea $f(z)$ analítica en $0 < |z - a| < R$ y a una singularidad esencial de $f(z)$. Entonces, $\forall w \in \mathbb{C}$, $\forall \epsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, existe un $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |z - a| < \delta$ y $|f(z) - w| < \epsilon$. Es decir, en un entorno de una singularidad esencial, la función toma valores arbitrariamente próximos a cualquier número complejo.

Existen por tanto dos sucesiones $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ en $U \setminus \{a\}$ tales que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n &= a, & \lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n &= a, & \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(w_n)| &= \infty. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(z_n)} = \frac{1}{a}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{f(w_n)} \right| = 0.$$

Es decir, no existe $\lim_{z \rightarrow a} 1/f(z)$ ni finito ni infinito. Por tanto, $1/f$ tiene una singularidad esencial en a .

(b) El desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = e^{1/z}$ en $0 < |z| < +\infty$ es

$$f(z) = 1 + \frac{1/z}{1!} + \frac{1/z^2}{2!} + \frac{1/z^3}{3!} + \dots + \frac{1/3!}{z^3} + \frac{1/2!}{z^2} + \frac{1}{z} + 1.$$

La serie de Laurent tiene infinitos términos en su parte principal, por tanto 0 es singularidad esencial de f . El desarrollo en serie de Laurent de $1/f(z) = 1/e^{1/z} = e^{-1/z}$ en $0 < |z| < +\infty$ es

$$\frac{1}{f(z)} = 1 - \frac{1/z}{1!} + \frac{1/z^2}{2!} - \frac{1/z^3}{3!} + \dots - \frac{1/3!}{z^3} + \frac{1/2!}{z^2} - \frac{1}{z} + 1.$$

La serie de Laurent tiene infinitos términos en su parte principal, por tanto 0 es singularidad esencial de $1/f$.

35. Mínimo de $L(f) = \int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)}$ mediante la desigualdad de Schwarz

Utilizando la desigualdad de Schwarz, demostrar que si $f(x)$ es continua y positiva para $a \leq x \leq b$, el producto

$$L(f) = \int_a^b f(x) \, dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

es mínimo si y sólo si f es una función constante.

Solución. El espacio $E = \mathcal{C}[a, b]$ de las funciones reales continuas en $[a, b]$ sabemos que es un espacio euclídeo provisto del producto escalar

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx.$$

Se verifica por tanto la desigualdad de Schwarz

$$\langle f_1, f_2 \rangle^2 \leq \|f_1\|^2 \|f_2\|^2 \quad \forall f_1, f_2 \in E. \quad (1)$$

Lamemos $f_1 = f$ y $f_2 = \frac{1}{\sqrt{f}}$, que es continua en $[a, b]$ ($f > 0$). Usando (1),

$$\begin{aligned} \left[\int_a^b f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right]^2 &\leq \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \\ &\Rightarrow (b-a)^2 \leq L(f). \end{aligned}$$

Entonces, $M = (b-a)^2$ es cota inferior de $L(f)$ y la cota se alcanza cuando la desigualdad de Schwarz se convierte en igualdad, es decir si y solamente si $f_1 = \lambda f_2$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, si y solamente si

$$\sqrt{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{f}}$$

que equivale a $f = \lambda$ (constante).

36. Polinomios de Legendre y operador simétrico

En el espacio vectorial $E = \mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios reales de grado $\leq n$ se define la aplicación

$$T : E \rightarrow E, \quad T(f) = (pf')' \quad \text{con } p(x) = x^2 - 1.$$

- (a) Demostrar que T es lineal.
- (b) Hallar la matriz de T en la base canónica de E .
- (c) Determinar el espectro de T y estudiar si T es diagonalizable.
- (d) En el espacio vectorial euclídeo que se obtiene al dotar a E del producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx,$$

estudiar si el endomorfismo T es simétrico y determinar la matriz de T respecto de la base

$$B_L = (p_0, p_1, \dots, p_n)$$

formada por los polinomios de Legendre de grados $0, 1, 2, \dots, n$.

Solución. (a) La aplicación está bien definida pues si $f \neq 0$,

$$\text{grad } f = k \Rightarrow \text{grad } (pf') = 2 + (k - 1) = k + 1$$

$$\Rightarrow \text{grad } (pf')' = k \Rightarrow \text{grad } T(f) = k,$$

y si $f = 0$, $T(f) = 0$, por tanto T transforma elementos de E en elementos de E . Veamos que T es lineal. En efecto, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $f, g \in E$

$$\begin{aligned} T(\alpha f + \beta g) &= (p(\alpha f + \beta g))' = (p(\alpha f' + \beta g'))' \\ &= (\alpha pf' + \beta pg')' = \alpha (pf')' + \beta (pg')' = \alpha T(f) + \beta T(g). \end{aligned}$$

(b) Hallemos los transformados de la base canónica $B = (1, x, x^2, \dots, x^n)$. Tenemos para $2 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} T(x^k) &= ((x^2 - 1)(x^k))' = (k(x^2 - 1)x^{k-1})' \\ &= (kx^{k+1} - kx^{k-1})' = k(k+1)x^k - k(k-1)x^{k-2}. \end{aligned}$$

Por otra parte, $T(1) = 0$ y $T(x) = 2x$. Entonces,

$$\begin{cases} T(1) = 0 \\ T(x) = 2x \\ T(x^2) = 6x^2 - 2 \\ T(x^3) = 12x^3 - 6x \\ \dots \\ T(x^n) = n(n+1)x^n - n(n-1)x^{n-2} \end{cases}$$

y la matriz M de T en B es

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n(n+1) \end{bmatrix}.$$

(c) La matriz M es triangular, por tanto el espectro de T es

$$\text{Spec } (T) = \{0, 2, 6, 12, \dots, n(n+1)\}.$$

Los valores propios son todos reales y simples, en consecuencia T es diagonalizable.

(d) Recordemos que los polinomios de Legendre

$$p_n(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} [(x^2 - 1)^k] \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

forman una base ortogonal en el espacio euclídeo dado. Sean $f, g \in E$ tales que $f = \sum_0^n \alpha_i p_i$ y $g = \sum_0^n \beta_j p_j$. Entonces,

$$\langle Tf, g \rangle = \left\langle \sum_0^n \alpha_i T p_i, \sum_0^n \beta_j p_j \right\rangle = \sum_{i,j=0}^n \alpha_i \beta_j \langle T p_i, p_j \rangle.$$

Análogamente obtenemos $\langle f, Tg \rangle = \sum_{i,j=0}^n \alpha_i \beta_j \langle p_i, T p_j \rangle$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} T[p_k(x)] &= [(x^2 - 1)p'_k(x)]' = 2xp'_k(x) + (x^2 - 1)p''_k(x) \\ &= \dots = k(k+1)p_k(x). \quad (*) \end{aligned}$$

$$\langle T p_i, p_j \rangle = \int_{-1}^1 i(i+1)p_i(x)p_j(x) = 0 \text{ si } i \neq j,$$

$$\langle p_i, T p_j \rangle = \int_{-1}^1 j(j+1)p_i(x)p_j(x) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

En consecuencia, para todo $f, g \in E$

$$\langle Tf, g \rangle = \sum_{i=0}^n \alpha_i \beta_i \langle T p_i, p_i \rangle = \sum_{i=0}^n \alpha_i \beta_i \langle p_i, T p_i \rangle = \langle f, Tg \rangle,$$

lo cual implica que T es simétrico. De la igualdad (*) deducimos que la matriz de T en B_L es $D = \text{diag}(0, 2, 6, 12, \dots, n(n+1))$.

37. Forma bilineal a partir de una suma directa

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y W_1 y W_2 dos subespacios de V tales que $V = W_1 \oplus W_2$. Sea f una forma bilineal sobre W_1 y g una forma bilineal sobre W_2 , y sea la aplicación

$$h : V \times V \rightarrow \mathbb{K}, \quad h(x, y) = f(x_1, y_1) + g(x_2, y_2)$$

donde $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$ x e y son las representaciones relativas a la suma directa $W_1 \oplus W_2$.

a) Demostrar que h es una forma bilineal sobre V , cuyas restricciones a W_1 y W_2 son respectivamente f y g .

b) Demostrar que si $x \in W_1$ e $y \in W_2$, entonces $h(x, y) = h(y, x) = 0$.

Solución. a) La aplicación h está bien definida pues al ser $V = W_1 \oplus W_2$, la representación de todo vector de V en suma de uno de W_1 y otro de W_2 es única. Veamos que h es forma bilineal. En efecto, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, para todo $x, x', y \in V$, y usando las correspondientes descomposiciones:

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta x', y) &= h[\alpha(x_1 + x_2) + \beta(x'_1 + x'_2), y_1 + y_2] \\ &= h[(\alpha x_1 + \beta x'_1) + (\alpha x_2 + \beta x'_2), y_1 + y_2] \\ &= f(\alpha x_1 + \beta x'_1, y_1) + g(\alpha x_2 + \beta x'_2, y_2) \end{aligned}$$

Dado que f y g son formas bilineales,

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta x', y) &= \alpha f(x_1, y_1) + \beta f(x'_1, y_1) + \alpha g(x_2, y_2) + \beta g(x'_2, y_2) \\ &= \alpha (f(x_1, y_1) + g(x_2, y_2)) + \beta (f(x'_1, y_1) + g(x'_2, y_2)) \\ &= \alpha h(x, y) + \beta h(x', y). \end{aligned}$$

Análogamente se demuestra la otra condición de forma bilineal:

$$h(x, \alpha y + \beta y') = \alpha h(x, y) + \beta h(x, y') \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall x, y, y' \in V.$$

Sean ahora $x, y \in W_1$. Las correspondientes descomposiciones son $x = x + 0$, $y = y + 0$. En consecuencia,

$$h(x, y) = f(x, y) + g(0, 0) = f(x, y) + 0 = f(x, y) \Rightarrow h|_{W_1} = f.$$

Análogamente se demuestra que $h|_{W_2} = g$.

b) Si $x \in W_1$ e $y \in W_2$, las correspondientes descomposiciones son $x = x + 0$, $y = 0 + y$, por tanto

$$h(x, y) = f(x, 0) + g(0, y) = 0 + 0 = 0,$$

$$h(y, x) = f(0, x) + g(y, 0) = 0 + 0 = 0.$$

38. Un operador autoadjunto y unitario

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita dotado de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sea W un subespacio de V . Se considera la aplicación

$$T : V \rightarrow V, \quad T(v) = w - w',$$

en donde $v = w + w'$ con $w \in W$ y $w' \in W^\perp$.

- Demostrar que T es lineal.
- Demostrar que T es autoadjunto.
- Demostrar que T es unitario.

Solución. a) Dado que $V = W \oplus W^\perp$, la descomposición de todo vector de V en suma de uno de W y otro de $W^\perp$ es única, por tanto, la aplicación T está bien definida. Veamos que T es lineal. En efecto, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y sean $x, y \in V$ tales que $x = x_1 + x'_1$, $y = y_1 + y'_1$ con $x_1, y_1 \in W$, $x'_1, y'_1 \in W^\perp$. Entonces,

$$T(\alpha x + \beta y) = T[\alpha(x_1 + x'_1) + \beta(y_1 + y'_1)] = T[\underbrace{(\alpha x_1 + \beta y_1)}_{\in W} + \underbrace{(\alpha x'_1 + \beta y'_1)}_{\in W^\perp}]$$

$$= (\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x'_1 + \beta y'_1) = \alpha(x_1 - x'_1) + \beta(y_1 - y'_1) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

b) Hay que demostrar que $T^* = T$ o de forma equivalente, que $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$ para todo $x, y \in V$. Tenemos por una parte

$$\begin{aligned} \langle T(x), y \rangle &= \langle x_1 - x'_1, y_1 + y'_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle - \langle x'_1, y_1 \rangle + \langle x_1, y'_1 \rangle - \langle x'_1, y'_1 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1 \rangle - 0 + 0 - \langle x'_1, y'_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle - \langle x'_1, y'_1 \rangle. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \langle x, T(y) \rangle &= \langle x_1 + x'_1, y_1 - y'_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x'_1, y_1 \rangle - \langle x_1, y'_1 \rangle - \langle x'_1, y'_1 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1 \rangle + 0 - 0 - \langle x'_1, y'_1 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle - \langle x'_1, y'_1 \rangle. \end{aligned}$$

Concluimos que T es autoadjunto.

c) Para todo $x \in V$,

$$T^2(x) = T[T(x)] = T(x - x'_1) = T(x_1 + (-x'_1)) = x_1 - (-x'_1) = x_1 + x'_1 = x,$$

es decir $T^2 = I$, lo cual implica que $T^{-1} = T$. Por el apartado anterior, $T^{-1} = T^*$, luego T es unitario.

39. Métrica producto $d(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1+d_n(x_n, y_n)}$

Sea $\{(X_i, d_i) : i \in \mathbb{N}^*\}$ una colección numerable de espacios métricos y sea $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Demostrar que:

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d[(x_n), (y_n)] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1+d_n(x_n, y_n)}$$

define una métrica en X (se la denomina métrica producto).

Solución. Para todo $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ elementos de X se verifica

$$0 \leq \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} \leq \frac{1}{2^n} \cdot 1 = \frac{1}{2^n}.$$

Como la serie geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} (1/2)^n$ es convergente, $d(x, y) \geq 0$ y finito i.e. la aplicación d está bien definida. Veamos que satisface los axiomas de métrica.

$$[M_1] \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} = 0 \quad \forall n$$

$$\Leftrightarrow \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} = 0 \quad \forall n \Leftrightarrow d_n(x_n, y_n) = 0 \quad \forall n \Leftrightarrow x_n = y_n \quad \forall n \Leftrightarrow x = y.$$

$$[M_2] \quad d(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(y_n, x_n)}{1 + d_n(y_n, x_n)} = d(y, x).$$

$[M_3]$ Sean $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, $z = (z_n)$ elementos del conjunto producto X y llamemos $a = d_n(x_n, y_n)$, $b = d_n(x_n, z_n)$, $c = d_n(z_n, y_n)$. Veamos que se verifica

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Efectivamente,

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \Leftrightarrow a(1+b)(1+c) \leq (1+a)[b(1+c) + c(1+b)]$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a \leq b + c + 2bc + abc.$$

Esta última desigualdad se verifica pues al ser d_n distancia, se cumple $a \leq b + c$. Entonces,

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, z_n)}{1 + d_n(x_n, z_n)} + \frac{1}{2^n} \frac{d_n(z_n, y_n)}{1 + d_n(z_n, y_n)}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, z_n)}{1 + d_n(x_n, z_n)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(z_n, y_n)}{1 + d_n(z_n, y_n)} = d(x, z) + d(z, y),$$

lo cual prueba la desigualdad triangular.

40. Número combinatorio $\binom{2n}{n}$ e integral

Para todo entero positivo n , demostrar la relación

$$\binom{2n}{n} = \frac{2^{2n}}{(2n+1) \int_0^1 (1-x^2)^n dx}.$$

Solución. Integrando por partes con $u = (1-x^2)^n$ y $dv = dx$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x^2)^n dx &= [x(1-x^2)^n]_0^1 + 2n \int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1} dx \\ &= 0 - 2n \int_0^1 (1-x^2-1)(1-x^2)^{n-1} dx \\ &= -2n \int_0^1 (1-x^2)^n dx + 2n \int_0^1 (1-x^2)^{n-1} dx. \end{aligned}$$

Obtenemos por tanto la relación

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2n}{2n+1} \int_0^1 (1-x^2)^{n-1} dx.$$

Dado que $\int_0^1 (1-x^2) dx = 2/3$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x^2)^n dx &= \frac{2}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!} \\ &= \frac{2^{2n}}{(2n+1)} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)} \frac{1}{\binom{2n}{n}}, \end{aligned}$$

y queda demostrada la igualdad propuesta.

41. Igualdad integral $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t \log^2 t} dt = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{\log t} dt$

Demostrar la igualdad entre las integrales impropias

$$I = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t \log^2 t} dt, \quad J = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{\log t} dt.$$

Solución. En $[\pi, +\infty)$, tenemos

$$\left| \frac{\sin t}{t \log^2 t} \right| \leq \frac{1}{t \log^2 t}.$$

Efectuando el cambio $x = \log t$:

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dt}{t \log^2 t} = \int_{\log \pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ (convergente)}$$

por tanto I es absolutamente convergente y como consecuencia, convergente. Apliquemos a I el conocido teorema de la integración por partes para integrales impropias (el teorema además asegura que si dos de los términos que aparecen son convergentes, también lo es el tercero). Tenemos

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u = \sin t \\ dv = \frac{1}{t \log^2 t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos t \\ v = -\frac{1}{\log t} \end{cases} \\ \Rightarrow I &= \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t \log^2 t} dt = \left[-\frac{\sin t}{\log t} \right]_{\pi}^{+\infty} + \underbrace{\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{\log t} dt}_J. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\left[-\frac{\sin t}{\log t} \right]_{\pi}^{\infty} = -\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin t}{\log t} + \lim_{t \rightarrow \pi} \frac{\sin t}{\log t} = -0 + 0 = 0.$$

Concluimos que I y J convergentes y tienen el mismo valor.

42. Ordinales racionales y norma p -ádica

En todo este problema, p representa a un número primo ≥ 2 .

1. Sea $0 \neq x \in \mathbb{Z}$. Se define el *ordinal p -ádico* de x como

$$\text{ord}_p x = \max\{r \in \mathbb{N} : p^r \mid x\}$$

es decir, $\text{ord}_p x$ es el exponente de p en la descomposición de x en producto de factores primos. Calcular los ordinales p -ádicos en $\mathbb{Z}$:

$$\text{ord}_5 200, \quad \text{ord}_2 200, \quad \text{ord}_2 15, \quad \text{ord}_7(-98).$$

2. Sea $0 \neq x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Se define el *ordinal p -ádico* de x como

$$\text{ord}_p \frac{a}{b} = \text{ord}_p a - \text{ord}_p b,$$

Nótese que ord_p está bien definido, es decir

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow \text{ord}_p \frac{a}{b} = \text{ord}_p \frac{a'}{b'}.$$

También se define $\text{ord}_p 0 = \infty$. Calcular los ordinales p -ádicos en $\mathbb{Q}$:

$$\text{ord}_3 \frac{40}{27}, \quad \text{ord}_7 \left(-\frac{98}{15} \right)$$

3. Demostrar que para todo $x, y \in \mathbb{Q}$ se verifica: (a) $\text{ord}_p x = \infty \Leftrightarrow x = 0$. (b) $\text{ord}_p(xy) = \text{ord}_p x + \text{ord}_p y$. (c) $\text{ord}_p(x+y) \geq \min\{\text{ord}_p x, \text{ord}_p y\}$ con igualdad si $\text{ord}_p x \neq \text{ord}_p y$.

4. Se define la *norma p -ádica* en $\mathbb{Q}$ como $\|x\|_p = p^{-\text{ord}_p x}$. Demostrar que es una norma no arquimediana en $\mathbb{Q}$, es decir que se verifican las propiedades

(a) $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(b) $\|xy\|_p = \|x\|_p \|y\|_p \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

(c) $\|x+y\|_p \leq \max\{\|x\|_p, \|y\|_p\} \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

Solución. 1. Tenemos $200 = 2^3 \cdot 5^2$, $15 = 3 \cdot 5$ y $-98 = -2 \cdot 7^2$. En consecuencia,

$$\text{ord}_5 200 = 2, \quad \text{ord}_2 200 = 3, \quad \text{ord}_2 15 = 0, \quad \text{ord}_7(-98) = 2.$$

2. Tenemos

$$\text{ord}_3 \frac{40}{27} = \text{ord}_3 \frac{2^3 \cdot 5}{3^3} = \text{ord}_3(2^3 \cdot 5) - \text{ord}_3(3^3 \cdot 5) = 0 - 3 = -3,$$

$$\text{ord}_7 \left(-\frac{98}{15} \right) = \text{ord}_7 \left(-\frac{2 \cdot 7^2}{3 \cdot 5} \right) = \text{ord}_7(-2 \cdot 7^2) - \text{ord}_7(3 \cdot 5) = 2 - 0 = 2.$$

3. (a) Se verifica $\text{ord}_p 0 = \infty$ por definición, y si $x \neq 0$ entonces $\text{ord}_p x$ es claramente finito.

(b) Expresando x e y no nulos como fracciones irreducibles descompuestas en factores primos: $x = \pm p^r p_1^{r_1} \dots p_m^{r_m}$, $y = \pm p^s q_1^{s_1} \dots q_n^{s_n}$. Entonces,

$$\text{ord}_p(xy) = \text{ord}_p(\pm p^{r+s} \dots) = r + s = \text{ord}_p x + \text{ord}_p y.$$

Si $x = 0$ o $y = 0$, el resultado es trivial.

(c) Sean $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con $\text{ord}_p x = r$, $\text{ord}_p y = s$. Entonces,

$$x = p^r \frac{a}{b}, \quad y = p^s \frac{c}{d}, \quad p \nmid a, b, c, d \quad (r, s \in \mathbb{Z}).$$

Si $r = s$, tenemos

$$\begin{aligned} x + y &= p^r \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) = p^r \frac{ad + bc}{bd} \underbrace{\Rightarrow}_{p \nmid bd} \text{ord}_p(x+y) \geq r \\ &= \min\{r, r\} = \min\{\text{ord}_p x, \text{ord}_p y\}. \end{aligned}$$

Si $r \neq s$, por ejemplo $s > r$ tenemos

$$x + y = p^r \frac{a}{b} + p^s \frac{c}{d} = p^r \left(\frac{a}{b} + p^{s-r} \frac{c}{d} \right) = p^r \frac{ad + p^{s-r}bc}{bd}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{s-r > 0 \wedge p \nmid ad} \text{ord}_p(x + y) = \min\{\text{ord}_p x, \text{ord}_p y\}.$$

Si alguno de los términos es nulo, por ejemplo $x = 0$, entonces $\text{ord}_p x = \infty \geq \text{ord}_p y$ y por tanto

$$\text{ord}_p(x + y) = \text{ord}_p y \geq \min\{\infty, \text{ord}_p y\} = \min\{\text{ord}_p x, \text{ord}_p y\}.$$

4. (a) Tenemos $\|0\|_p = p^{-\infty} = 0$ y si $x \neq 0$ entonces $\text{ord}_p x$ es finito, luego $\|x\|_p = p^{-\text{ord}_p x} \neq 0$.

(b) Usando la propiedad 3.(b) y para $xy \neq 0$

$$\|xy\|_p = p^{-\text{ord}_p xy} = p^{-(\text{ord}_p x + \text{ord}_p y)} = p^{-\text{ord}_p x} p^{-\text{ord}_p y} = \|x\|_p \|y\|_p.$$

Si $x = 0$ o $y = 0$, la igualdad se verifica trivialmente.

(c) Supongamos que $\text{ord}_p x \leq \text{ord}_p y$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{ord}_p x \leq \text{ord}_p y &\Rightarrow -\text{ord}_p x \geq -\text{ord}_p y \Rightarrow p^{-\text{ord}_p x} \geq p^{-\text{ord}_p y} \\ &\Rightarrow \max\{p^{-\text{ord}_p x}, p^{-\text{ord}_p y}\} = p^{-\text{ord}_p x}. \end{aligned}$$

Usando la relación 3. (c),

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p &= p^{-\text{ord}_p(x+y)} \leq p^{-\min\{\text{ord}_p x, \text{ord}_p y\}} = p^{-\text{ord}_p x} \\ &= \max\{p^{-\text{ord}_p x}, p^{-\text{ord}_p y}\} = \max\left\{\|x\|_p, \|y\|_p\right\}. \end{aligned}$$

Análogo razonamiento para $\text{ord}_p y \leq \text{ord}_p x$.

43. Familia de rectas $6px - 2y + x + p^2 = 0$

Se considera el conjunto de rectas

$$6px - 2y + x + p^2 = 0, \quad p \in \mathbb{R}.$$

a) Demostrar que por cada punto del plano pasan, en general, dos rectas de dicho conjunto.

b) Encontrar el ángulo que forman las dos rectas que pasan por el punto $(1, -2)$.

c) Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano tales que las dos rectas que pasan por ellos sean coincidentes.

Solución. a) Un punto $P_0(x_0, y_0)$ del plano pertenece a la recta $6px - 2y + x + p^2 = 0$ sii se verifica

$$p^2 + 6px_0 + x_0 - 2y_0 = 0.$$

El discriminante de la ecuación de segundo grado en p es $\Delta = 36x_0^2 - 4x_0 + 8y_0$. Si $\Delta > 0$ existen dos rectas de la familia que pasan por P_0 , si $\Delta = 0$, sólo una y si $\Delta < 0$, ninguna.

b) Para $P_0(1, -2)$ obtenemos la ecuación $p^2 + 6p + 5 = 0$, que proporciona las soluciones $p = -1$, $p = -5$ que corresponden a las rectas $5x + 2y - 1 = 0$, $29x + 2y - 25 = 0$. Si α es el ángulo que forman dichas rectas,

$$\cos \alpha = \frac{\langle (5, 2), (29, 2) \rangle}{|(5, 2)| |(29, 2)|} = \frac{149}{\sqrt{29}\sqrt{745}} = \sqrt{\frac{149}{145}},$$

$$\alpha = \arccos \sqrt{\frac{149}{145}}, \quad \alpha \in [0, \pi].$$

c) Por un punto $P(x, y)$ del plano pasa una única recta de la familia de rectas dada, sii $\Delta = 36x^2 - 4x + 8y = 0$. El lugar geométrico pedido es por tanto la parábola $y = (-9/2)x^2 + (1/2)x$.

44. Principio del triángulo isósceles en normas no arquimedianas

(a) Sea N una norma en un anillo unitario R . Demostrar que $d_N(x, y) = N(x - y)$ define una distancia en R .

(b) Demostrar que si la norma N es no arquimediana, entonces para todo $x, y, z \in R$ se verifica

$$d_N(x, y) \leq \max\{d_N(x, z), d_N(z, y)\}$$

con igualdad si $d_N(x, y) \neq d_N(z, y)$.

(c) Demostrar *el principio del triángulo isósceles*: en normas no arquimedianas, todos los triángulos son isósceles.

Solución. (a) Veamos que se verifican los tres axiomas de distancia. En efecto

$$(1) \quad d_N(x, y) = 0 \Leftrightarrow N(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Demostremos ahora que $N(-1) = -1$. En efecto,

$$1 = N(1) = N[(-1)(-1)] = N(-1)N(-1) = [N(-1)]^2 \Rightarrow N(-1) = 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 (2) \quad d_N(x, y) &= N(x - y) = N[(-1)(y - x)] \\
 &= N(-1)N(y - x) = N(y - x) = d_N(y, x). \\
 (3) \quad d_N(x, y) &= N(x - y) = N[(x - z) + (z - y)] \\
 &\leq N(x - z) + N(z - y) = d_N(x, z) + d_N(z, y).
 \end{aligned}$$

(b) Si N no es arquimediana, sabemos que se verifica

$$N(x + y) \leq \max\{N(x), N(y)\}$$

para todo $x, y \in R$ con igualdad si $N(x) \neq N(y)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 d_N(x, y) &= N(x, y) = N[(x - z) + (z - y)] \\
 &\leq \max\{N(x - z), N(z - y)\} = \max\{d_N(x, z), d_N(z, y)\}.
 \end{aligned}$$

Si $d_N(x, y) \neq d_N(z, y)$ entonces $N(x - y) \neq N(z - y)$ con lo cual la desigualdad se transforma en igualdad.

(c) Sea el triángulo en R de vértices x, y, z . Si $d_N(x, y) = d_N(z, y)$ el triángulo es isósceles, y si $d_N(x, y) \neq d_N(z, y)$ entonces

$$d_N(x, y) = \max\{d_N(x, z), d_N(z, y)\},$$

con lo cual también tiene dos lados iguales.

45. Hélice circular: longitud, curvatura y torsión

Se considera la hélice circular

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t \\ z(t) = bt. \end{cases}$$

(a) Determinar su longitud, correspondiente al intervalo $[0, t_0]$ ($t_0 > 0$).

(b) Determinar su curvatura y torsión en un punto genérico.

Solución. (a) Las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son de clase 1 (más aún de clase infinito) en $\mathbb{R}$, en consecuencia la hélice circular es rectificable en todo intervalo real $[\alpha, \beta]$. Su longitud en $[0, t_0]$ es

$$L = \int_0^{t_0} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{t_0} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt$$

$$= \int_0^{t_0} \sqrt{a^2 + b^2} dt = t_0 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(b) Llamemos $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. La curvatura es

$$K = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Tenemos

$$\mathbf{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b), \quad \mathbf{r}''(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0)$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab \sin t) \mathbf{i} - (ab \cos t) \mathbf{j} + a^2 \mathbf{k}$$

$$\Rightarrow |\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{a^2 b^2 + a^4} = |a| \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$|\mathbf{r}'(t)|^3 = \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^3.$$

La curvatura es por tanto

$$K = \frac{|a| \sqrt{a^2 + b^2}}{\left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^3} = \frac{|a|}{a^2 + b^2}.$$

La torsión es

$$T = \frac{[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)]}{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t))^2}.$$

Tenemos

$$[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)] = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b,$$

$$(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t))^2 = (ab \sin t, -ab \cos t, a^2) \cdot (ab \sin t, -ab \cos t, a^2) = a^2(a^2 + b^2).$$

La torsión es por tanto

$$T = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

46. Una curva no rectificable

Se considera la curva del plano

$$\Gamma : \begin{cases} x = t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ y = \begin{cases} t \cos \frac{1}{t} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Demostrar que no es rectificable.

Sugerencia: considerar particiones de $[0, 1]$ de la forma

$$P : 0, \frac{1}{(n-1)\pi}, \frac{1}{(n-2)\pi}, \dots, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}, 1.$$

Solución. Los puntos de la poligonal que corresponden a la partición P son

$$\begin{aligned} M_0 &= (0, 0), \quad M_1 = \left(\frac{1}{(n-1)\pi}, \frac{1}{(n-1)\pi} \cos(n-1)\pi \right), \\ M_2 &= \left(\frac{1}{(n-2)\pi}, \frac{1}{(n-2)\pi} \cos(n-2)\pi \right), \\ &\quad \dots \\ M_{n-2} &= \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi} \cos 2\pi \right), \quad M_{n-1} = \left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi} \cos \pi \right), \quad M_n = (1, \cos 1). \end{aligned}$$

La suma de las distancias de los segmentos de la poligonal es

$$\begin{aligned} s(P) &= |M_0 M_1| + |M_1 M_2| + \dots + |M_{n-2} M_{n-1}| + |M_{n-1} M_n| \\ &= \left| \left(\frac{1}{(n-1)\pi}, \frac{1}{(n-1)\pi} \cos(n-1)\pi \right) \right| \\ &+ \left| \left(\frac{1}{(n-2)\pi} - \frac{1}{(n-1)\pi}, \frac{1}{(n-2)\pi} \cos(n-2)\pi - \frac{1}{(n-1)\pi} \cos(n-1)\pi \right) \right| \\ &\quad + \dots + \left| \left(1 - \frac{1}{\pi}, \cos 1 - \frac{1}{\pi} \cos \pi \right) \right|. \end{aligned}$$

Eliminando el primer y último término de la suma anterior,

$$\begin{aligned} s(P) &\geq \sum_{k=1}^{n-2} \left| \left(\frac{1}{k\pi} - \frac{1}{(k+1)\pi}, \frac{1}{k\pi} \cos k\pi - \frac{1}{(k+1)\pi} \cos(k+1)\pi \right) \right| \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{1}{k\pi} \cos k\pi - \frac{1}{(k+1)\pi} \cos(k+1)\pi \right| \end{aligned}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{(-1)^k}{k\pi} - \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\pi} \right| = \sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{(k+1)\pi} \right| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k+1}.$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(P) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty,$$

lo cual implica que Γ no es rectificable.

47. Función entera que es polinómica

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera tal que existen $\alpha > 0$, $K > 0$ cumpliendo

$$|f(z)| \leq K(1 + |z|)^\alpha, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demostrar que $f(z)$ es un polinomio de grado a lo sumo α .

Solución. Como f es entera, se puede escribir en la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Usando la fórmula integral de Cauchy,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Tomando módulos,

$$0 \leq |a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{K(1+R)^\alpha}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{K(1+R)^\alpha}{R^n}.$$

Si $n > \alpha$ y tomando límites cuando $R \rightarrow +\infty$

$$0 \leq |a_n| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{K(1+R)^\alpha}{R^n} = 0,$$

es decir $a_n = 0$. Es decir $f(z) = \sum_{n=0}^d a_n z^n$ es función polinómica, siendo $d = \lfloor \alpha \rfloor$ (parte entera de α).

48. Dos parametrizaciones de la elipse

Se considera la elipse

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}, \quad (a > 0, b > 0).$$

(a) Demostrar que

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi)\},$$

lo cual proporciona una parametrización trigonométrica de la elipse.

(b) Demostrar que

$$E \setminus \{(-a, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = b \frac{2t}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}\},$$

lo cual proporciona una parametrización racional de la elipse salvo un punto.

Solución. (a) Todo punto de la forma $(x, y) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$ pertenece a E . En efecto,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \theta}{b^2} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Recíprocamente, si $(x, y) \in E$, entonces $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y por tanto existe un $\theta \in [-\pi, \pi)$ tal que $x/a = \cos \theta$ e $y/b = \sin \theta$.

(b) Todo punto de la forma

$$(x, y) = \left(a \frac{1-t^2}{1+t^2}, b \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

pertenece a $E \setminus \{(-a, 0)\}$. En efecto, por una parte

$$\frac{\left(a \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2}{a^2} + \frac{\left(b \frac{2t}{1+t^2} \right)^2}{b^2} = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1,$$

y por otra parte

$$a \frac{1-t^2}{1+t^2} = -a \Rightarrow 1-t^2 = -1-t^2 \Rightarrow 1 = -1,$$

lo cual es absurdo. Sea ahora $(x, y) \in E - \{(-a, 0)\}$. Entonces, $(x, y) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$ con $\theta \in (-\pi, \pi)$. Denotemos $t = \tan(\theta/2)$, que está definido pues $\theta/2 \in (-\pi/2, \pi/2)$. Entonces, usando la fórmula de la tangente del ángulo mitad

$$\begin{aligned} t = \tan \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \Rightarrow t^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \Rightarrow \sin \theta &= \sqrt{1 - \frac{(1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^2}} = \frac{2t}{1 + t^2} \Rightarrow (x, y) = \left(a \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, b \frac{2t}{1 + t^2} \right). \end{aligned}$$

49. Dos parametrizaciones de la hipérbola

Se considera la hipérbola

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}, \quad (a > 0, b > 0).$$

(a) Demostrar que

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{a}{\cos \theta}, y = b \tan \theta, \quad \cos \theta \neq 0\},$$

lo cual proporciona una parametrización trigonométrica de la elipse.

(b) Demostrar que

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{2}a \left(t + \frac{1}{t}\right), y = \frac{1}{2}b \left(1 - \frac{1}{t}\right), t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\},$$

lo cual proporciona una parametrización racional de la hipérbola.

Solución. (a) Todo punto de la forma $(x, y) = (a/\cos \theta, b \tan \theta)$ con $\cos \theta \neq 0$ pertenece a H . En efecto,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2 \cos^2 \theta} - \frac{b^2 \tan^2 \theta}{b^2} = \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1.$$

Recíprocamente, si $(x, y) \in H$, entonces al no anularse x , y multiplicando por a/x^2 la igualdad $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ obtenemos

$$1 - \frac{a^2 y^2}{b^2 x^2} = \frac{a^2}{x^2}, \text{ o bien } \left(\frac{ay}{bx}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2 = 1.$$

Por tanto, existe un θ tal que $a/x = \cos \theta$ $(ay)/(bx) = \sin \theta$, es decir tal que

$$x = \frac{a}{\cos \theta}, \quad y = \frac{b}{a} \frac{a \sin \theta}{\cos \theta} = b \tan \theta.$$

(b) Todo punto de la forma

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}a \left(t + \frac{1}{t}\right), \frac{1}{2}b \left(1 - \frac{1}{t}\right)\right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

pertenece a H . En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{2}a \left(t + \frac{1}{t}\right)\right]^2 - \frac{1}{b^2} \left[\frac{1}{2}b \left(1 - \frac{1}{t}\right)\right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{4} \left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $(x, y) \in H$ entonces

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1,$$

por tanto, existe un número real t no nulo tal que

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{t}$$

de lo cual se deduce

$$x = \frac{1}{2}a \left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{1}{2}b \left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

50. Factor integrante de la forma $\mu = \mu(xy^2)$

(a) Demostrar que la ecuación diferencial

$$x dy + y dx + (3x^3 y^4) dy = 0 \quad (E)$$

tiene un factor integrante de la forma $\mu = \mu(xy^2)$ y calcularlo.

(b) Verificar que la ecuación obtenida al multiplicar la ecuación (E) por μ , es una ecuación diferencial exacta.

(c) Resolver la ecuación (E).

Solución. a) Podemos escribir la ecuación diferencial en la forma $Pdx + Qdy = 0$, siendo

$$P(x, y) = y, \quad Q(x, y) = x + 3x^3 y^4.$$

Llamando $z = xy^2$ y multiplicando por $\mu(z)$, obtenemos $\mu(z)Pdx + \mu(z)Qdy = 0$. Obliguemos a que esta ecuación sea diferencial exacta:

$$(\mu(z)P)_y = \mu'(z)2xy \cdot y + \mu(z) \cdot 1,$$

$$(\mu(z)Q)_x = \mu'(z)y^2 \cdot (x + 3x^3 y^4) + \mu(z)(1 + 9x^2 y^4).$$

$$(\mu(z)P)_y = (\mu(z)Q)_x \Leftrightarrow \mu'(z) (2xy^2 - y^2x - 3x^3 y^6) = \mu(z) (9x^2 y^4).$$

Queda por tanto

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{9x^2 y^4}{xy^2 - 3x^3 y^6} = \frac{9xy^2}{1 - 3x^2 y^4} = \frac{9z}{1 - 3z^2},$$

$$\log |\mu(z)| = -\frac{3}{2} \log |1 - 3z^2|, \quad \mu(z) = e^{-\log(1-3z^2)^{3/2}},$$

$$\mu(z) = \frac{1}{(1 - 3x^2y^4)^{3/2}}.$$

(b) Multiplicando la ecuación diferencial dada por el factor integrante hallado, queda en la forma

$$\underbrace{(1 - 3x^2y^4)^{3/2}y}_{M} dx + \underbrace{(x + 3x^3y^4)(1 - 3x^2y^4)^{3/2}}_N dy = 0.$$

Veamos que es diferencial exacta. En efecto (b) Multiplicando la ecuación diferencial dada por el factor integrante hallado, queda en la forma

$$\underbrace{\frac{y}{(1 - 3x^2y^4)^{3/2}}}_{M} dx + \underbrace{\frac{x + 3x^3y^4}{(1 - 3x^2y^4)^{3/2}}}_{N} dy = 0.$$

Veamos que es diferencial exacta. En efecto

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{1 \cdot (1 - 3x^2y^4)^{3/2} - (3/2)(1 - 3x^2y^4)^{1/2}(-12x^2y^3)y}{(1 - 3x^2y^4)^3} \\ &= \frac{(1 - 3x^2y^4)^{1/2} [1 - 3x^2y^4 + 18x^2y^4]}{(1 - 3x^2y^4)^3} = \frac{1 + 15x^2y^4}{(1 - 3x^2y^4)^{5/2}}. \\ N_x &= \frac{(1 + 9x^2y^4)(1 - 3x^2y^4)^{3/2} - (3/2)(1 - 3x^2y^4)^{1/2}(-6xy^4)(x + 3x^3y^4)}{(1 - 3x^2y^4)^3} \\ &= \frac{(1 - 3x^2y^4)^{1/2} [(1 + 9x^2y^4)(1 - 3x^2y^4) + 9xy^4(x + 3x^3y^4)]}{(1 - 3x^2y^4)^3} \\ &= \frac{1 - 3x^2y^4 + 9x^2y^4 - 27x^4y^8 + 9x^2y^4 + 27x^4y^8}{(1 - 3x^2y^4)^{5/2}} = \frac{1 + 15x^2y^4}{(1 - 3x^2y^4)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Se verifica $M_y = N_x$, por tanto $Mdx + Ndy = 0$ es diferencial exacta.

c) Encontremos una función $u = u(x, y)$ tal que $u_x = M$ y $u_y = N$, con lo cual la solución general de la ecuación (E) será $u(x, y) = C$ con C constante. Tenemos

$$u_x = M, \quad u = \int M dx = \int \frac{y}{(1 - 3x^2y^4)^{3/2}} dx = \frac{xy}{\sqrt{1 - 3x^2y^4}} + \varphi(y).$$

Derivando u respecto de y

$$u_y = x \frac{1 \cdot \sqrt{1 - 3x^2y^4} - \frac{1}{2\sqrt{1 - 3x^2y^4}} \cdot (-12x^2y^3)y}{1 - 3x^2y^4} + \varphi'(y)$$

$$= x \frac{1 - 3x^2y^4 + 6x^2y^4}{(1 - 3x^2y^4)^{3/2}} + \varphi'(y) = \frac{x + 3x^3y^4}{(1 - 3x^2y^4)^{3/2}} + \varphi'(y) = N + \varphi'(y).$$

Entonces, $u_y = N$ implica que $\varphi'(y) = 0$, es decir $\varphi(y) = C$. La solución general de (E) en forma implícita es por tanto

$$\frac{xy}{\sqrt{1 - 3x^2y^4}} + C = 0.$$

Fascículo 3

Monografías 51-75

51. La rosa de cuatro pétalos es un conjunto algebraico

La rosa de cuatro pétalos $P \subset \mathbb{R}^2$ se define mediante la ecuación polar $\rho = \sin 2\theta$. Usar coordenadas polares para demostrar que

$$P = V((x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2),$$

lo cual probará que P es un conjunto algebraico.

Solución. Sea $(x, y) \in P$ con $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Entonces,

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 &= \rho^6 - 4\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \rho^6 - \rho^4(2 \cos \theta \sin \theta)^2 \\ &= \rho^6 - \rho^4(\sin 2\theta)^2 = \rho^6 - \rho^4 \rho^2 = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, $P \subset V((x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2)$. Sea ahora (x, y) un punto que satisfice $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$ y sean (ρ, θ) las coordenadas polares del punto. Tenemos que demostrar que $(x, y) \in P$. Sustituyendo $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$,

$$\rho^6 - 4\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = 0. \quad (1)$$

Claramente, $(0, 0) \in P$ por tanto podemos suponer en (1) que $\rho \neq 0$ con lo cual (1) se reduce a $\rho^2 = \sin^2 2\theta$. Esto implica que $\rho = \sin 2\theta$ en cuyo caso $(x, y) \in P$ o bien que $\rho = -\sin 2\theta$. Ahora bien, en este último caso podemos escribir $\rho = \sin[2(-\theta)]$. Pero la reflexión $(\rho, \theta) \rightarrow (\rho, -\theta)$ envía (x, y) a un punto de la rosa de cuatro pétalos y esta se transforma en sí misma por esta reflexión, en consecuencia también en este caso $(x, y) \in P$. Concluimos pues que la rosa de cuatro pétalos es un conjunto algebraico.

52. Imágenes inversas de conjuntos compactos

Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ continua.

- (a) Demostrar que si X es compacto e Y es de Hausdorff entonces, las imágenes inversas de conjuntos compactos son conjuntos compactos.
- (b) Demostrar que la propiedad del apartado anterior no es cierta en general si se suprime la condición de ser Y de Hausdorff.

Solución. (a) Sea $K \subset Y$ compacto. Al ser Y Hausdorff, K es cerrado y por ser f continua, $f^{-1}(K)$ es cerrado. Pero todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto, i.e. $f^{-1}(K) \subset X$ es compacto.

(b) Consideremos $X = Y = [0, 1]$, X con la topología usual, Y con la topología

$$T = \{\emptyset, Y, (1/2, 1]\},$$

y la aplicación $f = id : X \rightarrow Y$. Como X es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, es compacto. El espacio Y no es Hausdorff pues por ejemplo, 0 y 1 no tienen entornos disjuntos. Las imágenes inversas por id de los elementos de T son respectivamente $\emptyset, Y, (1/2, 1]$ que son abiertos en X , en consecuencia id es continua. El conjunto $K = (1/2, 1]$ es claramente compacto en Y pues todo recubrimiento por abiertos de K es finito.

Por último, $id^{-1}(K) = (-1/2, 1]$ no es compacto en X pues no es cerrado con la topología usual.

53. Derivabilidad de una función compleja como suma de dos series

Se considera la función compleja de variable compleja definida en forma de suma de series:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

- (a) Determinar su dominio Ω de definición.
- (b) Estudiar la derivabilidad de f en Ω .
- (c) Justificar que se puede escribir $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$ en el disco $D(2, 1)$ y determinar los coeficientes a_n .

Solución. (a) Usando el teorema relativo a la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n \underbrace{=}_{|z/3| < 1} = \frac{1}{1 - z/3} = \frac{3}{3 - z} \quad (|z| < 3),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \underbrace{=}_{|1/z| < 1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - 1/z} = \frac{1}{z-1} \quad (1 < |z|).$$

El dominio de definición es por tanto la corona abierta $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$.

(b) La función f es

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{3}{3-z} + \frac{1}{z-1} = \frac{2z}{(3-z)(z-1)}$$

es decir, es racional y no se anula en Ω , en consecuencia es derivable en su dominio.

(c) Efectuando el cambio $u = z - 2$ obtenemos

$$f(z) = \frac{3}{1-u} + \frac{1}{1+u} \underbrace{=}_{|u| < 1} 3 \sum_{n=0}^{+\infty} u^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n \underbrace{=}_{|z-2| < 1} \sum_{n=0}^{+\infty} [3 + (-1)^n] (z-2)^n.$$

54. Existencia de ceros en el disco unidad

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto que contiene a $\overline{D}$ siendo D el disco unidad. Sea $f \in H(\Omega)$ tal que $|f(z)| > 2$ para todo $|z| = 1$ y $f(0) = 1$. Demostrar que f tiene algún cero en D ,

(a) Usando el teorema del módulo máximo.

(b) Usando el teorema del valor medio de Gauss.

Solución. (a) Si $f(z)$ no tiene ceros en D , la función $g(z) = 1/f(z)$ es holomorfa en D . Al ser holomorfa en $\Omega \supset \partial(D)$, es continua en $\partial(D)$, con $f(z) \neq 0$ en $\partial(D)$, luego $g(z) = 1/f(z)$ es continua en $\partial(D)$.

Se verifican por tanto las hipótesis del principio del módulo máximo para g en $\overline{D}$, lo cual implica que el máximo de $|g(z)| = |1/f(z)|$ se alcanza en $\partial(D)$. Pero esto es absurdo pues

$$|g(0)| = 1 > \frac{1}{2} = |g(z)| \quad \forall z \in \partial(D).$$

Concluimos que f ha de tener ceros en el disco unidad.

(b) Si f no tiene ceros en el disco unidad, $g(z) = 1/f(z)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio de Gauss en $\gamma \equiv |z| = 1$, por tanto

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) dt.$$

Tomando módulos

$$1 = |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} g(e^{it}) dt \right| \underbrace{\leq}_{|g(e^{it})| < 1/2} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{1}{2},$$

lo cual es absurdo.

55. Unidades en el anillo de las series formales $A[[X]]$

Sea A un anillo conmutativo y unitario y $A[[X]]$ el anillo de las series formales $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ con coeficientes $a_n \in A$. Demostrar que

$$S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \text{ es unidad en } A[[X]] \Leftrightarrow a_0 \text{ es unidad en } A.$$

Solución. $\Rightarrow$) Si $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ es una unidad de $A[[X]]$, entonces existe $T(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ tal que

$$S(X) \cdot T(X) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) X^n = 1 + \sum_{n \geq 1} 0 X^n$$

lo cual implica que $a_0 b_0 = 1$, luego a_0 es unidad en A .

$\Leftarrow$) Sea $S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in A[[X]]$ una serie formal tal que a_0 es unidad en A . Construyamos otra serie formal $T(X) = \sum_{n \geq 0} b_n X^n \in A[[X]]$ tal que $S(X) \cdot T(X) = 1$, es decir tal que

$$a_0 b_0 = 1, \text{ y } c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = 0 \text{ si } n \geq 1. \quad (*)$$

Como a_0 es unidad, $b_0 = a_0^{-1}$. Supongamos ahora que hemos elegido convenientemente los coeficientes b_n para $0 \leq n \leq m$. Entonces, c_{m+1} ha de verificar

$$0 = c_{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} a_{m+1-k} b_k = a_0 b_{m+1} + \sum_{k=0}^m a_{m+1-k} b_k.$$

Pero dado que a_0 es unidad basta elegir $b_{m+1} = -a_0^{-1} \sum_{k=0}^m a_{m+1-k} b_k$. Queda pues construida $T(X)$ tal que $S(X) \cdot T(X) = 1$.

56. Producto de Cauchy de series igual a la unidad

Usando el producto de Cauchy de series, demostrar que

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = 1.$$

Dar una obvia interpretación de la igualdad anterior.

Solución. Aplicando el criterio de D'Alembert a ambas series para $x \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| : \left| \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right| : \left| \frac{n!}{(-x)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1,$$

lo cual implica que ambas series son absolutamente convergentes en $\mathbb{R}$ (para $x = 0$ la convergencia absoluta es trivial). Aplicando el teorema del producto de Cauchy de series,

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(-x)^k}{k!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (-x)^k \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (x + (-x))^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0x^n = 1. \end{aligned}$$

Una obvia interpretación de la igualdad demostrada es que $e^x e^{-x} = e^0 = 1$, dado que según sabemos,

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

57. El anillo de las funciones continuas no es noetheriano

Sea $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ el anillo conmutativo y unitario de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales suma y producto.

- (a) Demostrar que para todo entero $n \geq 0$, $I_n = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ si } x \geq n\}$ es un ideal de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
- (b) Demostrar que la sucesión de ideales $\{I_n\}$ no cumple la condición de cadena ascendente. Concluir.

Solución. (a) La función nula $\mathbf{0} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ satisface $\mathbf{0}(x) = 0$ para todo $x \geq n$ en consecuencia, $\mathbf{0} \in I_n$ para todo $n \geq 0$. Para todo $x \geq n$,

$$f, g \in I_n \Rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow f - g \in I_n,$$

$$h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), f \in I_n \Rightarrow (hf)(x) = h(x)f(x) = h(x)0 = 0 \Rightarrow hf \in I_n.$$

Concluimos que I_n es ideal de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

- (b) Veamos que se verifica

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \dots$$

En efecto, si $x \in I_n$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \geq n$ y por tanto $f(x) = 0$ para todo $x \geq n + 1$ i.e. $x \in I_{n+1}$. No se cumple la condición de cadena ascendente pues la función continua

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \frac{x}{n+1} & \text{si } x < n+1 \\ 0 & \text{si } x \geq n+1 \end{cases}$$

pertenece a I_{n+1} , sin embargo $f(n) = (-1)/(n+1) \neq 0$, luego $f \notin I_n$. La cadena $\{I_n\}$ no se puede estabilizar. Concluimos que $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ no es noetheriano.

58. $X = \{(t, t) : t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}$ no es cerrado con la topología de Zariski

Demostrar que $X = \{(t, t) : t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}$ no es cerrado en $\mathbb{R}^2$ con la topología de Zariski.

Solución. Los conjuntos cerrados con la topología de Zariski son exactamente los conjuntos algebraicos. Veamos que X no es algebraico en $\mathbb{R}^2$. En efecto, si lo fuera existirían polinomios $f_1, \dots, f_m$ de $\mathbb{R}[x, y]$ tales que $X = V(f_1, \dots, f_m)$. Cualquier polinomio $f \in \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ anula a todo punto de X , por tanto el polinomio $g(t) := f(t, t)$ anula a todo $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ahora bien, como $\mathbb{R}$ es cuerpo infinito, g es el polinomio nulo. En particular, todo $f \in \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ satisface $f(1, 1) = 0$, es decir $(1, 1) \in V(f_1, \dots, f_m)$. Pero $(1, 1) \notin X$ (contradicción).

59. Ecuación $f'(\lambda x) = f'(x) \sin x + f(x) \cos x$

Determinar todas las funciones derivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f'(\lambda x) = f'(x) \sin x + f(x) \cos x \quad \forall \lambda > 0.$$

Solución. Sea f una función que satisface la igualdad dada. Veamos condiciones necesarias que ha de cumplir f . Sea x, y reales positivos. Para $\lambda = 1$ obtenemos $f'(x) = f'(x) \cos x + f(x) \sin x$. Existe $\mu > 0$ tal que $y = \mu x$, por tanto

$$f'(y) = f'(\mu x) = f'(x) \cos x + f(x) \sin x = f'(x).$$

Es decir, f es constante en $(0, +\infty)$ y por tanto $f(x) = ax + C_1$ en $(0, +\infty)$. El mismo razonamiento lo podemos hacer para x, y reales negativos, por tanto $f(x) = b + C_2$ en $(-\infty, 0)$. Al ser f continua en 0,

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow f(0) = C_1 = C_2.$$

Al ser f derivable en 0,

$$\begin{cases} f'(0+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{ah + C_1 - C_1}{h} = a \\ f'(0-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{bh + C_2 - C_2}{h} = b \end{cases} \Rightarrow a = b.$$

En consecuencia, si una función f cumple la igualdad dada, ha de ser necesariamente de la forma $f(x) = ax + C_1$. Sustituyendo en tal igualdad,

$$a = a \sin x + (ax + C_1) \cos x.$$

Dando a x los valores 0 y π ,

$$\begin{cases} a = C_1 \\ a = -\pi a - C_1, \end{cases}$$

lo cual implica que $a = C_1 = 0$, luego la única posible solución de la ecuación dada es la función nula, que evidentemente es solución.

60. Lema de Gauss

Solución. Por reducción al absurdo, sea $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, se trata de demostrar que

$$P(x) \text{ es reducible en } \mathbb{Q}[x] \Rightarrow P(x) \text{ es reducible en } \mathbb{Z}[x].$$

Si P es reducible en $\mathbb{Q}[x]$ entonces, $P = P_1 P_2$ con $P_1, P_2 \in \mathbb{Q}[x]$, $\text{grad } P_1 > 1$ y $\text{grad } P_2 > 1$. Podemos multiplicar por un n natural tal que

$$nP = (b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_0) (c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_0) \quad (*)$$

con $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$. Sea n el menor natural tal que nP se puede descomponer en $\mathbb{Z}[x]$. Si $n = 1$ ya estaría demostrado. Sea $n > 1$ y p divisor primo de n , entonces no todos los b_i ni todos los c_i son divisibles por p (pues n es mínimo).

Sean b_i, c_j tales que

$$p \mid b_0, p \mid b_1, \dots, p \nmid b_i, \dots$$

$$p \mid c_0, p \mid c_1, \dots, p \nmid c_j, \dots$$

(pudiera ocurrir $i = 0, j = 0$). Sea $P(x) = \sum a_k x^k$. Igualando en (*) los coeficientes de grado $i + j$,

$$na_{i+j} = b_{i+j}c_0 + b_{i+j-1}c_1 + \dots + b_i c_j + \dots + b_0 c_{i+j}$$

$$\Rightarrow p \mid b_i c_j \underbrace{\Rightarrow}_{p \text{ primo}} p \mid b_i \vee p \mid c_j$$

lo cual es una contradicción. Por tanto ha de ser $n = 1$, lo cual prueba el Lema de Gauss.

61. Criterio de Eisenstein

(a) Demostrar el *criterio de Eisenstein*:

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Supongamos que existe p primo tal que

- (i) $p \nmid a_n, p \mid a_{n-1}, \dots, p \mid a_0$.
- (ii) $p^2 \nmid a_0$.

Entonces, $P(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ (como consecuencia también lo es en $\mathbb{Z}[x]$).

(b) Demostrar que los polinomios $P(x) = x^5 - 2x + 6$ y $Q(x) = x^7 - 12$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$.

Solución. (a) Por contradicción, si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ es reducible en $\mathbb{Q}[x]$, por el lema de Gauss también es reducible en $\mathbb{Z}[x]$:

$$P(x) = (b_l x^l + a_{l-1} x^{l-1} + \cdots + b_0) (c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_0)$$

con $l + m = n$, $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$. Igualando coeficientes del mismo grado:

$$a_0 = b_0 c_0, a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1, a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2, \dots \quad (1)$$

Por hipótesis $p \mid a_0 = b_0 c_0$ y $p^2 \nmid a_0 = b_0 c_0$, por tanto $p \mid b_0$ o $p \mid c_0$ pero no a ambos. Supongamos que $p \mid b_0$ y $p \nmid c_0$. Entonces,

$$a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{p \mid a_1 \text{ por hip.}} \quad p a'_1 = b_1 c_0 + p b'_0 c_1$$

$$\Rightarrow b_1 c_0 = p (a'_1 - b'_0 c_1) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{p \nmid c_0} p \mid b_1.$$

De la igualdad $a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2$ deducimos de manera análoga que $p \mid b_2$ y de las restantes igualdades (1), que $p \mid b_3, \dots, p \mid b_n$. Esto implica que p divide a todos los a_i , que es una contradicción pues p no divide a a_n .

(b) Para el polinomio $P(x)$ elijamos $p = 2$. Entonces,

$$(2 \nmid 1, 2 \mid 0, 2 \mid 0, 2 \mid 0, 2 \mid -2, 2 \mid 6) \wedge (2^2 \nmid 6)$$

por tanto, y de acuerdo con el criterio de Eisenstein, $P(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$. Para el polinomio $Q(x)$ elijamos $p = 3$. Entonces,

$$(3 \nmid 1, 3 \mid 0, 3 \mid 0, 3 \mid 0, 3 \mid 0, 3 \mid 0, 3 \mid 0, 3 \mid -12) \wedge (3^2 \nmid -12)$$

con lo cual también $Q(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$.

62. Todo grupo de orden 4 es abeliano

Demostrar que todo grupo de orden 4 es abeliano.

Solución. Sea G un grupo de orden 4. Si G es cíclico, ya está demostrado pues sabemos que todo grupo cíclico es abeliano. Supongamos que G no es cíclico y que $a \in G$. Como el orden de todo elemento en un grupo finito es divisor del orden del grupo, o bien a es de orden 1 en cuyo caso $a = e$, o bien es de orden 2, en cuyo caso $a^2 = e$. Por tanto, en cualquier caso $a^2 = e$ para todo $a \in G$.

Sean ahora $a, b \in G$. Se verifica $(ab)(ab) = e$. Multiplicando por ba a la derecha:

$$\begin{aligned} abab = e &\Rightarrow ababba = ba \Rightarrow abaea = ba \\ &\Rightarrow abaa = ba \Rightarrow abe = ba \Rightarrow ab = ba, \end{aligned}$$

es decir, G es abeliano.

63. Wronskiano

Sea I un intervalo de la recta real y $f_1, \dots, f_n$ funciones derivables hasta orden $n - 1$ en I . Se define el *wronskiano* de dichas funciones como

$$W(f_1, \dots, f_n)(x) := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \quad x \in I.$$

- (a) Demostrar que si el wronkiano es distinto de cero en algún punto de I , entonces las funciones $f_1, \dots, f_n$ son linealmente independientes en I .
- (b) Aplicación: demostrar que las funciones $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = x^3$, $f_3(x) = 1$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.
- (c) Demostrar que el recíproco del resultado del apartado (a) no es cierto. Para ello considérense las funciones en $I = \mathbb{R}$ dadas por $g_1(x) = x^3$, $g_2(x) = |x|^3$.

Solución. (a) Sea $x_0 \in I$ tal que $W(f_1, \dots, f_n)(x_0) \neq 0$. Veamos que las funciones $f_1, \dots, f_n$ son linealmente independientes en I . En efecto,

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2' + \cdots + \lambda_n f_n' &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 f_1'' + \lambda_2 f_2'' + \cdots + \lambda_n f_n'' &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ \Rightarrow \lambda_1 f_1^{(n-1)} + \lambda_2 f_2^{(n-1)} + \dots + \lambda_n f_n^{(n-1)} &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo $x = x_0$ obtenemos el sistema lineal homogéneo

$$\begin{bmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \cdots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El determinante de la matriz del sistema es $W(f_1, \dots, f_n)(x_0) \neq 0$, lo cual implica que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, es decir $f_1, \dots, f_n$ son linealmente independientes en I .

(b) El wronskiano es

$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} \sin x & x^3 & 1 \\ \cos x & 3x^2 & 0 \\ -\sin x & 6x & 0 \end{vmatrix} = 3x(2 \cos x + x \sin x).$$

Tenemos $W(f_1, f_2)(\pi/2) = (3\pi/2) \cdot (\pi/2) \neq 0$, por tanto f_1, f_2, f_3 son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

(c) Veamos que $g_1(x) = x^3$, $g_2(x) = |x|^3$ son linealmente independientes en $I = \mathbb{R}$. Efectivamente, si $\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) = 0$ y dando a x los valores 1 y -1 obtenemos $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ y $-\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, lo cual implica que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Sin embargo, el wronskiano se anula en todo x real pues

$$x \geq 0 \Rightarrow W(g_1, g_2)(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^5 - 3x^5 = 0.$$

$$x < 0 \Rightarrow W(g_1, g_2)(x) = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = -3x^5 + 3x^5 = 0.$$

64. Iteraciones de Picard

(a) Verificar que se verifican las hipótesis del teorema de Picard para el problema de valor inicial

$$y' = 2x(1 - y), \quad y(0) = 2. \quad (1)$$

(b) Resolver el problema (1) usando iteraciones de Picard.

(c) Verificar que la solución hallada es válida en $I = (-\infty, +\infty)$.

Solución. (a) Recordamos el teorema de Picard:

Sea $f(x, y)$ una función definida en el rectángulo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}, \quad (a > 0, b > 0).$$

Supongamos que (i) f es continua en R (por tanto acotada en el compacto R , es decir existe $K > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq K$ para todo $(x, y) \in R$). (ii) f es Lipschitziana en R , i.e. existe $L > 0$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_i) \in R.$$

Entonces, existe una única solución $y = y(x)$ del problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Veamos ahora que se verifican las hipótesis del teorema de Picard para el sistema de valor inicial dado. La función $f(x, y) = 2x(1 - y)$ es elemental y está definida en todo $\mathbb{R}^2$, luego es continua en $\mathbb{R}^2$ y por ende en todo rectángulo del tipo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq a, |y - 2| \leq b\}, \quad (a > 0, b > 0).$$

Por otra parte, para todo $(x, y_1), (x, y_2)$ puntos de R :

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= |2x(1 - y_1) - 2x(1 - y_2)| = 2|x||y_2 - y_1| \\ &\leq 2a(|y_2 - 2| + |2 - y_1|) \leq 2a(|y_2 - 2| + |2 - y_1|) = 4ab = L, \end{aligned}$$

es decir f es Lipschitziana en R . Concluimos que existe una única solución $y = y(x)$ del problema de valor inicial dado.

(b) Recordamos que las iteraciones de Picard $y_n(x)$ asociados al problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ son

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt.$$

Tenemos que $y_0(x) = 2$, por tanto

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 2 + \int_0^x f(t, 2) dt = 2 + \int_0^x 2t(1 - 2) dt = 2 - x^2, \\ y_2(x) &= 2 + \int_0^x f(t, 2 - t^2) dt = 2 + \int_0^x 2t(t^2 - 1) dt = 2 - x^2 + \frac{x^4}{2}, \\ y_3(x) &= 2 + \int_0^x f(t, 2 - t^2 + t^4/2) dt = 2 + \int_0^x 2t(t^2 - t^4/2 - 1) dt \\ &= 2 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_4(x) &= 2 + \int_0^x f(t, 2 - t^2 + t^4/2 - t^6/3!) dt \\
&= 2 + \int_0^x 2t(t^2 - t^4/2 + t^6/3! - 1) dt = 2 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}.
\end{aligned}$$

Las iteraciones anteriores sugieren la fórmula general

$$y_n(x) = 2 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Efectivamente, la fórmula es cierta para $n = 1, 2, 3, 4$ y si es cierta para n , entonces

$$\begin{aligned}
y_{n+1}(x) &= 2 + \int_0^x f(t, y_n(t)) dt \\
&= 2 + \int_0^x 2t \left(-1 + t^2 - \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!} - \frac{t^8}{4!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n}}{n!} \right) dt \\
&= 2 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

luego la fórmula es cierta para $n + 1$. La solución del problema del valor inicial es según sabemos el límite de las iteraciones de Picard. Es decir,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(x) = 2 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots \\
&= 1 + \left(1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^4}{4!} + \cdots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \cdots \right) \\
&= 1 + e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

(c) Si $y(x) = 1 + e^{-x^2}$, se verifica $y(0) = 2$. Por otra parte, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$y'(x) = -2xe^{-x^2} = 2x(-e^{-x^2}) = 2x(1 - y(x)),$$

lo cual implica que la solución es válida en $I = (-\infty, +\infty)$.

65. Afijos formando un triángulo rectángulo isósceles

Dada la ecuación $z^2 - 8iz - 19 + 4i = 0$ cuyas raíces son z_1 y z_2 , hallar los complejos z_3 tales que los afijos z_1 , z_2 , y z_3 formen un triángulo rectángulo isósceles. Considérese el vértice correspondiente al ángulo recto como el afijo de la raíz de mayor componente imaginaria.

Solución. Resolvamos la ecuación dada.

$$z = \frac{8i \pm \sqrt{(8i)^2 - 4(-19 + 4i)}}{2} = \frac{8i \pm \sqrt{12 - 16i}}{2} = 4i \pm \sqrt{3 - 4i}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \sqrt{3 - 4i} = x + iy &\Leftrightarrow 3 - 4i = (x + iy)^2 \Leftrightarrow 3 - 4i = x^2 - y^2 + 2xyi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4. \end{cases} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que x, y son reales y resolviendo el sistema anterior obtenemos $(x, y) = (2, -1)$ y $(x, y) = (-2, 1)$ y por tanto las raíces cuadradas de $3 - 4i$ son $2 - i$ y $2 + i$. Las raíces de la ecuación son por tanto

$$z_1 = 4i + (2 - i) = 2 + 3i,$$

$$z_2 = 4i + (-2 + i) = -2 + 5i.$$

El afijo de z_2 es el vértice del ángulo recto, por tanto obtenemos un triángulo rectángulo isósceles girando z_1 ángulos de $\pi/2$ o $-\pi/2$ alrededor de z_2 , es decir

$$z_3 = z_2 + (z_1 - z_2)e^{\pi i/2} = -2 + 5i + (4 - 2i)i = 9i,$$

$$z_3 = z_2 + (z_1 - z_2)e^{-\pi i/2} = -2 + 5i + (4 - 2i)(-i) = -4 + i.$$

66. La función de Thomae es integrable Riemann en $[0, 1]$

Se define la *función de Thomae* como la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{si } x \text{ es racional, } x = \frac{p}{q}, q > 0 \text{ y } \text{mcd}(p, q) = 1 \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Demostrar que es integrable Riemann en $[0, 1]$.

Solución. Veamos que la integral inferior $\int_{[0,1]} f(x) dx$ es nula. En efecto, para todo $x \in [0, 1]$ se verifica $f(x) \geq 0$ y para todo $[a, b] \subset [0, 1]$ existe $x \in [a, b]$ tal que $x \notin \mathbb{Q}$, luego para todo $[a, b] \subset [0, 1]$ es

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} = 0.$$

Esto implica que para toda partición P de $[0, 1]$ se verifica $I(P, f) = 0$ y por tanto

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = \sup\{I(P, f) : P \in \mathcal{P}[0, 1]\} = 0.$$

Veamos que la integral superior $\overline{\int_{[0,1]} f(x) dx}$ es nula. Para demostrarlo, consideremos para todo n entero positivo la función $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{si } x \text{ es racional, } x = \frac{p}{q}, q > 0, \text{ mcd}(p, q) = 1, q < n \\ \frac{1}{n} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La función f_n es integrable Riemann en $[0, 1]$ porque es continua salvo en un número finito de puntos. Para todo x irracional del intervalo $[0, 1]$ se verifica $f_n(x) = 1/n$, luego $I(P, f_n) = 1/n$ para toda partición P de $[0, 1]$ y en consecuencia

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = 1/n = \overline{\int_{[0,1]} f(x) dx}.$$

Además, para todo $x \in [0, 1]$ y para todo n , $f_n(x) \geq f(x)$, con lo cual $S(P, f_n) \geq S(P, f)$ para toda partición P de $[0, 1]$. Se deduce para todo n que

$$\begin{aligned} \overline{\int_{[0,1]} f_n(x) dx} &= \inf\{S(P, f_n) : P \in \mathcal{P}[0, 1]\} \\ &\geq \inf\{S(P, f) : P \in \mathcal{P}[0, 1]\} = \overline{\int_{[0,1]} f(x) dx}. \end{aligned}$$

Es decir, para todo n ,

$$0 \leq \overline{\int_{[0,1]} f(x) dx} \leq \frac{1}{n},$$

y tomando límites cuando $n \rightarrow +\infty$ queda $\overline{\int_{[0,1]} f(x) dx} = 0$. Concluimos pues que la función f de Thomae es integrable Riemann en $[0, 1]$ y que $\int_{[0,1]} f(x) dx = 0$.

67. Ideal generado por un subconjunto de un anillo

Sea R un anillo conmutativo y unitario y S un subconjunto de R . Se define

$$\langle S \rangle := \left\{ \sum r_i s_i \text{ (suma finita)} : r_i \in R, s_i \in S \right\}.$$

- (a) Demostrar que $\langle S \rangle$ es ideal de R .
 (b) Demostrar que $\langle S \rangle$ es el menor de todos los ideales de R que contienen a S . Al ideal $\langle S \rangle$ se le llama *ideal generado por S* .

Solución. (a) Tenemos $0 = 0s$ para cualquier $s \in S$, luego $0 \in \langle S \rangle$. Si $x = \sum r_i s_i \in \langle S \rangle$ e $y = \sum r'_j s'_j \in \langle S \rangle$ entonces,

$$x - y = \sum r_i s_i - \sum r'_j s'_j = \sum r_i s_i + \sum (-r'_j) s'_j,$$

que es una suma finita del tipo de las que pertenecen a $\langle S \rangle$. Si $r \in R$ y $x = \sum r_i s_i \in \langle S \rangle$ entonces,

$$rx = r \sum r_i s_i = \sum (rr_i) s_i,$$

que es una suma finita del tipo de las que pertenecen a $\langle S \rangle$.

- (b) Todo elemento $s \in S$ es de la forma $s = 1s$ con $1 \in R$, por tanto $S \subset \langle S \rangle$. Sea ahora I un ideal de R conteniendo al subconjunto S . Para elementos cualesquiera $r_1, \dots, r_m$ de R y $s_1, \dots, s_m$ de S , se verifica

$$r_1 s_1 + \dots + r_m s_m \in I$$

por ser I ideal, luego $\langle S \rangle \subset I$.

68. Caracterización de anillos noetherianos

- (a) Sea R un anillo conmutativo y unitario. Se dice que R cumple la condición de cadena ascendente sii para toda cadena I_n de ideales de R

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \dots$$

existe un n_0 natural tal que $I_n = I_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$ (i.e. la cadena se estabiliza). Demostrar la siguiente caracterización

R es noetheriano $\Leftrightarrow R$ cumple la condición de cadena ascendente.

- (b) Aplicación: demostrar que el anillo $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no es noetheriano.

Solución. (a) $\Rightarrow$) Recordamos que un anillo conmutativo y unitario R se dice que es noetheriano sii todo ideal de R está finitamente generado. Demostremos la caracterización propuesta. Sea $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$ una cadena ascendente de ideales de R . Es inmediato comprobar que $I = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ es ideal de R . Por hipótesis R está finitamente generado, por tanto existen

elementos $g_1, \dots, g_m$ de R tales que $I = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$. Para $1 \leq j \leq m$ se verifica $g_j \in I_{k_j}$ para algún k_j natural. Si

$$n_0 = \max\{k_j : 1 \leq j \leq m\},$$

entonces $g_1, \dots, g_m \in I_{n_0}$ ya que $I_{k_j} \subset I_{n_0}$. Entonces, para todo $n \geq n_0$ se verifica

$$I = \langle g_1, \dots, g_m \rangle \subset I_{n_0} \subset I_n \subset I,$$

lo cual implica que $I_{n_0} = I_n$ si $n \geq n_0$.

$\Leftarrow$) Por reducción al absurdo. Si R no es noetheriano existe un ideal J de R no está finitamente generado. Elijamos $0 \neq f_1 \in J$ y sea $I_1 = \langle f_1 \rangle$. Como J no está finitamente generado, $I_1 \subsetneq J$ y por tanto existe $f_2 \in J \setminus I_1$ tal que $I_2 = \langle f_1, f_2 \rangle \subsetneq J$. Repitiendo el proceso obtenemos una cadena de ideales

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \dots \quad (I_k = \langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle)$$

que no se estabiliza. Queda demostrada la caracterización.

(b) Ver el problema 57.

69. Polinomio de Motzkin

Se llama *polinomio de Motzkin* al polinomio de $\mathbb{R}[X, Y]$:

$$s(X, Y) = X^4 Y^2 + X^2 Y^4 - 3X^2 Y^2 + 1.$$

(1) Demostrar que $s \geq 0$, es decir $s(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) s no es suma de cuadrados en $\mathbb{R}[X, Y]$.

Solución. (1) Para $a, b, c \geq 0$ sabemos que se verifica la de desigualdad

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad \text{si } a, b, c \geq 0.$$

Elgiendo $a = 1$, $b = x^4 y^2$, $c = x^2 y^4$ queda

$$\frac{1 + x^4 y^2 + x^2 y^4}{3} \geq \sqrt[3]{x^6 y^6}, \text{ o bien } s(x, y) \geq 0 \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

es decir, el polinomio de Motzkin es no negativo.

(2) Por contradicción. Si $s = \sum f_i^2$ para ciertos polinomios $f_i \in \mathbb{R}[X, Y]$, cada f_i tiene a lo sumo grado 3 y por tanto es combinación lineal real de

$$1, X, Y, X^2, XY, Y^2, X^3, X^2Y, XY^2, Y^3.$$

Si X^3 aparece en algún f_i , entonces X^6 aparecería en s con coeficiente positivo lo cual es absurdo. Esto implica que X^3 no aparece en ningún f_i .

De manera análoga deducimos que Y^3 , X^2 , X , e Y no aparecen en ningún f_i . Es decir los polinomios f_i son de la forma

$$f_i = a_i + b_i XY + c_i X^2 Y + d_i XY^2.$$

Pero entonces, $\sum b_i^2 = -3$ lo cual es una contradicción.

70. Recíproco del teorema del valor medio

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Se considera el siguiente enunciado:

$$\forall c \in (a, b) \exists x, y \in [a, b] : f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \quad (E)$$

Nótese que se trata de una especie de recíproco del teorema del valor medio. Demostrar mediante un contraejemplo que en general (E) es falso.

Solución. Sea $[a, b]$ conteniendo a 0 como punto interior y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^3$. Tenemos $f'(0) = 0$ y para $x \neq y$ en $[a, b]$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{y^3 - x^3}{x - y} = y^2 + yx + x^2.$$

Ahora bien,

$$y^2 + yx + x^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{-3x^2}}{2} = \frac{-x \pm \sqrt{3}xi}{2}$$

y la única solución real de la ecuación anterior se obtiene para $x = y = 0$.

Concluimos $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \neq 0$ para todo $x \neq y$ en $[a, b]$ y por tanto, el recíproco (E) del teorema del valor medio es en general falso.

71. R dominio de integridad y no cuerpo, implica $R[x]$ no es D.I.P.

Sea R un dominio de integridad que no es un cuerpo. Demostrar que $R[x]$ no es un dominio de ideales principales.

Solución. Como R es dominio de integridad que no es un cuerpo, existe $0 \neq c \in R$ tal que c no es invertible. Consideremos el ideal de R , dado por $I = \langle c, x \rangle$. Veamos por contradicción que I no es ideal principal.

En efecto si I es principal, existe $d(x) \in I$ tal que $I = \langle d(x) \rangle$ y por tanto $c \in \langle d(x) \rangle$ y $x \in \langle d(x) \rangle$ o de forma equivalente $d(x) \mid c$ y $d(x) \mid x$. Dado que

$d(x) \mid x$, o bien $d(x)$ es una unidad, o bien $d(x) = ux$ con u unidad. Dado que $d(x)$ también divide a c , necesariamente $d(x)$ es unidad y por tanto $I = R[x]$. En consecuencia existen $p(x), q(x) \in R[x]$ tales que

$$cp(x) + xq(x) = 1.$$

Como el grado de $xq(x)$ es al menos 1, se verifica $cp_0 = 1$ siendo p_0 el término constante de $p(x)$. Es decir, c es unidad (contradicción). Concluimos que $R[x]$ no es dominio de ideales principales.

72. $n^5 - n$ es divisible por 30

Demostrar que para todo entero n , el número $n^5 - n$ es divisible por 30.

Solución.

Podemos expresar $n^5 - n$ en la forma

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1).$$

Al menos uno de los tres enteros consecutivos $n - 1, n, n + 1$ es divisible por 2 y al menos uno entre 3, luego $(n - 1)n(n + 1)$ es divisible por 6.

Por otra parte $n^2 + 1$ es divisible por 5 si $n^2 - 4$ lo es. Pero $n^2 - 4 = (n + 2)(n - 2)$, en consecuencia

$$(n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1) \text{ es divisible por } 5$$

$$\Leftrightarrow (n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n - 2) \text{ es divisible por } 5.$$

El último producto es el producto de cinco números consecutivos, luego es divisible por 5. Concluimos pues que $30 \mid n^5 - n$ para todo entero n .

73. Matriz de Gram y dependencia lineal

Sean $f_1, f_2, \dots, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y

$$G[f_1, \dots, f_n] = \det \begin{bmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle & \dots & \langle f_1, f_n \rangle \\ \langle f_2, f_1 \rangle & \langle f_2, f_2 \rangle & \dots & \langle f_2, f_n \rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle f_n, f_1 \rangle & \langle f_n, f_2 \rangle & \dots & \langle f_n, f_n \rangle \end{bmatrix}$$

en donde $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$. Demostrar que

$$\{f_1, \dots, f_n\} \text{ es linealmente dependiente} \Leftrightarrow G[f_1, \dots, f_n] = 0.$$

Solución. $\Leftarrow$) Si $\{f_1, \dots, f_n\}$ fuera linealmente independiente, consideremos el espacio vectorial $E = L[f_1, \dots, f_n]$. Entonces, $\{f_1, \dots, f_n\}$ es base de E con lo cual, la matriz $G = [\langle f_i, f_j \rangle]$ es la matriz de Gram de un producto escalar y por tanto $G[f_1, \dots, f_n] = \det G > 0$ (absurdo).

$\Rightarrow$) Si $\{f_1, \dots, f_n\}$ es linealmente dependiente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i$. Sustituyendo, la última fila de la matriz es

$$\left[\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \langle f_i, f_1 \rangle, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \langle f_i, f_2 \rangle, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \langle f_i, f_n \rangle, \right],$$

es decir la última fila es combinación lineal de las restantes y por tanto $G[f_1, \dots, f_n] = 0$.

74. Generador de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Demostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Solución. (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Dado que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son elementos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, también lo es $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ y al ser $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ el menor cuerpo que contiene a $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2} + \sqrt{3}\}$, necesariamente $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Podemos expresar

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Como $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ es cuerpo y $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, se verifica $\sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Por otra parte

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}),$$

lo cual implica que $\sqrt{3} = (1/2)(2\sqrt{3}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Análogamente se demuestra que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, con lo cual $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

75. Cardinal de un cuerpo finito

(a) Sean K/k una extensión de cuerpos de grado $[K : k] = n$ y $\text{card } k = q$. Demostrar que $\text{card } K = q^n$

(b) Sea K un cuerpo finito de característica p . Demostrar que $\text{card } K = p^n$ para un cierto natural n .

Solución. (a) Sea $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ una base de K como espacio vectorial sobre k . Si $\lambda \in k$, entonces λ se puede escribir de forma única como

$$\lambda = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n \text{ con } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in k.$$

Como cada λ_i puede ser uno de los q elementos de k , el número de elementos de k es $\text{card } k = \underbrace{q \cdot \dots \cdot q}_n = q^n$.

(b) Si K tiene característica p , sabemos que existe un subcuerpo k de K que es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Pero la extensión K/k es finita, digamos de grado n . Por el apartado anterior, $\text{card } K = p^n$.

Fascículo 4

Monografías 76-100

76. Funciones monótonas, crecientes y decrecientes

1. Definir los conceptos de función creciente, decreciente, estrictamente creciente, estrictamente decreciente y monótona para una función real de variable real.

2. Demostrar que la función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente.

3. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Demostrar que

$$f \text{ es creciente} \Leftrightarrow -f \text{ es decreciente.}$$

4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ creciente. Demostrar que para todo $c \in (a, b)$ existen

$$f(c+) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x), \quad f(c-) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

y además $f(c-) \leq f(c) \leq f(c+)$. Demostrar que en los puntos extremos se satisface $f(a) \leq f(a+)$ y $f(b-) \leq f(b)$.

Nota. Naturalmente, se obtiene un teorema análogo para funciones decrecientes usando el apartado tercero.

5. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente. Demostrar que existe la aplicación inversa $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ y es estrictamente creciente.

Nota. Naturalmente, se obtiene un teorema análogo para funciones estrictamente decrecientes usando el apartado tercero.

6. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y la partición de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Demostrar la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k+) - f(x_k-)] \leq f(b) - f(a).$$

7. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona. Demostrar que el conjunto de los puntos de discontinuidad de f es contable.

Solución. 1. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *creciente* sii para todo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \leq f(x_2)$, y se dice que es *decreciente* sii para todo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \geq f(x_2)$. Si las desigualdades anteriores se cambian por desigualdades estrictas se dice que f es *estrictamente creciente* y *estrictamente decreciente* respectivamente. Se dice que f es *monótona* si es creciente o decreciente.

2. Para $0 \leq x_1 < x_2$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)}{x_2 - x_1} \\ &= x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 > 0. \end{aligned}$$

Dado que $x_2 - x_1 > 0$, ha de ser $f(x_2) - f(x_1) > 0$ luego $f(x_1) < f(x_2)$ y por tanto f es estrictamente creciente.

3. Para x_1, x_2 en A tenemos las equivalencias

$$\begin{aligned} f \text{ creciente} &\Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \text{ si } x_1 < x_2 \Leftrightarrow -f(x_1) \geq -f(x_2) \text{ si } x_1 < x_2 \\ &\Leftrightarrow (-f)(x_1) \geq (-f)(x_2) \text{ si } x_1 < x_2 \Leftrightarrow -f \text{ decreciente.} \end{aligned}$$

4. Sea $B = \{f(x) : a < x < c\}$. Al ser f creciente, B está acotado por $f(c)$ y por tanto existe $M = \sup B \leq f(c)$. Veamos que existe $f(c-)$ y es igual a M . Tenemos que demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - M| < \epsilon.$$

Sea $\epsilon > 0$. Al ser $M = \sup B$, existe un elemento $f(x_1)$ de B tal que $M - \epsilon < f(x_1) \leq M$. Dado que f es creciente, para todo $x \in (x_1, c)$ se verifica $M - \epsilon < f(x) \leq M$, en consecuencia $|f(x) - M| < \epsilon$. Basta entonces elegir $\delta = c - x_1$ en (1). De manera análoga se demuestra que $f(c) \leq f(c+)$ y las desigualdades en los extremos.

5. Como f es estrictamente creciente, es inyectiva, lo cual implica que $f : A \rightarrow f(A)$ es biyectiva, es decir existe $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$. Veamos que f^{-1} es estrictamente creciente. En efecto, para $y_1, y_2 \in f(A)$ con $y_1 < y_2$, sean $x_1, x_2 \in A$ tales que $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. No puede ser que $x_1 \geq x_2$ pues ocurriría $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$. Ha de ser necesariamente $x_1 < x_2$ o equivalentemente $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, lo cual prueba que f^{-1} es estrictamente creciente.

6. Para cada $1 \leq k \leq n - 1$ sea $y_k \in (x_k, x_{k+1})$ e $y_0 = a$. Se verifica $f(x_k+) \leq f(y_k)$ y $f(y_{k-1}) \leq f(x_k-)$, lo cual implica que

$$f(x_k+) - f(x_k-) \leq f(y_k) - f(y_{k-1}).$$

Sumando las desigualdades de la derecha obtenemos $f(y_{n-1}) - f(a) \leq f(b) - f(a)$ y por tanto, $\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k+) - f(x_k-)] \leq f(b) - f(a)$.

7. Supongamos que f es creciente y sea $c \in (a, b)$. Del apartado 4 deducimos que f es discontinua en c si y sólo si $f(c+) - f(c-) > 0$. Para todo $m \geq 1$ entero, sea A_m el conjunto de los puntos de discontinuidad c de f en (a, b) que satisfacen $f(c+) - f(c-) > 1/m$. Si los puntos $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ pertenecen a A_m , por el apartado anterior se verifica

$$\frac{n-1}{m} \leq f(b) - f(a),$$

lo cual implica que A_m ha de ser necesariamente finito. Pero el conjunto de los puntos de discontinuidad de f en (a, b) es $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ y la unión contable de conjuntos finitos es contable. Posiblemente en a o b existen puntos de discontinuidad para f , luego en cualquier caso el conjunto de los puntos de discontinuidad de f en $[a, b]$ es contable.

Si f es decreciente, se aplica el mismo razonamiento a la función creciente $-f$.

77. Funciones de variación acotada

1. Estudiar si las siguientes funciones son de variación acotada

$$(a) \quad f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

$$(b) \quad g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. Demostrar que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona, entonces es de variación acotada.

3. Demostrar que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es de variación acotada.

4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supongamos además que existe f' en (a, b) y está acotada. Demostrar que f es de variación acotada en $[a, b]$.

5. Demostrar que la siguiente función es de variación acotada

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

6. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada, es decir $\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| \leq M$ para toda partición de $[a, b]$. Demostrar que f está acotada en $[a, b]$ por $|f(a)| + M$.

Solución. 1. Recordamos que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ escribimos $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$

para $k = 1, 2, \dots, n$, y se dice que f es de *variación acotada* en $[a, b]$ sii existe un número positivo M cumpliendo

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| \leq M \quad \forall P \in \mathcal{P}[a, b].$$

(a) Para toda partición $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ de $[a, b]$ tenemos

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = b - a.$$

Entonces, $\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| \leq M$ con $M = b - a$ para toda partición de $[a, b]$ luego f es de variación acotada.

(b) Elijamos la partición de $[0, 1]$:

$$x_0 = 0 < \frac{1}{n\pi} < \frac{1}{(n-1)\pi} < \dots < \frac{1}{\pi} < 1 = x_{n+1}.$$

Es decir,

$$x_0 = 0, \quad x_k = \frac{1}{(n-k+1)\pi} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad x_{n+1} = 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} |\Delta g_k| &= \sum_{k=1}^{n+1} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \\ &= |g(x_1) - g(0)| + \sum_{k=2}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| + |g(x_{n+1}) - g(x_n)| \\ &= \left(\frac{\cos n\pi}{n\pi} - 0 \right) + \sum_{k=2}^n \left| \frac{\cos(n-k+1)\pi}{(n-k+1)\pi} - \frac{\cos(n-k+2)\pi}{(n-k+2)\pi} \right| + \left(\cos 1 - \frac{\cos \pi}{\pi} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n\pi} + \sum_{k=2}^n \left| \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)\pi} - \frac{(-1)^{n-k+2}}{(n-k+2)\pi} \right| + \cos 1 + \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Dado que $n-k+1$ y $n-k+2$ tienen distinta paridad,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} |\Delta g_k| &= \frac{(-1)^n}{n\pi} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(n-k+1)\pi} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(n-k+2)\pi} + \cos 1 + \frac{1}{\pi} \\ &= \left(\frac{(-1)^n}{n\pi} + \cos 1 + \frac{1}{\pi} \right) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + 1 \right) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Usando que la serie armónica es divergente y tomando límites cuando $n \rightarrow +\infty$ queda

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} |\Delta g_k| \geq 0 + \frac{1}{\pi} \cdot (+\infty) = +\infty$$

lo cual prueba que g no es de variación acotada.

2. Si f es creciente, entonces para toda partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ se verifica $f(x_k) - f(x_{k-1}) \geq 0$ para $k = 1, 2, \dots, n$ y por tanto

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a) := M.$$

Análogo razonamiento si f es decreciente.

3. La función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es claramente monótona en $[0, 1]$ (creciente en este caso), luego es de variación acotada.

4. Como f' está acotada en (a, b) , existe $K \geq 0$ tal que $|f'(x)| \leq K$ para todo $x \in (a, b)$. Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Por el teorema del valor medio de Lagrange,

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \text{ con } \xi_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

En consecuencia

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n |f'(\xi_k)| \Delta x_k \leq K \sum_{k=1}^n \Delta x_k = K(b-a) := M$$

y por tanto, f es de variación acotada en $[a, b]$.

5. La función f es elemental en $(0, 1]$ y por tanto continua en $(0, 1]$. Por otra parte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cos \frac{1}{x} \underbrace{=}_{\text{acotada por infinitésimo}} 0 = f(0),$$

luego f es continua en $[0, 1]$. En $(0, 1)$ tenemos

$$f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + x^2 \left(-\sin \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x},$$

$$|f'(x)| \leq \left| 2x \cos \frac{1}{x} \right| + \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 2 \cdot 1 + 1 = 3,$$

es decir f' está acotada en $(0, 1)$. Como consecuencia del apartado anterior, f es de variación acotada en $[0, 1]$.

6. Sea $x \in (a, b)$ y consideremos la partición $P = \{a, x, b\}$. Entonces,

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq M.$$

Esto implica que $|f(x) - f(a)| \leq M$. Ahora bien,

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| \leq M$$

$$\Rightarrow |f(x)| - |f(a)| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq |f(a)| + M.$$

Por otra parte, $|f(a)| \leq |f(a)| + M$ trivialmente, y para la partición $P = \{a, b\}$ queda $|f(b) - f(a)| \leq M$ y por tanto $|f(b)| \leq |f(a)| + M$. Es decir,

$$|f(x)| \leq |f(a)| + M \quad \forall x \in [a, b].$$

78. Variación total de una función

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Para toda partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ denotamos por $\sum(P)$ a la suma $\sum_{k=1}^n |\Delta f_k|$. Llamamos *variación total* de f en $[a, b]$ al número

$$V_f(a, b) := \sup \left\{ \sum(P) : P \in \mathcal{P}[a, b] \right\}.$$

1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Demostrar que f es constante $\Leftrightarrow V_f(a, b) = 0$.
2. Sean $f, g : [a, b]$ de variación acotada y designamos por V_f y V_g a $V_f(a, b)$ y $V_g(a, b)$ respectivamente. Demostrar que que la suma, diferencia y producto de f y g son de variación acotada y además

$$V_{f+g} \leq V_f + V_g, \quad V_{f-g} \leq V_f + V_g, \quad V_{fg} \leq \alpha V_f + \beta V_g,$$

siendo $\alpha = \sup\{|g(x)| : x \in [a, b]\}$ y $\beta = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$.

3. Se considera la función

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (0, 1] \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que es de variación acotada en $[a, b]$ y que $1/f$ no lo es.

4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada y tal que

$$0 < m \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a, b].$$

Demostrar que $g = 1/f$ es de variación acotada en $[a, b]$ y además, $V_g \leq V_f/m^2$.

5. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada y $a < c < b$. Demostrar que f es de variación acotada en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$, y además

$$V_f(a, b) = V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

Solución. 1. $\Rightarrow$) Si $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$. Para toda partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ se verifica

$$\sum(P) = \sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n |f_k(x) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |c - c| = 0,$$

luego $V_f(a, b) = \sup \{0\} = 0$

$\Leftarrow$) Si f no es constante, existen dos puntos x_1, x_2 con $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Para cualquier partición P de $[a, b]$ que contenga a x_1 y x_2 , tenemos $\sum(P) \geq |f(x_2) - f(x_1)| > 0$ y por tanto $V_f(a, b) > 0$.

2. Para cada partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ tenemos

$$\begin{aligned} |\Delta(f+g)_k| &= |(f+g)(x_k) - (f+g)(x_{k-1})| \\ &= |f(x_k) + g(x_k) - f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})| \\ &\leq |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |g(x_k) - g(x_{k-1})| = |\Delta f_k| + |\Delta g_k|, \end{aligned}$$

de lo cual deducimos que $V_{f+g} \leq V_f + V_g$ y por tanto $f+g$ es de variación acotada en $[a, b]$. Por otra parte

$$\begin{aligned} |\Delta(f-g)_k| &= |(f-g)(x_k) - (f-g)(x_{k-1})| \\ &= |f(x_k) - g(x_k) - f(x_{k-1}) + g(x_{k-1})| \\ &\leq |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |g(x_k) - g(x_{k-1})| = |\Delta f_k| + |\Delta g_k|, \end{aligned}$$

lo cual implica que $V_{f-g} \leq V_f + V_g$ y por tanto $f-g$ es de variación acotada en $[a, b]$. Por último, dado que f y g son de variación acotada, están acotadas y por tanto existen α y β y son finitos. Además, si $h = fg$

$$\begin{aligned} |\Delta h_k| &= |(fg)(x_k) - (fg)(x_{k-1})| = |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\ &= |[f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k)] + [f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})]| \\ &\leq |g(x_k)| |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_{k-1})| |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \alpha |\Delta f_k| + \beta |\Delta g_k|, \end{aligned}$$

luego $V_{fg} \leq \alpha V_f + \beta V_g$ y por tanto fg es de variación acotada en $[a, b]$.

3. Para toda partición $P = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = 1\}$ de $[0, 1]$ tenemos,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\Delta f_k| &= |f(x_1) - f(0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_3) - f(x_2)| + \dots \\ &\quad + |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| + |f(1) - f(x_{n-1})| = (1 - x_1) + (x_2 - x_1) \\ &\quad + (x_3 - x_2) + \dots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) = 2 - 2x_1 \leq 2, \end{aligned}$$

luego f es de variación acotada en $[0, 1]$. Por otra parte,

$$\frac{1}{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in (0, 1] \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Dado que $1/x \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$, la función $1/f$ no está acotada en $[0, 1]$ y por tanto no es de variación acotada.

4. Para toda partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ se verifica

$$\begin{aligned} |\Delta g_k| &= |g(x_k) - g(x_{k-1})| = \left| \frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})} \right| = \left| \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{f(x_k)f(x_{k-1})} \right| \\ &= \left| \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{f(x_k)f(x_{k-1})} \right| = \frac{|\Delta f_k|}{|f(x_k)f(x_{k-1})|} \leq \frac{V_f}{m^2}, \end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado.

5. Veamos primeramente que la función f es de variación acotada en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$. Sea P' una partición de $[a, c]$ y P'' una partición de $[c, b]$. Entonces,

$$\sum(P') + \sum(P'') = \sum(P''') \leq V_f(a, b)$$

es decir, las sumas $\sum(P')$ y $\sum(P'')$ están acotadas, luego f es de variación acotada en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$. Usando la propiedad $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ para subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ obtenemos la desigualdad

$$V_f(a, c) + V_f(c, b) \leq V_f(a, b).$$

Basta demostrar la desigualdad en el otro sentido. Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$, y sea P' la partición de $[a, b]$ obtenida al añadir a P el punto c (podría ocurrir $P' = P$). Supongamos que $c \in [x_{k-1}, x_k]$. Entonces

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})|,$$

con lo cual $\sum(P) \leq \sum(P')$. Los puntos de P' que están en $[a, c]$ determinan una partición P_1 de $[a, b]$ y los que están en $[c, d]$ una partición P_2 de $[c, d]$, por tanto

$$\sum(P) \leq \sum(P') = \sum(P_1) + \sum(P_2) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

Es decir, $V_f(a, c) + V_f(c, b)$ es una cota superior de las sumas $\sum(P)$, con lo cual

$$V_f(a, b) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

79. Diferencia de funciones crecientes

1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de variación acotada. Definimos la función

$$V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x) = \begin{cases} V_f(a, x) & \text{si } 0 < x \leq b \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

Demostrar que

(a) V es creciente en $[a, b]$.

(b) $V - f$ es creciente en $[a, b]$.

2. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Demostrar que: f es de variación acotada en $[a, b] \Leftrightarrow f$ se puede expresar como diferencia de dos funciones crecientes.

Solución. 1. (a) Para $a < x_1 < x_2 \leq b$, y usando conocidas propiedades de las funciones de variación acotada,

$$V_f(a, x_2) = V_f(a, x_1) + V_f(x_1, x_2) \Rightarrow V(x_2) - V(x_1) = V_f(x_1, x_2) \geq 0,$$

lo cual implica que V es creciente en $[a, b]$.

(b) Llamemos $H(x) = V(x) - f(x)$. entonces,

$$\begin{aligned} a \leq x_1 < x_2 \leq b &\Rightarrow H(x_2) - H(x_1) = V(x_2) - V(x_1) - [f(x_2) - f(x_1)] \\ &= V_f(x_1, x_2) - [f(x_2) - f(x_1)] \underbrace{\geq}_{f(x_2) - f(x_1) \leq V_f(x_1, x_2)} 0, \end{aligned}$$

por tanto $V - f$ es creciente

2. $\Rightarrow$) Si f es de variación acotada en $[a, b]$ podemos expresar $f = V - (V - f)$, y por el apartado anterior V y $V - f$ son crecientes.

$\Leftarrow$) Sea $f = f_1 - f_2$ en $[a, b]$ con f_1 y f_2 crecientes. Sabemos que toda función monótona es de variación acotada y que la diferencia de funciones de variación acotada también lo es, de lo cual se deduce f que es de variación acotada en $[a, b]$.

80. Funciones holomorfas en un disco

Determinar todas las funciones holomorfas en el disco

$$D(1, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$$

y que satisfacen en tal disco la condición

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2 + 2n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Solución. Denotando $z_n = n/(n+1)$,

$$|z_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| < 1 \Rightarrow z_n \in D(1, 1).$$

Despejando n , tenemos $n = z_n/(1 - z_n)$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(z_n) &= 1 - \frac{1}{2 \left(\frac{z_n}{1 - z_n} \right)^2 + 2 \left(\frac{z_n}{1 - z_n} \right) + 1} \\ &= 1 - \frac{(1 - z_n)^2}{2z_n^2 + 2z_n(1 - z_n) + (1 - z_n)^2} = 1 - \frac{(1 - z_n)^2}{1 + z_n^2} = \frac{2z_n}{1 + z_n^2}. \end{aligned}$$

La función $f(z) = 2z/(1 + z^2)$ no es holomorfa exactamente en $z = \pm i \notin D(1, 1)$, luego es holomorfa en $D(1, 1)$ y satisface trivialmente la condición (1). Veamos que es la única, para ello recordemos el siguiente teorema:

Teorema. Sean f y g holomorfas en un dominio D tales que $f(z_n) = g(z_n)$ sobre una sucesión de puntos distintos de D tales que existe $l = \lim z_n \in D$. Entonces, $f = g$.

La sucesión de puntos distintos $z_n = n/(n+1)$ de $D(1, 1)$ satisfacen $\lim z_n = 1 \in D(1, 1)$, lo cual implica por el teorema anterior, que la única función que satisface las hipótesis del problema es $f(z) = 2z/(1 + z^2)$.

81. Ecuación diferencial de la ley de absorción de Lambert

La ley de absorción de Lambert asegura que la tasa de absorción de luz relativa a una profundidad x de un material translúcido es proporcional a la intensidad I en tal profundidad x . Es decir,

$$\frac{dI}{dx} = -kI \quad (\text{Ley de absorción de Lambert}).$$

Supongamos que la intensidad I a una profundidad de 30 pies es $4/9$ de la intensidad en la superficie. Encontrar la intensidad a 60 pies y a 120 pies.

Solución. Resolvamos la ecuación diferencial correspondiente:

$$\frac{dI}{dx} = -kI, \quad \frac{dI}{I} = -kdx, \quad \log |I| = -kx + K, \quad I = e^K e^{-kx}.$$

La solución general es por tanto $I = Ce^{-kx}$. Para $x = 0$ obtenemos la intensidad en la superficie $I_0 = I(0) = C$. Por otra parte,

$$I(30) = \frac{4}{9}I_0 \Leftrightarrow I_0 e^{-30k} = \frac{4}{9}I_0 \Leftrightarrow e^{-30k} = \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow -30k = \log \frac{4}{9} \Leftrightarrow k = \frac{\log(9/4)}{30}.$$

Entonces,

$$I(60) = I_0 e^{-2 \log(9/4)} = I_0 e^{-\log(9/4)^2} = \frac{16I_0}{81},$$

$$I(120) = I_0 e^{-4 \log(9/4)} = I_0 e^{-\log(9/4)^4} = \frac{4^4 I_0}{9^4}.$$

82. Derivada de un determinante

Sea I un intervalo de la recta real. Se considera la matriz de orden n :

$$A(t) = [F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)]$$

en donde

$$F_i(t) = \begin{pmatrix} f_{1j}(t) \\ f_{2j}(t) \\ \vdots \\ f_{nj}(t) \end{pmatrix} \quad \forall t \in I \text{ con las } f_{ij} \text{ derivables en } I.$$

1. Demostrar que para todo $t \in (a, b)$ se verifica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A(t) &= \det [F'_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)] + \det [F_1(t), F'_2(t), \dots, F_n(t)] \\ &\quad + \dots + \det [F_1(t), F_2(t), \dots, F'_n(t)]. \end{aligned}$$

2. Escribir explícitamente la fórmula anterior de la derivada de un determinante para $A(t) = [f_{ij}(t)]$.

3. Calcular la derivada de la función determinante

$$A : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(t) = \begin{vmatrix} \sin t & \sqrt{t} \\ \log t & 1/t \end{vmatrix}.$$

Solución. 1. Por definición,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det A(t+h) - \det A(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det [F_1(t+h), \dots, F_n(t+h)] - \det [F_1(t), \dots, F_n(t)]}{h}. \end{aligned}$$

Sumando y restando $\det [F_1(t), F_2(t+h), \dots, F_n(t+h)]$,

$$\frac{d}{dt} \det A(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det [F_1(t+h), F_2(t+h), \dots, F_n(t+h)] - \det [F_1(t), F_2(t+h), \dots, F_n(t+h)]}{h} \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det [F_1(t), F_2(t+h), \dots, F_n(t+h)] - \det [F_1(t), \dots, F_n(t)]}{h}. \\
&\qquad \qquad \qquad \frac{d}{dt} \det A(t) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det [F_1(t+h), F_2(t+h), \dots, F_n(t+h)] - \det [F_1(t), F_2(t+h), \dots, F_n(t+h)]}{h} \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\det [F_1(t), F_2(t+h), \dots, F_n(t+h)] - \det [F_1(t), \dots, F_n(t)]}{h}.
\end{aligned}$$

El primer sumando es

$$\begin{aligned}
&\det \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_1(t+h) - F_1(t)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} F_2(t+h), \dots, \lim_{h \rightarrow 0} F_n(t+h) \right) \\
&= \det [F_1'(t), F_2(t), \dots, F_n(t)].
\end{aligned}$$

Ahora, sumamos y restamos al segundo sumando

$$\det [F_1(t), F_2(t), F_3(t+h), \dots, F_n(t+h)],$$

obteniendo el sumando

$$\det [F_1(t), F_2'(t), F_3(t), \dots, F_n(t)].$$

Podemos reiterar el proceso hasta obtener

$$\det [F_1(t), F_2(t), \dots, F_{n-1}(t), F_n'(t)].$$

2. Tenemos

$$\det A(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

por tanto la fórmula del apartado anterior se puede escribir en la forma

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \begin{vmatrix} f'_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1n}(t) \\ f'_{21}(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ f'_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \dots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f'_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f'_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f'_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f'_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f'_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

3. Usando la fórmula del apartado anterior,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det A(t) &= \begin{vmatrix} \cos t & \sqrt{t} \\ 1/t & 1/t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin t & 1/(2\sqrt{t}) \\ \log t & -1/t^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{t}(\cos t - \sqrt{t}) - \frac{\sin t}{t^2} - \frac{\log t}{2\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

83. Cambio de referencia en el espacio afín

1. Sean $\mathcal{R} = \{O, B\}$ y $\mathcal{R}' = \{O', B'\}$ dos referencias en un espacio afín $\mathbb{A}$ de dimensión n . Demostrar que se verifica

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & p_{11} & \cdots & p_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \quad (*)$$

en donde,

$(x_1, \dots, x_n)^T$ son las coordenadas de $M \in \mathbb{A}$ en la referencia $\mathcal{R}$,

$(x'_1, \dots, x'_n)^T$ las coordenadas del mismo M en la referencia $\mathcal{R}'$,

$(a_1, \dots, a_n)^T$ son las coordenadas de O en la referencia $\mathcal{R}$,

$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ es la matriz de cambio de B a B' .

A la ecuación (*) se la llama *ecuación matricial del cambio de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$* .

2. En un espacio afín $\mathbb{A}$ de dimensión 2 se consideran las referencias afines $\mathcal{R} = \{O, e_1, e_2\}$ y $\mathcal{R}' = \{O', e'_1, e'_2\}$ tales que el vector de coordenadas de O' en $\mathcal{R}$ es $(2, -3)^T$ y además

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + 4e_2 \\ e'_2 = 3e_1 - e_2. \end{cases}$$

Escribir la ecuación matricial del cambio de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ y hallar la ecuación de una recta r en la referencia $\mathcal{R}'$, cuya ecuación en la referencia $\mathcal{R}$ es $2x_1 - x_2 = 5$.

Solución. 1. Para todo $M \in \mathbb{A}$ se verifica

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \quad (1)$$

Sean $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$. Por definición de coordenadas en una referencia afín y usando (1),

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n. \quad (2)$$

La relación entre las bases B y B' es

$$\begin{cases} e'_1 = p_{11}e_1 + \dots + p_{1n}e_n \\ \dots \\ e'_n = p_{n1}e_1 + \dots + p_{nn}e_n. \end{cases}$$

Sustituyendo en (2) obtenemos

$$x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

$$+ x'_1 (p_{11}e_1 + \dots + p_{1n}e_n) + \dots + x'_n (p_{n1}e_1 + \dots + p_{nn}e_n).$$

Igualando coordenadas,

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + p_{11}x'_1 + \dots + x'_n p_{n1} \\ \dots \\ x_n = a_n + p_{n1}x'_1 + \dots + x'_n p_{nn}, \end{cases}$$

relaciones que equivalen a la igualdad matricial (*).

2. Según el apartado anterior, la ecuación matricial del cambio de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix},$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x'_1 + 3x'_2 \\ x_2 = -3 + 4x'_1 - x'_2. \end{cases}$$

Sustituyendo en $2x_1 - x_2 = 5$ obtenemos $2(2 + x'_1 + 3x'_2) - (-3 + 4x'_1 - x'_2) = 5$ o equivalentemente $-2x'_1 + 7x'_2 + 2 = 0$, que es la ecuación pedida.

84. Cardinales infinitos: elementos no regulares

1. Se consideran los conjuntos $X = \{a\}$, $Y = \{b, c\}$, $\mathbb{N}$ y los cardinales

$$x = |X|, \quad y = |Y|, \quad z = |\mathbb{N}|.$$

Demostrar que la aplicación $f : X \times \mathbb{N} \rightarrow Y \times \mathbb{N}$

$$f(a, n) = \begin{cases} (b, p) & \text{si } n = 2p \text{ es par} \\ (c, p) & \text{si } n = 2p + 1 \text{ es impar} \end{cases}$$

es biyectiva. Concluir que z no es elemento regular para el producto.

2. Demostrar que la aplicación

$$f : \mathbb{N} \times \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(n, u) = \begin{cases} 2n & \text{si } u = 0 \\ 2n + 1 & \text{si } u = 1 \end{cases}$$

es biyectiva. Concluir que existen cardinales infinitos no regulares para la suma.

Solución. 1. *Inyectiva.* Si n_1 y n_2 son naturales de distinta paridad, claramente no puede ocurrir $f(a, n_1) = f(a, n_2)$ pues $b \neq c$. Si $n_1 = 2p_1$ y $n_2 = 2p_2$ son pares,

$$f(a, n_1) = f(a, n_2) \Rightarrow (b, p_1) = (b, p_2) \Rightarrow p_1 = p_2$$

$$\Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow (a, n_1) = (a, n_2).$$

Análogo razonamiento si n_1 y n_2 son impares.

Sobreyectiva. Todo elemento de $Y \times \mathbb{N}$ es de la forma (b, n) o (c, n) con n natural. Pero $(b, n) = f(a, 2n)$, $(c, n) = f(a, 2n + 1)$, luego f es sobreyectiva. Tenemos pues que

$$xz = |X \times \mathbb{N}| = |Y \times \mathbb{N}| = yz$$

y sin embargo $x \neq y$, lo cual prueba que z es cardinal infinito y no regular para el producto.

2. *Inyectiva.* Sean (n_1, u_1) y (n_2, u_2) elementos de $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Si $u_1 \neq u_2$, claramente $f(n_1, u_1) \neq f(n_2, u_2)$. Si $u_1 = u_2 = 0$,

$$f(n_1, u_1) = f(n_2, u_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow (n_1, u_1) = (n_2, u_2).$$

Análogo razonamiento si $u_1 = u_2 = 1$.

Sobreyectiva. Si $m \in \mathbb{N}$, o bien $m = 2n$, o bien $m = 2n + 1$ para algún n . Pero $m = 2n = f(n, 0)$, $m = 2n + 1 = f(n, 1)$ luego f es sobreyectiva.

Llamemos $x = |\mathbb{N}|$. Dado que

$$x = |\mathbb{N} \times \{0\}| = |\mathbb{N} \times \{1\}|, \quad (\mathbb{N} \times \{0\}) \cap (\mathbb{N} \times \{1\}) = \emptyset,$$

podemos escribir

$$x + x = |(\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times \{1\})| = |\mathbb{N} \times \{0, 1\}| \underset{\substack{= \\ f \text{ biyectiva}}}{=} x.$$

Es decir, tenemos $x + x = x + 0$ y $x \neq 0$ lo cual implica que x es cardinal infinito y no regular para la suma.

85. Distancia de un plano y de una curva al origen

Usando técnicas de cálculo diferencial,

1. Calcular la mínima distancia del plano $\alpha : 2x - y + 2z = 2$ al origen y el punto en el que dicha distancia mínima se obtiene.
2. Calcular la mínima distancia del conjunto

$$A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\}$$

al origen y el punto en el que dicha distancia mínima se obtiene.

Solución. 1. Todo punto P del plano α se puede expresar en la forma $P = (\lambda, 2\lambda + 2\mu - 2, \mu)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La función cuadrado de la distancia de P al origen O es

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\lambda, \mu) = d^2(P, O) = \lambda^2 + (2\lambda + 2\mu - 2)^2 + \mu^2.$$

Hallemos los puntos críticos de f .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + 2(2\lambda + 2\mu - 2) \cdot 2 = 0 \\ 2(2\lambda + 2\mu - 2) \cdot 2 + 2\mu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10\lambda + 8\mu = 8 \\ 8\lambda + 10\mu = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda + 4\mu = 4 \\ 4\lambda + 5\mu = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 4/9 \\ \mu = 4/9. \end{cases}$$

Por consideraciones geométricas, en $(\lambda, \mu) = (4/9, 4/9)$ obtenemos mínimo absoluto para la función f y por tanto para la función $d(P, O)$. Sustituyendo obtenemos el punto $P_0 = (4/9, -2/9, 4/9)$ del plano α para el cual la distancia al origen es mínima, siendo esta distancia

$$d(P_0, O) = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{-2}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

2. Los puntos (x, y) del plano que satisfacen la condición $x^2 + y^2 = 1$, son exactamente los de la forma $(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, luego los puntos Q de A son los de la forma

$$Q = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t) \text{ con } t \in [0, 2\pi].$$

La función cuadrado de la distancia de Q al origen O es

$$\begin{aligned} g : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = d^2(Q, O) = \cos^2 t + \sin^2 t + (1 - \sin t - \cos t)^2 \\ &= 1 + 1 + \sin^2 t + \cos^2 t - 2 \sin t - 2 \cos t + 2 \sin t \cos t \\ &= 3 - 2 \sin t - 2 \cos t + \sin 2t. \end{aligned}$$

Halleemos los puntos críticos de g . Tenemos

$$\begin{aligned} g'(t) = 0 &\Leftrightarrow -2 \cos t + 2 \sin t + 2 \cos 2t = 0 \\ &\Leftrightarrow -\cos t + \sin t + \cos^2 t - \sin^2 t = 0 \\ &\Leftrightarrow -\cos t + \sin t + (\cos t + \sin t)(\cos t - \sin t) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t - \sin t = 0 \\ \vee \\ \cos t + \sin t - 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Por una parte tenemos en $[0, 2\pi]$:

$$\cos t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t = \cos t \Leftrightarrow t = \pi/4 \vee t = 5\pi/4.$$

Por otra parte es claro que la condición $\cos t + \sin t = 1$ se verifica exclusivamente en $[0, 2\pi]$ para $t = 0$, o $t = \pi/2$ o $t = 2\pi$. Halleemos los valores de g en los puntos críticos del interior de $[0, 2\pi]$ y en los extremos:

$$\begin{aligned} g(\pi/4) &= 3 - 2 \sin(\pi/4) - 2 \cos(\pi/4) + \sin(\pi/2) = 3 - 2\sqrt{2} + 1 = 4 - 2\sqrt{2}, \\ g(5\pi/4) &= 3 - 2 \sin(5\pi/4) - 2 \cos(5\pi/4) + \sin(5\pi/2) = 3 + 2\sqrt{2} + 1 = 4 + 2\sqrt{2}, \\ g(\pi/2) &= 3 - 2 \sin(\pi/2) - 2 \cos(\pi/2) + \sin \pi = 3 - 2 - 0 + 0 = 1, \\ g(0) &= 3 - 2 \sin 0 - 2 \cos 0 + \sin 0 = 3 = g(2\pi). \end{aligned}$$

El mínimo absoluto de g se obtiene por tanto en $t = \pi/4$. Sustituyendo, obtenemos el punto Q_0 de A para el cual el cuadrado de la distancia al origen es mínima

$$Q_0 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}, 1 - \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right) = (0, 1, 0),$$

y la distancia mínima es $d(Q_0, O) = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$.

86. Grupo de Klein y sus automorfismos

Se considera el grupo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$.

(a) Demostrar que el simétrico de cada elemento coincide con el propio elemento.

(b) Demostrar que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ no es cíclico.

(c) Denotemos $K = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $e = (0, 0)$, $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$, $c = (1, 1)$. Escribir la tabla de K con notación multiplicativa. Al grupo $(K, \cdot)$ se le llama *grupo de Klein*.

Nota. Por supuesto que no hay diferencia entre $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ y $(K, \cdot)$ salvo la notación.

(d) Determinar todos los automorfismos del grupo de Klein.

Solución. (a) Tenemos $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ y se cumple

$$(0, 0) + (0, 0) = (0, 0), \quad (1, 0) + (1, 0) = (0, 0),$$

$$(0, 1) + (0, 1) = (0, 0), \quad (1, 1) + (1, 1) = (0, 0),$$

lo cual implica que

$$-(0, 0) = (0, 0), \quad -(1, 0) = (1, 0), \quad -(0, 1) = (0, 1), \quad -(1, 1) = (1, 1),$$

es decir el simétrico de cada elemento coincide con el propio elemento.

(b) El elemento neutro es de orden 1 y se cumple

$$(1, 0) + (1, 0) = (0, 0), \quad (0, 1) + (0, 1) = (0, 0), \quad (1, 1) + (1, 1) = (0, 0)$$

es decir, los restantes elementos son de orden 2, por tanto $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ no es cíclico.

(c) La tabla de Cayley de $(K, +)$ es

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(d) Si $f : K \rightarrow K$ es automorfismo necesariamente $f(e) = e$ y al ser

$$\{a, b, c\} = \{f(a), f(b), f(c)\}$$

tenemos 6 posibles elecciones: las permutaciones de $\mathcal{S}_3$. Por ejemplo, para la permutación

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

obtenemos el posible automorfismo

$$f(e) = e, \quad f(a) = a, \quad f(b) = c, \quad f(c) = b,$$

es fácil verificar $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in K$ y lo mismo para cada permutación de $\mathcal{S}_3$. En consecuencia, el grupo de los automorfismos del grupo de Klein $\text{Aut}(K)$, es isomorfo al grupo simétrico $\mathcal{S}_3$.

87. Singularidades y residuos de $f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}$

Se considera la función

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}.$$

Determinar sus singularidades, clasificarlas y hallar sus residuos.

Solución. La función no es analítica para $z^3 + z^2 - z - 1 = 0$. Descomponiendo obtenemos $(z+1)^2(z-1) = 0$, con lo cual los puntos singulares son $z = 1$ y $z = -1$. Entonces,

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \frac{\sin 1}{0} = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow -1} f(z) = \frac{\sin(-1)}{0} = \infty,$$

por tanto son polos. Hallemos sus órdenes,

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z)(z-1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1) \sin z}{(z+1)^2(z-1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sin z}{(z+1)^2} = \frac{\sin 1}{4} \neq 0,$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} f(z)(z+1)^2 = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z+1)^2 \sin z}{(z+1)^2(z-1)} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin z}{z-1} = \frac{\sin(-1)}{-2} = \frac{\sin 1}{2} \neq 0,$$

por tanto $z = 1$ es polo simple y $z = -1$ es polo doble. Hallemos sus residuos:

$$\text{Res } [f, z = 1] = \lim_{z \rightarrow 1} f(z)(z-1) = \frac{\sin 1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Res } [f, z = -1] &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} (f(z)(z+1)^2)' = \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{\sin z}{z-1} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z-1) \cos z - \sin z}{(z-1)^2} = \frac{-2 \cos(-1) - \sin(-1)}{4} = \frac{\sin 1 - 2 \cos 1}{4}. \end{aligned}$$

88. Singularidades y residuos de $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z-1}$

Se considera la función

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z-1}.$$

Determinar sus singularidades, clasificarlas y hallar sus residuos.

Solución. La función no es analítica en $z = 0$ y en $z = 1$, y estas son por tanto sus singularidades.

Caso $z = 1$. Tenemos $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = e/0 = \infty$, es decir $z = 1$ es un polo, y

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z)(z-1) = \lim_{z \rightarrow 1} e^{1/z} = e \neq 0,$$

con lo cual es polo simple y además

$$\text{Res } [f, z = 1] = \lim_{z \rightarrow 1} f(z)(z-1) = e.$$

Caso $z = 0$. Consideremos x real. Tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{x-1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{x-1} = -\infty.$$

Es decir, no existe $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$, luego $z = 0$ es singularidad esencial. Para hallar el residuo de f en $z = 0$, desarrollamos f en serie de Laurent en un entorno de 0. Tenemos para $0 < |z| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{1/z} \cdot \frac{1}{z-1} = \left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots\right) (-1 - z - z^2 - z^3 - \cdots) \\ &= \cdots + \left(-\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots\right) \frac{1}{z} + \cdots = \cdots + (1-e) \frac{1}{z} + \cdots, \end{aligned}$$

Entonces

$$\text{Res } [f, z = 0] = \text{coef } \frac{1}{z} = 1 - e.$$

89. Singularidad y residuo en el origen de $f(z) = \frac{1}{2+z^2-2\cosh z}$

Usando desarrollo en serie de Laurent, clasificar la singularidad en el origen de la función

$$f(z) = \frac{1}{2+z^2-2\cosh z}$$

y hallar su residuo en tal punto.

Solución. Claramente el denominador se anula en $z = 0$, por tanto presenta una singularidad en dicho punto. El desarrollo en serie de la función coseno hiperbólico es

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots,$$

y por tanto, para $z \neq 0$,

$$f(z) = \frac{1}{2 + z^2 - 2 \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots \right)} = \frac{1}{-\frac{2z^4}{4!} - \frac{2z^6}{6!} - \frac{2z^8}{8!} - \cdots}.$$

Efectuando la división según potencias crecientes obtenemos para $z \neq 0$ un desarrollo de Laurent del tipo

$$f(z) = \frac{A_{-4}}{z^4} + \frac{A_{-2}}{z^2} + A_0 + A_2 z^2 + \cdots \quad (A_{-4} \neq 0).$$

En consecuencia, la singularidad de f en el origen es un polo cuádruple y su residuo es

$$\text{Res } [f, z = 0] = \text{coef } \frac{1}{z} = 0.$$

90. Integral $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta}$

Demostrar que para a, b, c reales positivos con $a^2 > b^2 + c^2$ se verifica

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}.$$

Solución. Efectuando el cambio $z = e^{i\theta}$ obtenemos

$$dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta,$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

Cuando θ recorre $[0, 2\pi]$, z recorre la circunferencia $|z| = 1$ en sentido antihorario, por tanto

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta} = \int_{|z|=1} \frac{dz/iz}{a+b\frac{z^2+1}{2z}+c\frac{z^2-1}{2iz}}$$

$$= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz/z}{\frac{2aiz + bi(z^2 + 1) + c(z^2 + 1)}{2iz}} = 2 \int_{|z|=1} \frac{dz}{(c + bi)z^2 + 2aiz + bi - c}.$$

Los puntos singulares de la función integrando f son los que anulan al denominador:

$$\begin{aligned} (c + bi)z^2 + 2aiz + bi - c = 0 &\Leftrightarrow z = \frac{-2ai \pm \sqrt{-4a^2 - 4(c + bi)(bi - c)}}{2(c + bi)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-2ai \pm \sqrt{-4a^2 + 4(b^2 + c^2)}}{2(c + bi)} \Leftrightarrow z = \frac{-2ai \pm \sqrt{4(b^2 + c^2 - a^2)}}{2(c + bi)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-2ai \pm 2i\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{2(c + bi)} \Leftrightarrow z = \frac{(-a \pm \sqrt{a^2 - b^2 - c^2})i}{c + bi} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{b - ci}. \end{aligned}$$

Los puntos singulares (polos simples) son por tanto:

$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{b - ci}, \quad z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{b - ci}.$$

Veamos si pertenecen al interior geométrico de $|z| = 1$:

$$\begin{aligned} |z_1| < 1 &\Leftrightarrow \frac{|-a + \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}|}{|b - ci|} < 1 \Leftrightarrow \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}} < 1 \\ &\Leftrightarrow a < \sqrt{a^2 - b^2 - c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} \\ &\Leftrightarrow a^2 < a^2 - b^2 - c^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}\sqrt{b^2 + c^2} \\ &\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}\sqrt{b^2 + c^2}, \end{aligned}$$

y la última desigualdad es trivial. Por otra parte,

$$\begin{aligned} |z_2| > 1 &\Leftrightarrow \frac{|-a - \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}|}{|b - ci|} > 1 \Leftrightarrow \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}} > 1 \\ &\Leftrightarrow a > \sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{a^2 - b^2 - c^2} \\ &\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2 + a^2 - b^2 - c^2 - 2\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}\sqrt{b^2 + c^2} \\ &\Leftrightarrow 0 > -2\sqrt{b^2 + c^2}\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}, \end{aligned}$$

y la última desigualdad es trivial. El único polo en el interior geométrico de $|z| = 1$ es por tanto z_1 con lo cual

$$I = 2 \int_{|z|=1} \frac{dz}{(c+bi)z^2 + 2aiz + bi - c} = 4\pi i \operatorname{Res} [f, z = z_1].$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} [f, z = z_1] &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{(c+bi)(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{(c+bi)} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{z_1 - z_2} \\ &= \frac{1}{(c+bi)} \cdot \frac{1}{\frac{2\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{b - ci}} = \frac{1}{2i\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta + c \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}.$$

91. Suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$.

- (a) Demostrar que es convergente.
- (b) Hallar su suma.

Solución.

- (a) La serie es de términos positivos. Aplicando el criterio de D'Alembert

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}(n+2)} : \frac{2^n(n+1)}{n} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1,$$

por tanto la serie es convergente.

- (b) Consideremos la función

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n.$$

Se comprueba inmediatamente por el criterio de D'Alembert que la serie funcional anterior es absolutamente convergente para $|x| < 1$, y por tanto f está bien definida. La suma de la serie pedida será por tanto

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)} = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Podemos escribir para $x \in (-1, 1)$ y no nulo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{1-x} - 1 - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Llamemos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Aplicando el criterio de D'Alembert verificamos inmediatamente que g está definida en $(-1, 1)$ y al venir dada por una serie de potencias se puede derivar término a término:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1.$$

Integrando, $g(x) = -\log|1-x| - x + C$. Para $x = 0$ obtenemos $0 = g(0) = \log 1 - 0 + C$, con lo cual, $C = 0$. Queda para $x \in (-1, 1)$ y no nulo

$$f(x) = \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x}(-\log|1-x| - x).$$

Entonces,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2\left(-\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2(1 - \log 2).$$

92. Cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$

Denominemos por $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$ al menor subcuerpo de $\mathbb{C}$ que contiene a $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{5}, i\}$. Demostrar que

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) = \{p + qi + r\sqrt{5} + s\sqrt{5}i : p, q, r, s \in \mathbb{Q}\}.$$

Solución. Denominemos por K al cuerpo pedido. Necesariamente K ha de contener a $1, \sqrt{5}, i, \sqrt{5}i$. Como también ha de contener a los racionales, necesariamente,

$$K \supset K' = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha = p + qi + r\sqrt{5} + s\sqrt{5}i \text{ con } p, q, r, s \in \mathbb{Q}\}.$$

Si demostramos que K' es cuerpo estará demostrado que $K' = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$. Efectivamente,

1. Veamos que K' es subanillo de $\mathbb{C}$. (a) $\alpha = 0 + 0i + 0\sqrt{5} + 0\sqrt{5}i \in K'$, por tanto $K' \neq \emptyset$. (b) Para todo $\alpha = p + qi + r\sqrt{5} + s\sqrt{5}i$ y $\alpha' = p' + q'i + r'\sqrt{5} + s'\sqrt{5}i$ tenemos

$$\alpha - \alpha' = (p - p') + (q - q')i + (r - r')\sqrt{5} + (s - s')\sqrt{5}i$$

con $p - p', q - q', r - r', s - s'$ racionales, por tanto $\alpha - \alpha' \in K'$. (c) Para todo $\alpha = p + qi + r\sqrt{5} + s\sqrt{5}i$ y $\alpha' = p' + q'i + r'\sqrt{5} + s'\sqrt{5}i$ tenemos

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' &= (p + qi + r\sqrt{5} + s\sqrt{5}i)(p' + q'i + r'\sqrt{5} + s'\sqrt{5}i) \\ &= (pp' - qq' + 5rr' - 5ss') \cdot 1 + (p'q + pq' + 5sr' + 5rs')i \\ &\quad + (p'r - sq' + pr' - qs')\sqrt{5} + (p's + r'q + qr' + ps')\sqrt{5}i, \end{aligned}$$

y los coeficientes de 1, i , $\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}i$ son racionales, por tanto $\alpha\alpha' \in K'$.

2. Veamos que todo $\alpha = p + qi + r\sqrt{5} + s\sqrt{5}i \in K'$ no nulo tiene inverso en K' . Para ello, probemos previamente que

$$\alpha = 0 \Leftrightarrow (p, q, r, s) = (0, 0, 0, 0).$$

$\Leftarrow$) Esta implicación es trivial.

$\Rightarrow$) Tenemos igualando partes reales e imaginarias

$$\begin{aligned} p + qi + r\sqrt{5} + s\sqrt{5}i = 0 &\Rightarrow (p + r\sqrt{5}) + (q + s\sqrt{5})i = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} p + r\sqrt{5} = 0 \\ q + s\sqrt{5} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $r = 0$, entonces $p = 0$. Si $r \neq 0$ tendríamos $\sqrt{5} = -p/r$ lo cual es absurdo pues $\sqrt{5}$ es irracional. Concluimos que $p = r = 0$. De manera análoga se demuestra que $q = s = 0$.

Sea $0 \neq \alpha \in K'$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{(p + r\sqrt{5}) + (q + s\sqrt{5})i} = \frac{(p + r\sqrt{5}) - (q + s\sqrt{5})i}{(p + r\sqrt{5})^2 + (q + s\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{p + r\sqrt{5} - qi - s\sqrt{5}i}{\underbrace{(p^2 + q^2 + 5r^2 + 5s^2)}_x + \underbrace{2(pr + qs)}_y \sqrt{5}} \\ &= \frac{(p + r\sqrt{5} - qi - s\sqrt{5}i)(x - y\sqrt{5})}{x^2 - 5y^2}. \quad (1) \end{aligned}$$

Tenemos que $x, y \in \mathbb{Q}$ y dado que $(p, q, r, s) \neq (0, 0, 0, 0)$, se verifica $x^2 \neq 0$. No puede ser $x^2 - 5y^2 = 0$, pues en tal caso, $x^2 = 5y^2 \neq 0$ y $x/y = \sqrt{5}$ lo

cual es absurdo al ser $\sqrt{5}$ irracional. Es claro que operando y agrupando en (1), obtenemos que $1/\alpha$ es de la forma

$$\frac{1}{\alpha} = A + Bi + C\sqrt{5} + D\sqrt{5}i \text{ con } A, B, C, Q \in \mathbb{Q}$$

lo cual demuestra que $1/\alpha \in K'$.

93. Puntos de inflexión de una familia de curvas

Sea el conjunto de funciones $f_a(x) = \frac{x^3 + a}{(x+1)^2}$, donde $a \in \mathbb{R} - \{1\}$.

(a) Determinar las funciones de este conjunto cuya representación gráfica admite un punto de inflexión en el cual la tangente es paralela al eje de abscisas.

(b) Probar que todas las funciones de este conjunto tienen una asíntota oblicua común, de la cual se pide la ecuación.

Solución. (a) Hallemos la derivada segunda de f_a . Para todo $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} f'_a(x) &= \frac{3x^2(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3 + a)}{(x+1)^4} = \frac{3x^2(x+1) - 2(x^3 + a)}{(x+1)^3} \\ &= \frac{x^3 + 3x^2 - 2a}{(x+1)^3}, \\ f''_a(x) &= \frac{(3x^2 + 6x)(x+1)^3 - 3(x+1)^2(x^3 + 3x^2 - 2a)}{(x+1)^6} \\ &= \frac{(3x^2 + 6x)(x+1) - 3(x^3 + 3x^2 - 2a)}{(x+1)^4} = \frac{6(x-a)}{(x+1)^4}. \end{aligned}$$

Los posibles puntos de inflexión se obtienen para los x tales que $f''_a(x) = 0$ es decir para $x = -a$ con $a \neq 1$. Para valores $x < -a$ suficientemente próximos a a , claramente $f''_a(x) < 0$ y para valores $x > -a$ suficientemente próximos a a , claramente $f''_a(x) > 0$. Cambia la concavidad, en consecuencia en $x = -a$ con $a \neq 1$ hay punto de inflexión para f_a . En estos puntos de inflexión la tangente es paralela al eje de abscisas si $f'_a(-a) = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} f'_a(-a) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-a^3 + 3a^2 - 2a}{(-a+1)^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{-a(a-1)(a-2)}{(-a+1)^3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a(a-2)}{(-a+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{a(a-2)}_{a \neq 1} \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2. \end{aligned}$$

Las funciones pedidas son por tanto f_0 y f_2 .

(b) Para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$,

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_a(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + a}{x(x+1)^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f_a(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + a}{(x+1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 - x + a}{(x+1)^2} = -2,$$

por tanto $y = x - 2$ es asíntota oblicua de f_a para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$.

94. Menor subanillo que contiene a un conjunto

Sean R un anillo y $\mathcal{F}$ una familia de subanillos de R .

1. Demostrar que $R_1 = \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S$ es subanillo de R .

2. Sea G un subconjunto de R y denotemos

$$R[G] = \bigcap_{S \in \mathcal{C}} S \text{ con } \mathcal{C} = \{S \text{ subanillo de } R : G \subset S\}.$$

Demostrar que $R[G]$ es el menor subanillo de R respecto de la inclusión que contiene a G .

3. Demostrar que $R[G]$ está constituido por todos los elementos de R que son sumas finitas de productos finitos de elementos de $G \cup (-G)$.

Solución. 1. Usamos el teorema de caracterización de subanillos. Como $0 \in S$ para todo $S \in \mathcal{F}$ deducimos que $0 \in R_1$ y por tanto $R_1 \neq \emptyset$. Si $a, b \in R_1$ entonces $a, b \in S$ para todo $S \in \mathcal{F}$ y por tanto $a - b \in S$ para todo $S \in \mathcal{F}$ por ser S subanillo. Es decir, $a - b \in R_1$. Análogamente, si $a, b \in R_1$ entonces $a, b \in S$ para todo $S \in \mathcal{F}$ y por tanto $ab \in S$ para todo $S \in \mathcal{F}$ por ser S subanillo. Es decir, $ab \in R_1$.

2. Por el apartado anterior, $R[G]$ es subanillo de R . Como $G \subset S$ para todo $S \in \mathcal{C}$, tenemos $G \subset \bigcap_{S \in \mathcal{C}} S = R[G]$. Por otra parte, si T es un subanillo de R que contiene a G entonces $T \in \mathcal{C}$ y por tanto $R[G] = \bigcap_{S \in \mathcal{C}} S \subset T$. La propiedad queda demostrada.

3. Llamemos X al conjunto de los elementos de R que son sumas finitas de productos finitos de elementos de $G \cup (-G)$ y veamos primeramente que X es subanillo de R contiene a G . Es claro que $G \subset X$ pues si $x \in G$, x es suma finita de productos finitos de elementos de $G \cup (-G)$ (un sumando y un factor: el x).

X es subanillo de R . En efecto, 0 es (según un conocido convenio) una suma vacía y por tanto pertenece a X es decir, $X \neq \emptyset$. Denotemos $G \cup (-G) =$

$\{g_i\}$ y sean $a, b \in X$, entonces

$$a = \sum_{\text{finita}} \left(\prod_{\text{finito}} g_i \right), \quad b = \sum_{\text{finita}} \left(\prod_{\text{finito}} g'_j \right) \quad \text{con } g_i, g'_j \in G \cup (-G),$$

$$a - b = \sum_{\text{finita}} \left(\prod_{\text{finito}} g_i \right) - \sum_{\text{finita}} \left(\prod_{\text{finito}} g'_j \right)$$

Si $g_1, \dots, g_m \in G \cup (-G)$ tenemos $-(g_1 g_2 \dots g_m) = (-g_1) g_2 \dots g_m \in G \cup (-G)$. Por tanto

$$a - b = \sum_{\text{finita}} \left(\prod_{\text{finito}} g_i \right) + \sum_{\text{finita}} \left(\prod_{\text{finito}} g''_j \right) \quad \text{con } g_i, g''_j \in G \cup (-G)$$

y por ser $a - b$ suma finita de productos finitos de $G \cup (-G)$, pertenece a X . Es claro que al aplicar la propiedad distributiva de R , ab es suma finita de productos finitos de $G \cup (-G)$ y por tanto pertenece a X . Como $R[G] \subset X$ (por el apartado anterior), basta demostrar que $X \subset R[G]$. Pero esto es claro pues al ser $G \subset X$ y $G \subset R[G]$ (subanillo), el producto finito de elementos de G está en $R[G]$ y la suma finita de elementos de G también está en $R[G]$.

95. Ecuación diferencial transformable en exacta por simplificación

Resolver la ecuación diferencial $(xy + y \log y)dx + (xy + x \log x)dy = 0$.

Solución. Fácilmente comprobamos que la ecuación no es diferencial exacta, ahora bien dividiendo entre xy obtenemos la ecuación

$$\left(1 + \frac{\log y}{x} \right) dx + \left(1 + \frac{\log x}{y} \right) dy = 0.$$

Se verifica $P_y = Q_x = 1/(xy)$ y por tanto al ecuación se transforma en una diferencial exacta. Busquemos u tal que $u_x = P$ y $u_y = Q$. Tenemos

$$u_x = P \Rightarrow u = \int P dx = \int \left(1 + \frac{\log y}{x} \right) dx = x + (\log y)(\log x) + \varphi(y).$$

Usando $u_y = Q$:

$$1 + \frac{\log x}{y} + \varphi'(y) = \frac{\log x}{y} \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = y + C.$$

La solución general es por tanto

$$y + x + (\log y)(\log x) + C = 0.$$

96. Sensibilidad a condiciones iniciales en métricas equivalentes

Sea (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados. Esto asegura que todo entorno de cualquier $x \in X$ contiene algún punto distinto de x . Sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación es decir, un sistema dinámico. Se dice que f es *sensible a condiciones iniciales* si existe un $\eta > 0$ tal que para todo $x \in X$ y para todo $\epsilon > 0$ existe $y \in X$ con $d(x, y) < \epsilon$ tal que para algún $n \geq 0$ se verifica $d(f^n(x), f^n(y)) > \eta$. Al número η se le llama *constante de sensibilidad* del sistema.

Sea ahora $X = (1, +\infty)$.

(a) Demostrar que $D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $D(x, y) = |\log x - \log y|$ define una distancia en X .

(b) Demostrar que D es equivalente a la distancia usual en X : $d(x, y) = |x - y|$.

(c) Demostrar que el sistema dinámico $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ dado por $f(x) = 2x$ es sensible a condiciones iniciales.

(d) Demostrar que el sistema dinámico $f : (X, D) \rightarrow (X, D)$ dado por $f(x) = 2x$ no es sensible a condiciones iniciales. Concluir.

Solución. (a) Existe $\log t$ para todo $t \in X$ y $D(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$. Tenemos $D(x, y) = 0 \Leftrightarrow |\log x - \log y| = 0 \Leftrightarrow \log x = \log y \Leftrightarrow x = y$. Para todo $x, y \in X$ se verifica $D(x, y) = |\log x - \log y| = |\log y - \log x| = D(y, x)$. Por último, para todo $x, y, z \in X$ tenemos

$$\begin{aligned} D(x, y) &= |(\log x - \log z) + (\log z - \log y)| \\ &\leq |\log x - \log z| + |\log z - \log y| = D(x, z) + D(z, y). \end{aligned}$$

Concluimos que D es distancia en X .

(b) Consideremos una bola $B_D(x, \epsilon) = \{y \in X : |\log x - \log y| < \epsilon\}$ y veamos que existe una bola $B_d(x, \delta)$ tal que $B_d(x, \delta) \subset B_D(x, \epsilon)$. Efectivamente, por ser $\log$ una función continua en x dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo y que cumpla $|x - y| < \delta$ se verifica $|\log x - \log y| < \epsilon$, es decir $D(x, y) < \epsilon$, luego para todo $y \in B_d(x, \delta)$ es $y \in B_D(x, \epsilon)$.

Recíprocamente, consideremos una bola $B_d(x, \epsilon)$ y veamos que existe una bola $B_D(x, \delta)$ tal que $B_D(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$. Efectivamente, como la función exponencial es continua dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\log y$ cumple $|\log x - \log y| < \delta$ entonces $|e^{\log x} - e^{\log y}| = |x - y| < \epsilon$, es decir $d(x, y) < \epsilon$ siempre que $D(x, y) < \delta$ luego $B_D(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$.

(c) Para todo $x, y \in X$ tenemos

$$d(f^n(x), f^n(y)) = |2^n x - 2^n y| = 2^n |x - y| \xrightarrow[\text{si } x \neq y]{} +\infty$$

lo cual implica claramente que f es sensible a condiciones iniciales.

(d) Para todo $x, y \in X$ tenemos

$$\begin{aligned} D(f^n(x), f^n(y)) &= |\log(2^n x) - \log(2^n y)| \\ &= \left| \log \frac{2^n x}{2^n y} \right| = |\log x - \log y| = D(x, y) \end{aligned}$$

lo cual implica claramente que f no es sensible a condiciones iniciales. Concluimos por tanto que la sensibilidad a condiciones iniciales no se conserva necesariamente por métricas equivalentes.

97. Factorización en $\mathbb{C}[x]$ de $p(x) = (x+1)^n + (x-1)^n$

Descomponer $p(x) = (x+1)^n + (x-1)^n \in \mathbb{C}[x]$ en factores lineales.

Solución. Hallemos las raíces complejas de $p(x)$. Tenemos

$$\begin{aligned} p(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+1)^n + (x-1)^n = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^n = -1 \\ \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} &= \sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{e^{\pi i}} = e^{(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n})i} = z_k, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Despejando x obtenemos las raíces

$$x_k = \frac{z_k + 1}{z_k - 1} = \frac{e^{(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n})i} + 1}{e^{(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n})i} - 1}.$$

Llamando $\alpha = \pi/n + 2k\pi/n$ tenemos

$$x_k = \frac{e^{\alpha i} + 1}{e^{\alpha i} - 1} = \frac{e^{(-\alpha/2)i}}{e^{(-\alpha/2)i}} \cdot \frac{e^{\alpha i} + 1}{e^{\alpha i} - 1} = \frac{e^{(\alpha/2)i} + e^{(-\alpha/2)i}}{e^{(\alpha/2)i} - e^{(-\alpha/2)i}}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \cot \frac{\alpha}{2} &= \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{e^{(\alpha/2)i} + e^{(-\alpha/2)i}}{2} : \frac{e^{(\alpha/2)i} - e^{(-\alpha/2)i}}{2i} \\ \Rightarrow x_k &= \frac{1}{i} \cot \frac{\alpha}{2} = -i \cot \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) = -i \cot \frac{(2k+1)\pi}{2n}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el coeficiente de mayor grado de $p(x)$ es 2 queda

$$p(x) = (x+1)^n + (x-1)^n = 2 \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)$$

Es decir,

$$(x+1)^n + (x-1)^n = 2 \prod_{k=0}^{n-1} \left(x + i \cot \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)$$

98. Grupos topológicos

Sea $(G, \cdot)$ un grupo y T una topología definida en G . Decimos que $(G, \cdot, T)$ es un *grupo topológico* si son continuas las aplicaciones

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G, & (x, y) &\rightarrow xy \\ G &\rightarrow G, & x &\rightarrow x^{-1} \end{aligned}$$

en donde en $G \times G$ se considera la topología producto. Es decir, han de ser continuas la operación del grupo y la operación inversión. Abreviadamente escribimos simplemente G para designar a un grupo topológico.

(a) Demostrar que todo grupo G es un grupo topológico con la topología discreta en G .

(b) Demostrar que todo subgrupo de un grupo topológico es un grupo topológico con respecto a la topología inducida.

(c) Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Demostrar que el grupo aditivo $(E, +)$ es grupo topológico cuando en E se considera la topología inducida por la norma.

Nota. Caso particular importante es el grupo topológico aditivo $\mathbb{R}^n$ con la topología inducida por la distancia euclídea.

(d) Sea $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ el grupo lineal de orden n , es decir

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \text{ es invertible}\}$$

con la operación producto. Demostrar que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es grupo topológico con la topología inducida por la métrica

$$d(A, B) = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij} - b_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \quad A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Solución. (a) Sabemos que el producto de una cantidad finita de espacios topológicos discretos es discreto en la topología producto. Esto implica trivialmente la continuidad de la aplicación operación del grupo y de la operación tomar inversos.

(b) Si H es un subgrupo de un grupo topológico G , la restricción de la multiplicación y la inversión a H son funciones continuas y como H es un subespacio topológico con la topología inducida tenemos que es un grupo topológico.

(c) Demostremos que la aplicación $E \times E \rightarrow E$, dada por $(x, y) \rightarrow x + y$ es uniformemente continua, con lo cual será continua. En efecto, sea $\epsilon > 0$ y elijamos $\delta = \epsilon/2$. Entonces,

$$\left\{ \begin{aligned} \|x - x'\| &< \delta \\ \|y - y'\| &< \delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|(x + y) - (x' + y')\|$$

$$\leq \|x - x'\| + \|y - y'\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Demostremos que para todo $a \in \mathbb{K}$, la función $E \rightarrow E$ dada por $x \rightarrow ax$ es uniformemente continua, con lo cual será continua en particular $x \rightarrow (-1)x = -x$. Si $a = 0$, el resultado es trivial. Si $a \neq 0$, sea $\epsilon > 0$. Entonces, eligiendo $\delta = \epsilon/|a|$:

$$\|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|ax - ax'\| = |a| \|x - x'\| < |a| \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon.$$

Concluimos que E es grupo topológico.

(d) Podemos identificar $\mathbb{R}^{n \times n}$ con $\mathbb{R}^{n^2}$ en la forma estándar

$$\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}, \quad A = [a_{ij}] \rightarrow a = (a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}),$$

con lo cual podemos considerar $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ y la distancia dada es la distancia euclídea en $\mathbb{R}^{n^2}$, es decir

$$d(a, b) = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij} - b_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

En la operación producto ab intervienen sumas y productos de las variables a_{ij} y b_{ij} y en a^{-1} , sumas, productos e inversos de números no nulos; que con la distancia euclídea sabemos que son operaciones continuas. Concluimos que las operaciones producto e inversión son continuas en $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

99. Convergencia de una serie según parámetro

Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \log \left(\cos \frac{1}{n} \right) \right|^p$ según el parámetro $p \in \mathbb{R}$.

Solución. Dado que $0 < 1/n < \pi/2$ para todo $n = 1, 2, \dots$, se verifica $\cos(1/n) > 0$ y por tanto la serie está bien definida. Se verifica

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} \underset{\text{indet. } 0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{1} = 1 \Rightarrow \log x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1.$$

Tenemos por tanto

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \frac{1}{n} \rightarrow 1 \Rightarrow \log \left(\cos \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\cos \frac{1}{n} \right) - 1.$$

Por otra parte sabemos que $1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2/2$ en consecuencia

$$\left(\cos \frac{1}{n}\right) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

En consecuencia la convergencia de la serie dada equivale a la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| -\frac{1}{2n^2} \right|^p = \frac{1}{2^p} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}.$$

Por el conocido teorema de las series de Riemann, la serie es convergente sii $2p > 1$, es decir sii $p > 1/2$.

100. Límite de una sucesión recurrente aplicando el criterio de Stolz

Se considera la sucesión a_n definida como

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}. \end{cases}$$

Demostrar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2}$.

Solución. Elevando al cuadrado tenemos:

$$a_{n+1}^2 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n = a_n^2 + a_n.$$

La sucesión es claramente creciente y de términos positivos, luego tiene límite $L \in (0, +\infty]$. Si L es finito, tomando límites en $a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_n$ obtenemos $L^2 = L^2 + L$ y por tanto $L = 0$, lo cual es absurdo. En consecuencia $\lim a_n = +\infty$. Por otra parte,

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_n \Rightarrow \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = 1 + \frac{1}{a_n} \Rightarrow (\lim a_n)^2 = 1 + 0 = 1 \Rightarrow \lim a_n = 1.$$

Además

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 = a_n^2 + a_n &\Rightarrow a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n \Rightarrow (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = a_n \\ &\Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{a_{n+1} + a_n} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n} + 1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim (a_{n+1} - a_n) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Por último

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Crit. Stolz}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

Fascículo 5

Monografías 101-125

101. Serie de los inversos de los números primos

Denotamos por p_n al enésimo número primo, es decir $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \dots$ y al conjunto de todos los números primos lo denotamos por $\mathbb{P}$. La letra p designará siempre un número primo, por ejemplo $\sum_{p \geq N} p$ denota a $p_N + p_{N+1} + p_{N+2} + \dots$.

Demostrar que la serie

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{p_n} + \dots$$

de la suma de los inversos de los números primos es divergente.

Solución. Razonamos por contradicción. Si $\sum_{p \in \mathbb{P}} 1/p$ es convergente de suma S , para $\epsilon = 1/2$ existe N natural tal que

$$S - S_N = \sum_{p > N} \frac{1}{p} < \frac{1}{2}.$$

Sea $Q = \prod_{p \leq N} p$ el producto de los números primos menores o iguales que N . Entonces, los números $1 + nQ$ con $n \in \mathbb{N}$ no son divisibles por primos menores que N . Efectivamente, si $p \leq N$ cumple $p \mid (1 + nQ)$ tendríamos $1 + nQ = pk$ con $k \in \mathbb{N}$. Por otra parte $p \mid Q$, es decir $Q = ps$ con $s \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$1 + nps = pk \text{ o bien } 1 = p(k - ns)$$

lo cual es absurdo. Consideremos ahora

$$P = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{p > N} \frac{1}{p} \right)^j < \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = 1.$$

Se verifica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+nQ} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{p>N} \frac{1}{p} \right)^j$$

porque cada término de la suma de la izquierda aparece en la suma de la derecha al menos una vez. Esto es claro, pues según se demostró, todo divisor primo p de $1+nQ$ es mayor que N . Además, $1/(1+nQ) \leq 1/p$. Deducimos por tanto que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+nQ} \leq 1.$$

Pero la serie de la ecuación anterior diverge pues

$$\sum_{n=1}^K \frac{1}{1+nQ} \geq \frac{1}{2Q} \sum_{n=1}^K \frac{1}{n}$$

para todo K y el lado derecho diverge para $K \rightarrow +\infty$ (serie armónica). La contradicción obtenida demuestra el teorema.

102. Los complejos no pueden ser un cuerpo ordenado

Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y $\leq$ una relación de orden total en K . Decimos que $(K, \leq)$ es un *cuerpo ordenado* si se verifican los axiomas

$$(K1) \quad \forall a, b, c \in K, \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c.$$

$$(K2) \quad \forall a, b \in K, \quad a \geq 0 \text{ y } b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0.$$

Es claro que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son cuerpos ordenados con el orden usual, sin embargo:

Demostrar que ningún orden total en $\mathbb{C}$ le puede dar estructura de cuerpo ordenado.

Solución. Supongamos que $(\mathbb{C}, \leq)$ fuera un cuerpo ordenado. Como $i \neq 0$ tenemos $i > 0$ o $i < 0$.

Primer caso: $i > 0$. Entonces

$$i^2 = i \cdot i \underbrace{\geq}_{\text{por (K2)}} 0 \Rightarrow -1 \geq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{por (K1)}} -1 + 1 \geq 0 + 1 \Rightarrow 0 \geq 1.$$

Por otra parte

$$-1 \geq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{por (K2)}} (-1)^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 0.$$

Al ser $1 \neq 0$ tenemos a la vez $0 > 1$ y $1 > 0$ lo cual es absurdo.

Segundo caso: $i < 0$. Entonces

$$0 - i \underbrace{\geq}_{\text{por (K1)}} i - i \Rightarrow -i \geq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{por (K2)}} (-i)^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \geq 0.$$

Por otra parte

$$-1 \geq 0 \text{ y } -i \geq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{por (K2)}} (-1)(-i) \geq 0 \Rightarrow i \geq 0.$$

No puede ser a la vez $i < 0$ e $i \geq 0$, con lo cual obtenemos otro absurdo.

103. Límite usando la fórmula de Taylor

$$\text{Calcular } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-8x^2} + \cos 4x}{10x^4}.$$

Solución. Usando los conocidos desarrollos de la exponencial y el coseno

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-8x^2} + \cos 4x}{10x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\left(1 + \frac{-8x^2}{1!} + \frac{(-8x^2)^2}{2!} + o(x^4)\right) + 1 - \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^4}{4!} + o(x^4)}{10x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{64}{3}x^4 + o(x^4)}{10x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{64}{3} + \frac{o(x^4)}{4}}{10} = \frac{-\frac{64}{3} + 0}{10} = -\frac{32}{15}. \end{aligned}$$

104. Condición necesaria y suficiente para que $A \cup B^c = B$

Sean A y B subconjuntos de un conjunto universal U . Determinar condiciones necesarias y suficientes para que se verifique la igualdad $A \cup B^c = B$.

Solución. Tenemos las implicaciones

$$\begin{aligned} A \cup B^c = B &\Rightarrow (A \cup B^c) \cup B = B \cup B \\ &\Rightarrow A \cup (B^c \cup B) = B \Rightarrow A \cup U = B \Rightarrow U = B. \end{aligned}$$

Es decir, necesariamente ha de ser $B = U$. Por otra parte, si $B = U$,

$$A \cup U^c = U \Rightarrow A \cup \emptyset = U \Rightarrow A = U.$$

Por tanto, para que se cumpla $A \cup B^c = B$ es necesario que $A = B = U$. También es suficiente pues $U \cup U^c = U \cup \emptyset = U$.

105. Condiciones suficientes para la irreducibilidad en $\mathbb{K}[x]$

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $p(x) \in \mathbb{K}[x]$.

- (a) Demostrar que si $\text{grado } p(x) = 1$, entonces $p(x)$ es irreducible.
- (b) Demostrar que si $p(x)$ es un polinomio cuadrático o cúbico sin raíces en $\mathbb{K}$, entonces $p(x)$ es irreducible.
- (c) Demostrar que los siguientes polinomios de $\mathbb{Z}_2[x]$ son irreducibles:

$$x, x+1, x^2+x+1, x^3+x+1, x^3+x^2+1.$$

- (d) Descomponer $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ en producto de factores irreducibles.
- (e) Descomponer $p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ en producto de factores irreducibles.

Solución. (a) Si $p(x) = q(x)h(x)$ entonces,

$$1 = \text{grado } p(x) = \text{grado } q(x) + \text{grado } h(x).$$

Esto implica que $\text{grado } q(x) = 0$ o bien $\text{grado } h(x) = 0$, es decir o bien $q(x)$ o bien $h(x)$ es una unidad y por tanto $p(x)$ es irreducible.

(b) Si $\text{grado } p(x) = 2$ o 3 y $p(x)$ no tiene ceros en $\mathbb{K}$, entonces no tiene factores de grado 1. Si $p(x) = q(x)h(x)$ tendríamos o bien

$$2 = \text{grado } q(x) + \text{grado } h(x) \text{ o bien, } 3 = \text{grado } q(x) + \text{grado } h(x).$$

Pero al ser los grados de $q(x)$ y $h(x)$ distintos de 1, lo cual implica en ambos casos que o bien el grado de $q(x)$ o el de $h(x)$ ha de ser cero luego $p(x)$ es irreducible.

(c) Los dos primeros polinomios son de primer grado. Los restantes son de grado 2 o 3 y claramente no tienen raíces en $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Por lo demostrado en los apartados (a) y (b), concluimos que todos los polinomios dados son irreducibles.

(d) Tenemos $p(1) = 0$. Aplicando el algoritmo de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow p(x) = (x-1)\underbrace{(x^3+x+1)}_{p_1(x)}.$$

Ahora bien, vimos en el apartado (c) que $p_1(x)$ es irreducible luego la descomposición pedida es $p(x) = (x-1)p_1(x)$.

(e) Tenemos $p(-1) = 0$. Aplicando el algoritmo de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & & -1 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow p(x) = (x+1)\underbrace{(x^2-2)}_{p_1(x)}.$$

El polinomio $p_1(x)$ es de grado 2 y no tiene raíces racionales, por tanto es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ luego la factorización pedida es $p(x) = (x+1)p_1(x)$.

106. Teorema de los círculos de Gershgorin

Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$ consideremos los círculos cerrados del plano complejo

$$D_i = D(a_{ii}, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\} \text{ con } r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

A tales círculos se les llama *círculos de Gershgorin*. Cada círculo D_i tiene su centro en el elemento a_{ii} de la diagonal principal y su radio es la suma de los módulos de los restantes elementos de la fila i .

(a) Demostrar el teorema de los círculos de Gershgorin:

Cada valor propio de A pertenece a algún círculo de Gershgorin.

(b) Aplicar el teorema a la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) Idem para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(d) Idem para la matriz $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

(e) Deducir un teorema parecido al de Gershgorin que involucre elementos de columnas.

Solución. (a) Sea λ un valor propio de A y sea $0 \neq x = (x_j)$ un vector propio asociado a λ . Llamemos x_i a la coordenada de x de mayor módulo. Claramente $|x_i| > 0$ pues en otro caso sería $x = 0$. Se verifica $Ax = \lambda x$, es decir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

o bien,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \lambda x_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

De forma equivalente $\sum_{j \neq i} a_{ij}x_j = \lambda x_i - a_{ii}x_i$ y dividiendo ambos miembros entre x_i y tomando módulos

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \frac{\sum_{j \neq i} a_{ij}x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{ij}x_j}{x_i} \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| = r_i.$$

Es decir, $\lambda \in D(a_{ii}, r_i)$.

(b) Hallemos sus valores propios: $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3 = 0$, $\lambda = \pm\sqrt{3}$. Los círculos de Gershgorin son $D_1 = D(1, 2)$, $D_2 = D(-1, 1)$.

Con un sencillo gráfico podemos verificar que $-\sqrt{3} \in D_2$ y que $\sqrt{3} \in D_1$. En éste caso, ocurre además que $-\sqrt{3} \notin D_1$ y $\sqrt{3} \notin D_2$.

(c) Sus valores propios: $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda = \pm i$. Los círculos de Gershgorin son $D_1 = D(1, 1)$, $D_2 = D(-1, 2)$.

Con un sencillo gráfico podemos verificar que $-i \in D_2$, $i \in D_2$. Sin embargo, D_1 no contiene a ningún valor propio de A . Nótese que el teorema de Gershgorin asegura que todo valor propio pertenece a algún círculo, pero puede que algún círculo no contenga valores propios.

(d) Sus valores propios son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y sus círculos de Gershgorin

$$D_1(\lambda_1, 0) = \{\lambda_1\}, D_2(\lambda_2, 0) = \{\lambda_2\}, \dots, D_n(\lambda_n, 0) = \{\lambda_n\}$$

con lo cual, $\lambda_i \in D_i(\lambda_i, 0)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

(e) Dado que toda matriz A y su traspuesta A^T tienen los mismos valores propios, el teorema de Gershgorin sigue siendo válido si consideramos los discos

$$D'_i = D(a_{ii}, r'_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r'_i\} \text{ con } r'_i = \sum_{j \neq i} |a_{ji}|.$$

Es decir, cada círculo D'_i tiene su centro en el elemento a_{ii} de la diagonal principal y su radio es la suma de los módulos de los restantes elementos de la columna i .

107. Derivada $f^{(2016)}(0)$ para $f(x) = x^2 \log(x+1)$

Calcular $f^{(2016)}(0)$, siendo $f(x) = x^2 \log(x+1)$.

Solución. La regla de Leibniz para la derivada enésima del producto es

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$$

En nuestro caso, tomando $u(x) = \ln(x+1)$ y $v(x) = x^2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(0)}(x) = \log(1+x) \\ u^{(1)}(x) = (x+1)^{-1} \\ u^{(2)}(x) = -1(x+1)^{-2} \\ u^{(3)}(x) = 2(x+1)^{-3} \\ \vdots \\ u^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} (n-1)! (x+1)^{-n} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} v^{(0)}(x) = x^2 \\ v^{(1)}(x) = 2x \\ v^{(2)}(x) = 2 \\ v^{(3)}(x) = 0 \\ \vdots \\ v^{(n)}(x) = 0 \end{array} \right.$$

Particularizando en $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(0)}(0) = 0 \\ u^{(1)}(0) = 1 \\ u^{(2)}(0) = -1 \\ u^{(3)}(0) = 2 \\ \vdots \\ u^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)! \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v^{(0)}(0) = 0 \\ v^{(1)}(0) = 0 \\ v^{(2)}(0) = 2 \\ v^{(3)}(0) = 0 \\ \vdots \\ v^{(n)}(0) = 0 \end{array} \right.$$

Queda por tanto:

$$\begin{aligned} f^{(2016)}(0) &= (uv)^{(2016)}(0) = \binom{2016}{2} u^{(2014)}(0) v^{(2)}(0) \\ &= \binom{2016}{2} (-1)(2013)! \cdot 2 = -\frac{2016!}{1007}. \end{aligned}$$

108. Factorización de un polinomio homogéneo en $\mathbb{R}[x, y]$

Factorizar $P(x, y) = 30x^4 - 41x^3y - 129x^2y^2 + 100xy^3 + 150y^4 \in \mathbb{R}[x, y]$.

Solución. Consideremos $P(x, y)$ como polinomio de $(\mathbb{R}[y])[x]$:

$$P(x, y) = 30x^4 + (-41y)x^3 + (-129y^2)x^2 + (100y^3)x + 150y^4$$

y ensayemos soluciones de la forma $x = ky$. Entonces,

$$P(ky, y) = (30k^4 - 41k^3 - 129k^2 + 100k + 150)y^4 = 0.$$

Aplicando el teorema de las raíces racionales a la ecuación

$$30k^4 - 41k^3 - 129k^2 + 100k + 150 = 0,$$

obtenemos las soluciones $k = -3/2$ y $k = 5/3$, luego

$$x = -\frac{3}{2}y, \quad x = \frac{5}{3}y$$

son raíces de $P(x, y)$. Podemos por tanto escribir

$$P(x, y) = \left(x + \frac{3}{2}y\right) \left(x - \frac{5}{3}y\right) Q(x, y).$$

Usando el algoritmo de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -\frac{3}{2}y & 30 & -41y & -129y^2 & 100y^3 & 150y^4 \\
 & & -45y & 129y^2 & 0 & -150y^4 \\
 \hline
 & 30 & -86y & 0 & 100y^3 & 0
 \end{array}$$

$$\Rightarrow P(x, y) = \left(x + \frac{3}{2}y\right) \underbrace{(30x^3 - 86yx^2 + 100y^3)}_{Q_1(x, y)}.$$

Aplicando de nuevo el algoritmo a $Q_1(x, y)$:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 \frac{5}{3}y & 30 & -86y & 0 & 100y^3 \\
 & & 50y & -60y^2 & -100y^3 \\
 \hline
 & 30 & -36y & -60y^2 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow P(x, y) &= \left(x + \frac{3}{2}y\right) \underbrace{(30x^3 - 86yx^2 + 100y^3)}_{Q_1(x, y)} \\
 &= \left(x + \frac{3}{2}y\right) \left(x - \frac{5}{3}y\right) (30x^2 - 36yx - 60y^2) \\
 &= \frac{1}{6}(2x + 3y)(3x - 5y) (30x^2 - 36yx - 60y^2) \\
 &= (2x + 3y)(3x - 5y) (5x^2 - 6yx - 10y^2).
 \end{aligned}$$

Factoricemos ahora $Q_2(x, y) = 5x^2 - 6yx - 10y^2$. Resolviendo la ecuación de segundo grado en x :

$$5x^2 - 6yx - 10y^2 = 0, \quad x = \frac{6y \pm \sqrt{236y^2}}{10} = \frac{6y \pm 2\sqrt{59}y}{10},$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{59}}{5}y, \quad x = \frac{3 - \sqrt{59}}{5}y$$

Podemos por tanto expresar

$$\boxed{P(x, y) = 5(2x + 3y)(3x - 5y) \left(x - \frac{3 + \sqrt{59}}{5}y\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{59}}{5}y\right)}$$

109. Rango de una función definida en $[0, 1]$

Determinar el rango de la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(1+x)^{0,6}}{1+x^{0,6}}$.

Solución. La función es elemental y está definida en $[0, 1]$, en consecuencia es continua. Analicemos su comportamiento en términos de crecimiento o decrecimiento. Para todo $x \in [0, 1]$ tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{0,6(1+x)^{-0,4}(1+x^{0,6}) - 0,6x^{-0,4}(1+x)^{0,6}}{(1+x^{0,6})^2} \\ &= 0,6 \cdot \frac{\frac{1+x^{0,6}}{(1+x)^{0,4}} - \frac{(1+x)^{0,6}}{x^{0,4}}}{(1+x^{0,6})^2} = 0,6 \cdot \frac{x^{0,4} + x - (1+x)}{(1+x)^{0,4}x^{0,4}(1+x^{0,6})^2} \\ &= 0,6 \cdot \frac{x^{0,4} - 1}{(1+x)^{0,4}x^{0,4}(1+x^{0,6})^2}. \end{aligned}$$

Para todo $x \in [0, 1]$ el denominador es positivo y el numerador negativo, luego $f'(x) < 0$ y la función es estrictamente decreciente. Por otra parte tenemos

$$f(0) = 1, \quad f(1) = \frac{2^{0,6}}{1+1} = \frac{2^{3/5}}{2} = \frac{1}{2^{2/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}.$$

Del teorema de los valores intermedios para funciones continuas, deducimos que

$$\boxed{\text{rango } f = \left[\frac{1}{\sqrt[5]{4}}, 1 \right]}$$

110. Topología cociente en X/R

Sea (X, T) un espacio topológico, R una relación de equivalencia en X y $\pi : X \rightarrow X/R$ la proyección canónica es decir, la aplicación dada por $\pi(x) = \bar{x}$ en donde $\bar{x}$ es la clase de equivalencia a la que pertenece x .

(a) Demostrar que

$$T_R := \{U \subset X/R : \pi^{-1}(U) \in T\}$$

es una topología en X/R . Se la denomina *topología cociente de X por R* .

(b) Describir intuitivamente la topología cociente en términos de “pegar puntos”.

(c) Demostrar que $\pi : (X, T) \rightarrow (X/R, T_R)$ es continua y que T_R es la topología más fina sobre X/R de entre todas las que hacen a π continua.

(d) En $X = \{0, 1, 2, 3\}$ se consideran la topología T y la relación de equivalencia R dadas por

$$T = \{\emptyset, X\{0, 1\}, \{2, 3\}\}, \quad xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k$$

Determinar la topología cociente T_R .

Solución. (a) Veamos que T_R cumple los tres axiomas de topología.

i) Tenemos $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T$ y $\pi^{-1}(X/R) = X \in T$, luego $\emptyset$ y X/R pertenecen a T_R .

ii) Si $\{U_i : i \in I\}$ es una familia de elementos de T_R entonces, $\pi^{-1}(U_i) \in T$ para todo i , con lo cual

$$\pi^{-1}\left(\bigcup U_i\right) = \bigcup \underbrace{\pi^{-1}(U_i)}_{\in T} \in T \Rightarrow \bigcup U_i \in T_R.$$

iii) Si U_1, U_2 son elementos de T_R entonces, $\pi^{-1}(U_1), \pi^{-1}(U_2) \in T$, con lo cual

$$\pi^{-1}(U_1 \cap U_2) = \underbrace{\pi^{-1}(U_1)}_{\in T} \cap \underbrace{\pi^{-1}(U_2)}_{\in T} \in T \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in T_R.$$

(b) Supongamos, por ejemplo, que $U = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ es abierto en T/R , y sean

$$\bar{x} = \{x_i : i \in I\}, \quad \bar{y} = \{y_j : j \in J\}, \quad \bar{z} = \{z_k : k \in K\},$$

entonces es abierto en X :

$$\pi^{-1}(\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}) = \{x_i : i \in I\} \cup \{y_j : j \in J\} \cup \{z_k : k \in K\}.$$

Es decir, del conjunto abierto de la derecha en X hemos pasado al abierto $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ de X/R “pegando” los puntos que pertenecen a una misma clase de equivalencia.

(c) Si $U \in T_R$ entonces, $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X por la propia definición de T_R , luego π es continua.

Sea T' una topología en X/R respecto de la cual $\pi : (X, T) \rightarrow (X/R, T')$ es continua. Entonces, si $U \in T'$ se verifica $\pi^{-1}(U) \in T$ y por tanto $U \in T_R$. Es decir, $T' \subset T_R$.

(d) Las clases de equivalencia son $\bar{0} = \{0, 3\}$, $\bar{1} = \{1\}$ y $\bar{2} = \{2\}$, por tanto el conjunto cociente es $X/R = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Siempre $\emptyset$ y X pertenecen a la topología cociente. Analicemos los restantes subconjuntos de X/R :

$$\pi^{-1}(\{\bar{0}\}) = \{0, 3\} \notin T \Rightarrow \{\bar{0}\} \notin T_R,$$

$$\pi^{-1}(\{\bar{1}\}) = \{1\} \notin T \Rightarrow \{\bar{1}\} \notin T_R,$$

$$\pi^{-1}(\{\bar{2}\}) = \{2\} \notin T \Rightarrow \{\bar{2}\} \notin T_R,$$

$$\pi^{-1}(\{\bar{0}, \bar{1}\}) = \{0, 3, 1\} \notin T \Rightarrow \{\bar{0}, \bar{1}\} \notin T_R,$$

$$\pi^{-1}(\{\bar{0}, \bar{2}\}) = \{0, 3, 2\} \notin T \Rightarrow \{\bar{0}, \bar{2}\} \notin T_R,$$

$$\pi^{-1}(\{\bar{1}, \bar{2}\}) = \{1, 2\} \notin T \Rightarrow \{\bar{1}, \bar{2}\} \notin T_R.$$

Concluimos que $T_R = \{\emptyset, X\}$ (topología indiscreta).

111. Acotación del rango del producto de dos matrices

Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y A y B matrices multiplicables con elementos en $\mathbb{K}$. Demostrar que $\text{rango}(AB) \leq \min\{\text{rango } A, \text{rango } B\}$.

Solución. Supongamos que $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n], \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}.$$

Multiplicando,

$$\begin{aligned} AB &= [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \\ &= [b_{11}\mathbf{a}_1 + \dots + b_{n1}\mathbf{a}_n, \dots, b_{1p}\mathbf{a}_1 + \dots + b_{np}\mathbf{a}_n]. \end{aligned}$$

Es decir, las columnas de AB son combinaciones lineales de las columnas de A . Esto implica que el subespacio generado por las columnas de AB está contenido en el generado por las columnas de A y por tanto, $\text{rango}(AB) \leq \text{rango } A$.

Veamos ahora que $\text{rango}(AB) \leq \text{rango } B$. Usando que $\text{rango } M = \text{rango } M^T$ y aplicando la propiedad ya demostrada:

$$\text{rango}(AB) = \text{rango}((AB)^T) = \text{rango}(B^T A^T) \leq \text{rango } B^T = \text{rango } B.$$

Concluimos pues que $\text{rango}(AB) \leq \min\{\text{rango } A, \text{rango } B\}$.

112. Espacio vectorial como suma directa de dos núcleos

Sea $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(E)$ y $f, g, h \in \mathbb{K}[t]$ tales que

$$f(t) = g(t)h(t), \quad f(T) = 0, \quad g, h \text{ primos entre sí.}$$

Demostrar que $E = \ker g(T) \oplus \ker h(T)$.

Solución. Al ser g y h son primos entre sí, existen (lema de Bezout) polinomios $r(t)$ y $s(t)$ tales que $r(t)g(t) + s(t)h(t) = 1$, lo cual implica que

$$r(T)g(T) + s(T)h(T) = I.$$

Entonces, para todo $x \in E$ se verifica

$$x = r(T)g(T)x + s(T)h(T)x.$$

Veamos que el primer término de la suma anterior pertenece a $\ker h(T)$. En efecto

$$h(T)r(T)g(T)x = r(T)g(T)h(T)x = r(T)\underbrace{f(T)}_{=0}x = 0.$$

De la misma manera se demuestra que el segundo término pertenece a $\ker h(T)$, con lo cual $E = \ker g(T) + \ker h(T)$. Falta demostrar que $\ker g(T) \cap \ker h(T) = \{0\}$. Tenemos

$$x \in \ker g(T) \cap \ker h(T) \Rightarrow g(T)x = 0 \wedge h(T)x = 0$$

$$\Rightarrow x = r(T)g(T)x + s(T)h(T)x = 0 + 0 = 0.$$

Concluimos que $E = \ker g(T) \oplus \ker h(T)$.

113. Desigualdad de Schwarz y norma en los espacios prehilbertianos

Sea P un espacio prehilbertiano, es decir un espacio vectorial complejo con producto escalar. Para todo $x \in P$ se define la *norma* (o *longitud*) de x como el número real no negativo $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

1. Demostrar que para todo $x, y \in P$ se verifica la desigualdad de Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

2. Demostrar que efectivamente la aplicación $\| \cdot \|$ satisface las tres propiedades de una norma.

Solución. 1. Llamemos $a = \langle x, x \rangle \geq 0$, $b = \langle x, y \rangle$, $c = \langle y, y \rangle \geq 0$. Entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle &= \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle \\ &= a + \bar{b}\lambda + b\bar{\lambda} + c\lambda\bar{\lambda} \geq 0. \quad (*)\end{aligned}$$

Primer caso: $c \neq 0$. Tomando $\lambda = -b/c$ y sustituyendo en (*):

$$\begin{aligned}a - \frac{\bar{b}b}{c} - \frac{b\bar{b}}{c} + c\frac{b\bar{b}}{c^2} &= a - \frac{b\bar{b}}{c} \geq 0 \Rightarrow ac - |b|^2 \geq 0 \\ \Rightarrow \|x\|^2 \|y\|^2 &\geq |\langle x, y \rangle|^2 \Rightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.\end{aligned}$$

Segundo caso: $c = 0$. Si $a \neq 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle &= \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle + \bar{\lambda} \langle y, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= |\lambda|^2 a + \bar{\lambda} b + \lambda b \geq 0.\end{aligned}$$

Tomando $\lambda = -\bar{b}/a$ en la desigualdad anterior y teniendo en cuenta que $a > 0$

$$\frac{|b|^2}{a^2} a - \frac{|b|^2}{a} - \frac{|b|^2}{a} = -\frac{|b|^2}{a} \geq 0 \Rightarrow |b|^2 \leq 0,$$

con lo cual ha de ser $b = \langle x, y \rangle = 0$ y la desigualdad $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ se satisface trivialmente. Por último, si $a = 0$, tomando $\lambda = -b$ en (*) queda $-2b\bar{b} \geq 0$ o bien $b\bar{b} = |b|^2 \leq 0$ lo cual implica que $b = \langle x, y \rangle = 0$ y la desigualdad $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ de nuevo se satisface trivialmente.

2. (a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(b) $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2$, lo cual implica $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

(c) Tenemos

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \underbrace{\leq}_{\text{Des. Schw.}} \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

y tomando raíces cuadradas queda $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

114. Espacio prehilbertiano de las sucesiones finitamente no nulas

(a) Sea P el espacio vectorial complejo de las sucesiones complejas $x = (x_n)$ finitamente no nulas, (es decir con sólo un número finito de términos no nulos), con las operaciones habituales. Demostrar que P es prehilbertiano con $\langle x, y \rangle = \sum x_j \overline{y_j}$.

(b) Demostrar que P no es de Hilbert.

Solución. (a) Para todo $x, y \in P$, $\langle y, x \rangle = \sum y_j \overline{x_j} = \sum \overline{x_j \overline{y_j}} = \overline{\sum x_j \overline{y_j}} = \overline{\langle x, y \rangle}$.

Para todo $x, y, z \in P$,

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= \sum (x_j + y_j) \overline{z_j} = \sum (x_j \overline{z_j} + y_j \overline{z_j}) \\ &= \sum x_j \overline{z_j} + \sum y_j \overline{z_j} = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle. \end{aligned}$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y para todo $x \in P$,

$$\langle \alpha x, y \rangle = \sum (\alpha x_j) \overline{y_j} = \sum \alpha (x_j \overline{y_j}) = \alpha \sum x_j \overline{y_j} = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Para todo $0 \neq x \in P$ existe al menos un x_j no nulo, por tanto:

$$\langle x, x \rangle = \sum x_j \overline{x_j} = \sum |x_j|^2 > 0.$$

(b) Consideremos los elementos de P

$$\begin{aligned} s_1 &= (1, 0, 0, \dots) \\ s_2 &= (1, 1/2, 0, 0, \dots) \\ s_3 &= (1, 1/2, 1/3, 0, 0, \dots) \\ &\dots \\ s_n &= (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, 0, 0, \dots) \\ &\dots \end{aligned}$$

Para todo n, k enteros no negativos tenemos

$$\|s_{n+k} - s_n\|^2 = \left\| \left(0, \dots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+k}, 0, \dots \right) \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{n+k} \frac{1}{j^2}.$$

Como la serie $\sum_1^\infty 1/j^2$ es convergente, se verifica

$$d(x_{n+k}, x_n) = \|s_{n+k} - s_n\| \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty$$

lo cual implica que s_n es sucesión de Cauchy. Veamos ahora que s_n no es convergente en P . En efecto, supongamos que $s_n \rightarrow s$ con

$$s = (a_1, a_2, \dots, a_N, 0, 0, \dots) \in P.$$

Para $n \geq N$

$$\|s_n - s\|^2 = \sum_{j=1}^n \left| \frac{1}{j} - a_j \right|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|^2 = \sum_{j=1}^n \left| \frac{1}{j} - a_j \right|^2 + 0.$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ obtenemos $\sum_{j=1}^{\infty} |1/j - a_j|^2 = 0$ lo cual exige $a_j = 1/j$ para todo j , que contradice la hipótesis $s \in P$.

115. $\langle 2, x \rangle$ no es ideal principal en $\mathbb{Z}[x]$

Demostrar que el ideal de $\mathbb{Z}[x]$ dado por $I = \langle 2, x \rangle$ no es principal.

Solución. Por definición,

$$I = \langle 2, x \rangle = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] : f(x) = g(x)x + 2h(x) \text{ con } g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]\}.$$

El término constante de todo polinomio $f(x)$ ha de ser par y recíprocamente, si $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ con a_0 par, entonces

$$f(x) = (a_n x^{n-1} + \dots + a_1) x + \frac{a_0}{2} \cdot 2 \in I.$$

Por tanto, $I = \langle 2, x \rangle = \{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 : a_0 \text{ es par}\}$. Veamos que I no es ideal principal. En efecto, si lo fuera existiría $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $I = \langle p(x) \rangle$. Pueden ocurrir dos casos.

1) $p(x) = k \neq 0$ constante. Entonces $k = 1 \cdot k \in \langle p(x) \rangle$ y por tanto k ha de ser par. Esto implica que todos los polinomios de I son de la forma $kg(x)$, es decir todos los polinomios de $\langle p(x) \rangle$ tienen todos sus coeficientes pares y $x \notin \langle p(x) \rangle$ (contradicción).

2) $p(x)$ tiene grado ≥ 1 . En tal caso, los polinomios de $\langle p(x) \rangle$ tienen grado ≥ 1 y $2 \notin \langle p(x) \rangle$ (contradicción).

116. Teorema de la buena ordenación de Zermelo.

Sea E un conjunto no vacío.

(a) Demostrar que en todo subconjunto finito de E se puede definir un buen orden.

(b) Consideremos todos los subconjuntos A de E para los cuales se puede

definir un buen orden y elijamos uno de tales órdenes, al que denotamos por $\leq_A$. Llamemos

$$\mathcal{O} = \{(A, \leq_A) : A \subset E \text{ con } \leq_A \text{ buen orden en } A\}.$$

Definimos en $\mathcal{O}$ la relación $\preceq$

$$(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B) \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} 1) & A \subset B, \\ 2) & \leq_A \text{ es la restricción de } \leq_B \text{ a } A, \\ 3) & a \in A, b \in B, b <_B a \Rightarrow b \in A. \end{cases}$$

Demostrar que $\preceq$ es relación de orden en $\mathcal{O}$.

(c) Demostrar que si $\mathcal{O}$ tiene un elemento maximal, el conjunto E puede ser bien ordenado.

(d) Demostrar que toda cadena de $\mathcal{O}$ (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior.

(e) Aplicar el lema de Zorn para demostrar que E puede ser bien ordenado.

Solución. (a) Para cualquier subconjunto finito F de E podemos establecer una biyección $j : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow F$ y llamando $j(i) = x_i$ podemos definir el buen orden en F dado por $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

(b) Por el apartado anterior, $\mathcal{O} \neq \emptyset$.

Reflexiva. Trivialmente tenemos $A \subset A$, $\leq_A$ es la restricción de $\leq_A$ a A y $b \in A$ implica $b \in A$, luego $(A, \leq_A) \preceq (A, \leq_A)$.

Antisimétrica. Si $(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$ y $(B, \leq_B) \preceq (A, \leq_A)$ se verifica $A \subset B$ y $B \subset A$, luego $A = B$ y $\leq_A = \leq_B$ por 2), por tanto $(A, \leq_A) = (B, \leq_B)$.

Transitiva. Supongamos que $(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$ y $(B, \leq_B) \preceq (C, \leq_C)$. De la condición 1) se deduce que $A \subset B \subset C$ y de la 2) que $\leq_A$ es la restricción de $\leq_C$ a A .

Sean ahora $a \in A$, $c \in C$ con $c <_C a$. Esto implica que $a \in B$ y $c \in C$ con $a <_C c$ lo cual implica que $c \in B$. Entonces, $a \in A$, $c \in B$ y $c <_B a$ con lo cual $a \in A$. Es decir, $(A, \leq_A) \preceq (C, \leq_C)$.

(c) Sea $(A, \leq_A)$ un elemento maximal en $\mathcal{O}$, veamos que $A = E$. En efecto, si $A \neq E$ sea $b \in E - A$. En $B = A \cup \{b\}$ podemos definir el orden $\leq_B$ que coincide con $\leq_A$ en A y $a \leq b$ para todo $a \in A$. Claramente $\leq_B$ es un buen orden en B y $(A, \leq_A) \prec (B, \leq_B)$ contra la hipótesis.

(d) Sea $\mathcal{C} = \{(A_\lambda, \leq_{A_\lambda}) : \lambda \in \Lambda\}$ una cadena de $\mathcal{O}$ y sea $\mathcal{F} = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Es claro que la familia $\mathcal{F}$ es ella misma una cadena con respecto de la relación de orden inclusión. Llamemos $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, y vamos a definir un orden en U .

Consideremos un número finito $u_1, u_2, \dots, u_n$ de elementos de U . Para cada $i = 1, 2, \dots, n$ existe un $A_i \in \mathcal{F}$ tal que $u_i \in A_i$ y al ser $\mathcal{F}$ una

cadena, uno de los A_i (llamemósle A) contiene a todos los A_i y por tanto $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset A$. Sea ahora $B \in \mathcal{F}$ con $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset B$, la relación $u_i \leq_A u_j$ implica $u_i \leq_B u_j$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ pues $\mathcal{C}$ es una cadena.

Tomemos $n = 2$ y definamos el orden $\leq_U$ en U escribiendo $u_1 \leq_U u_2$ si $u_1 \leq_A u_2$ siendo A cualquier elemento de $\mathcal{F}$ que contiene a u_1 y u_2 . Claramente la relación $\leq_U$ es reflexiva y antisimétrica y tomando $n = 3$ deducimos que es transitiva. Es además orden total por construcción.

Demostremos que $\leq_U$ es un buen orden en U . Sea $S \subset U$ con $S \neq \emptyset$ y veamos que S tiene elemento mínimo. Sea $s \in S$. Si s es mínimo, ya está demostrado. Si no lo es, sea el conjunto no vacío

$$T = \{t \in S : t <_U s\}.$$

Sea $(A, \leq_A)$ un elemento de la cadena $\mathcal{C}$ tal que $s \in A$ y sea $(B, \leq_B)$ un elemento de la cadena $\mathcal{C}$ tal que $t \in B$. Dado que $\mathcal{F}$ es una cadena, o bien $B \subset A$ y entonces $t \in A$, o bien $A \subsetneq B$ y entonces $s \in A$, $t \in B$, $t <_U s$ luego según la definición del orden $\preceq$ en $\mathcal{O}$, $t \in A$. Es decir, en cualquier caso $t \in A$, luego $T \subset A$.

Como T es subconjunto no vacío de A (que está bien ordenado), T admite un elemento mínimo m en el orden $\leq_A$. Ahora bien, al ser $T \subset A \subset U$, las restricciones de los órdenes $\leq_A$ y $\leq_U$ a T coinciden, luego T admite a m como mínimo en el orden $\leq_U$. Como $\leq_U$ es un orden total, m es también elemento mínimo de S , luego $\leq_U$ es buen orden. Es decir, hemos demostrado que $(U, \leq_U) \in \mathcal{O}$.

Veamos ahora que $(U, \leq_U)$ es cota superior de la cadena $\mathcal{C}$ es decir, veamos que

$$(A, \leq_A) \preceq (U, \leq_U), \quad \forall (A, \leq_A) \in \mathcal{C}.$$

En efecto, $A \subset U$ por construcción y $\leq_A$ es la restricción de $\leq_U$ a A . Sean ahora $a \in A$, $x \in U$ tales que $x <_U a$. Existe un X en la cadena $\mathcal{F}$ que contiene a $\{x\} \cup A$ y consideremos $(X, \leq_X) \in \mathcal{C}$. Entonces,

$$(A, \leq_A) \preceq (X, \leq_X),$$

y por tanto la desigualdad $x <_U a$ implica $x \in A$. Al ser U mayorante mínimo de la cadena $\mathcal{F}$, el par $(U, \leq_U)$ es mayorante mínimo de la cadena $\mathcal{C}$. Hemos demostrado que la cadena $\mathcal{C}$ tiene cota superior.

(e) Por el lema de Zorn, existe un elemento maximal en $(\mathcal{O}, \preceq)$, y como consecuencia del apartado (c), existe un buen orden en E .

117. Teorema de los valores extremos sobre un compacto

(a) Demostrar el teorema de los valores extremos sobre un compacto: Sea (X, T) un espacio topológico, $K \subset X$ un compacto no vacío y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en donde en $\mathbb{R}$ se considera la topología usual. Demostrar que la función f alcanza un máximo y mínimo absoluto en K .

(b) Se considera la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x^3 + \cos x|$. Demostrar que f alcanza en $[0, 1]$ un máximo y un mínimo absolutos.

Solución. (a) Dado que K es compacto y f es continua, $f(K)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y por tanto cerrado y acotado. Por ser $f(K)$ acotado existen

$$-\infty < m = \inf f(K), \quad M = \sup f(K) < +\infty.$$

Por ser $f(K)$ cerrado, $m, M \in f(K)$ y por tanto existen $x_1, x_2 \in K$ tales que $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ y el teorema queda demostrado.

(b) La función $g(x) = x^3 + \cos x$ es elemental y está definida en $[0, 1]$, en consecuencia es continua en tal intervalo. Por otra parte, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = |x|$ es continua y además $f = h \circ g$. Como la composición de funciones continuas es continua, f es continua en el compacto $[0, 1]$. Por el teorema anterior, f alcanza en $[0, 1]$ un máximo y un mínimo absolutos.

118. Métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus valores propios (repetidos o no) y sea

$$\rho(A) = \max \{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}.$$

su radio espectral. Según sabemos,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1 \quad (1)$$

para cualquier norma en $\mathbb{C}^{n \times n}$.

(a) Sea ahora A invertible y consideremos el sistema lineal $Ax = b$ con $b \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ (sistema que por supuesto es compatible y determinado). Se considera la sucesión definida por

$$x^{(0)} \in \mathbb{C}^{n \times 1}, \quad x^{(m)} = (I - A)x^{(m-1)} + b. \quad (2)$$

Demostrar que la sucesión $x^{(m)}$ converge a la única solución x del sistema $Ax = b$ si y sólo si, $\rho(I - A) < 1$.

(b) *Método de Jacobi.* Supongamos que la matriz A se puede descomponer

en la forma $A = D + T$ con D diagonal y todos los términos de su diagonal principal no nulos. Demostrar que la sucesión iterativa

$$x^{(m)} = -D^{-1}Tx^{(m-1)} + D^{-1}b \quad (3)$$

tiende a la única solución x del sistema $Ax = b$ para toda elección de $x^{(0)}$ si y sólo si, $\rho(-D^{-1}T) < 1$.

(c) Se considera el sistema lineal $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$. Hallar su solución exacta y una solución aproximada mediante el método de Jacobi para la elección $x^{(0)} = (1, 0)^T$ y hasta la cuarta iteración.

(d) *Método de Gauss-Seidel*. Supongamos que la matriz A se puede descomponer en la forma $A = S + T$ con S triangular inferior invertible y T triangular superior con ceros en la diagonal principal. Demostrar que la sucesión iterativa

$$x^{(m)} = -S^{-1}Tx^{(m-1)} + S^{-1}b \quad (4)$$

tiende a la única solución x del sistema $Ax = b$ para toda elección de $x^{(0)}$ si y sólo si, $\rho(-S^{-1}T) < 1$.

(e) Para el sistema del apartado (c) hallar una solución aproximada mediante el método de Gauss-Seidel para la elección $x^{(0)} = (1, 0)^T$ y hasta la cuarta iteración.

Solución. (a) Llamemos $\epsilon^{(m)} = x^{(m)} - x$. Demostrar que $x^{(m)} \rightarrow x$ equivale a demostrar que $\epsilon^{(m)} \rightarrow 0$. Llamemos $B = I - A$. Tenemos

$$B\epsilon^{(m-1)} = (I - A) \left(x^{(m-1)} - x \right) = (I - A)x^{(m-1)} - \underbrace{Ax}_{b} = x^{(m)} - x = \epsilon^{(m)}.$$

De la relación $\epsilon^{(m)} = B\epsilon^{(m-1)}$ se deduce que $\epsilon^{(m)} = B^m\epsilon^{(0)}$. Entonces, si $\rho(B) < 1$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \epsilon^{(m)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} (B^m\epsilon^{(0)}) = \left(\lim_{m \rightarrow +\infty} B^m \right) \epsilon^{(0)} \underbrace{=}_{\text{por (1)}} 0\epsilon^{(0)} = 0.$$

Recíprocamente, si $\epsilon^{(m)} \rightarrow 0$ para cualquier elección de $x^{(0)}$, eligiendo $\epsilon^{(0)} \neq 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \epsilon^{(m)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} (B^m\epsilon^{(0)}) = \left(\lim_{m \rightarrow +\infty} B^m \right) \underbrace{\epsilon^{(0)}}_{\neq 0} \\ &\Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} B^m = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{por (1)}} \rho(B) < 1. \end{aligned}$$

(b) Tenemos las equivalencias

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow (D + T)x = b \Leftrightarrow Dx + Tx = b \\ &\Leftrightarrow x = -D^{-1}Tx + D^{-1}b \Leftrightarrow (I + D^{-1}T)x = D^{-1}b. \end{aligned}$$

Nuestra matriz A es ahora $I + D^{-1}T$ y nuestro b es $D^{-1}b$, en consecuencia la sucesión iterativa (2) se convierte en $x^{(m)} = -D^{-1}Tx^{(m-1)} + D^{-1}b$ que converge a la única solución x del sistema $Ax = b$ para toda elección de $x^{(0)}$ si y sólo si, $\rho(-D^{-1}T) < 1$.

(c) Resolviendo el sistema por el método de Gauss obtenemos su solución exacta: $x = (3, -2)^T$. Apliquemos ahora el método de Jacobi. Tenemos

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = D + T, \\ -D^{-1}T &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ D^{-1}b &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los valores propios de $-D^{-1}T$ son $\lambda = \pm 1/2$ luego $\rho(-D^{-1}T) = 1/2 < 1$, lo cual garantiza la convergencia del método de Jacobi. Llamando $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)})^T$ la sucesión iterativa (3) es

$$x^{(m)} = \begin{pmatrix} x_1^{(m)} \\ x_2^{(m)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(m-1)} \\ x_2^{(m-1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 + x_2^{(m-1)} \\ -7 + x_1^{(m-1)} \end{pmatrix}.$$

Para la elección $x^{(0)} = (1, 0)^T$ vamos obteniendo

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 + 0 \\ -7 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \\ x^{(2)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 - 3 \\ -7 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}, \\ x^{(3)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 - 3/2 \\ -7 + 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/4 \\ -9/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,25 \\ -2,25 \end{pmatrix}, \\ x^{(4)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 - 9/4 \\ -7 + 13/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23/8 \\ -15/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,875 \\ -1,875 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) La demostración es totalmente análoga a la del apartado (b).

(e) Tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = S + T,$$

$$-S^{-1}T = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1}b = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de $-S^{-1}T$ son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1/4$ luego $\rho(-S^{-1}T) = 1/4 < 1$, lo cual garantiza la convergencia del método de Gauss-Seidel. Llamando $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)})^T$ la sucesión iterativa (4) es

$$x^{(m)} = \begin{pmatrix} x_1^{(m)} \\ x_2^{(m)} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(m-1)} \\ x_2^{(m-1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 + 2x_2^{(m-1)} \\ -6 + x_2^{(m-1)} \end{pmatrix}.$$

Para la elección $x^{(0)} = (1, 0)^T$ vamos obteniendo

$$x^{(1)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 + 2 \cdot 0 \\ -6 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1,5 \end{pmatrix},$$

$$x^{(2)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 + 2 \cdot (-3/2) \\ -6 - 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/4 \\ -15/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,25 \\ -1,875 \end{pmatrix},$$

$$x^{(3)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 + 2 \cdot (-15/8) \\ -6 - 15/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49/16 \\ -63/32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,0625 \\ -1,96875 \end{pmatrix},$$

$$x^{(4)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 + 2 \cdot (-63/32) \\ -6 - 63/32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 193/64 \\ -255/128 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,015625 \\ -1,9921875 \end{pmatrix}.$$

119. Triedro de Frenet, rectas y planos asociados

Se considera la curva γ de ecuaciones paramétricas

$$\gamma : \begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$

(a) Determinar los vectores **T** (tangente), **B** (binormal) y **N** (normal) que determinan el triedro de Frenet de la curva γ en un punto genérico de la misma.

(b) Hallar las ecuaciones de las rectas tangente, binormal y normal a la curva γ en el punto P_0 correspondiente a $t_0 = \pi/2$.

(c) Hallar las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante a la curva γ en el punto P_0 .

Solución. (a) Escribiendo γ en forma vectorial, $\mathbf{r} = (1 - \cos t, \sin t, t)$ tenemos

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\sin t, \cos t, 1), \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (\cos t, -\sin t, 0)$$

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin t & \cos t & 1 \\ \cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} - \mathbf{k} = (\sin t, \cos t, -1),$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin t & \cos t & -1 \\ \sin t & \cos t & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2 \cos t)\mathbf{i} - (2 \sin t)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (2 \cos t, -2 \sin t, 0).$$

(b) Tenemos $P_0 = \mathbf{r}(\pi/2) = (1, 1, \pi/2)$. Los vectores del triedro de Frenet en P_0 son

$$\mathbf{T}(\pi/2) = (1, 0, 1), \quad \mathbf{B}(\pi/2) = (1, 0, -1), \quad \mathbf{N}(\pi/2) = (0, -2, 0).$$

Las rectas pedidas pasan por P_0 y tienen la dirección de los vectores con el mismo nombre que las rectas, por tanto

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\pi/2}{1} \quad (\text{recta tangente}),$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\pi/2}{-1} \quad (\text{recta binormal}),$$

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-\pi/2}{0} \quad (\text{recta normal}).$$

(c) El plano osculador contiene a $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$, por tanto un vector normal es $\mathbf{B}$:

$$1(x-1) + 0(y-1) - 1(z-\pi/2) = 0, \quad \text{o bien } x - z + \pi/2 - 1 = 0.$$

El plano normal contiene a $\mathbf{B}$ y $\mathbf{N}$, por tanto un vector normal es $\mathbf{T}$:

$$1(x-1) + 0(y-1) + 1(z-\pi/2) = 0, \quad \text{o bien } x + z - 1 - \pi/2 = 0.$$

El plano rectificante contiene a $\mathbf{B}$ y $\mathbf{T}$, por tanto un vector normal es $\mathbf{N}$:

$$0(x-1) - 2(y-1) + 0(z-\pi/2) = 0, \quad \text{o bien } y - 1 = 0.$$

120. Caracterizaciones de la continuidad en espacios topológicos

Sean (X, T) , (Y, T^*) dos espacios topológicos. Por definición, una aplicación $f : (X, T) \rightarrow (Y, T^*)$ es continua si $f^{-1}(G) \in T$ para todo $G \in T^*$ es decir, si la imagen inversa de todo abierto es abierto.

(a) Sea $\mathcal{B}$ una base de T^* . Demostrar que

$$f : (X, T) \rightarrow (Y, T^*) \text{ es continua} \Leftrightarrow f^{-1}(H) \in T \quad \forall H \in \mathcal{B}.$$

(b) Sea $\mathcal{S}$ una subbase de T^* . Demostrar que

$$f : (X, T) \rightarrow (Y, T^*) \text{ es continua} \Leftrightarrow f^{-1}(S) \in T \quad \forall S \in \mathcal{S}.$$

(c) Demostrar que $f : (X, T) \rightarrow (Y, T^*)$ es continua $\Leftrightarrow$ la imagen inversa de todo cerrado en Y es cerrado en X .

(d) Demostrar que $f : (X, T) \rightarrow (Y, T^*)$ es continua $\Leftrightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$.

(e) Por definición, $f : (X, T) \rightarrow (Y, T^*)$ es continua en $p \in X$ si para todo entorno V^* de $f(p)$ se verifica que $f^{-1}(V^*)$ es entorno de p .

Demostrar que $f : (X, T) \rightarrow (Y, T^*)$ es continua $\Leftrightarrow f$ es continua en cada punto p de X .

Solución. (a) $\Rightarrow$) Como $\mathcal{B} \subset T^*$, si $H \in \mathcal{B}$ entonces $H \in T^*$ y por tanto, $f^{-1}(H) \in T$ al ser f continua. $\Leftarrow$) Si $G \in T^*$ entonces, al ser $\mathcal{B}$ base de T^* , G es unión de elementos de $\mathcal{B}$: $G = \cup_i H_i$ con $H_i \in \mathcal{B}$. Tenemos

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(\cup_i H_i) = \cup_i \underbrace{f^{-1}(H_i)}_{\in T} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{T \text{ es topología}} \quad \cup_i f^{-1}(H_i) \in T \Rightarrow f \text{ es continua}.$$

(b) $\Rightarrow$) Como $\mathcal{S} \subset T^*$, si $S \in \mathcal{S}$ entonces $S \in T^*$ y por tanto, $f^{-1}(S) \in T$ al ser f continua.

$\Leftarrow$) Si $G \in T^*$ entonces, al ser $\mathcal{S}$ subbase de T^* , G es de la forma

$$G = \cup_i (S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_{m_i}}) \quad \text{donde} \quad S_{i_k} \in \mathcal{S}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} f^{-1}(G) &= f^{-1}(\cup_i (S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_{m_i}})) = \cup_i f^{-1}(S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_{m_i}}) \\ &= \cup_i (f^{-1}(S_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-1}(S_{i_{m_i}})). \end{aligned}$$

Pero $S_{i_k} \in \mathcal{S}$ implica que $S_{i_k} \in T^*$ y por hipótesis $f^{-1}(S_{i_k}) \in T$. Esto implica que $f^{-1}(G) \in T$ pues es la unión de intersecciones finitas de elementos de T . En consecuencia, f es continua.

(c) $\Rightarrow$) Si F es cerrado en Y , F^c es abierto en Y , y por ser f continua $f^{-1}(F^c)$ es abierto en X . Pero $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$, luego $f^{-1}(F)$ es cerrado en X .
 $\Leftarrow$) Sea $G \subset Y$ abierto. Entonces, G^c es cerrado en Y . Por hipótesis, $f^{-1}(G^c) = (f^{-1}(G))^c$ es cerrado en X , con lo cual $f^{-1}(G)$ es abierto en X por tanto, f es continua.

(d) $\Rightarrow$) Como todo conjunto está contenido en su adherencia, $f(A) \subset \overline{f(A)}$. Entonces,

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

El conjunto $\overline{f(A)}$ es cerrado y por hipótesis f es continua, por tanto $f^{-1}(\overline{f(A)})$ es cerrado luego $A \subset \overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ y por tanto

$$f(\overline{A}) \subset f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subset \overline{f(A)}.$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$ y sea $F \subset Y$ cerrado. Llamemos $A = f^{-1}(F)$. Si demostramos que A es cerrado, o equivalentemente que $\overline{A} = A$, haremos demostrado que f es continua. Tenemos

$$f(\overline{A}) = f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F.$$

Por tanto, $\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(F) = A$. Al ser $A \subset \overline{A}$, el conjunto $A = f^{-1}(F)$ es cerrado.

(e) $\Rightarrow$) Sea V^* un entorno de $f(p)$. Entonces, existe abierto H tal que $f(p) \in H \subset V^*$. Por hipótesis f es continua, luego $f^{-1}(H)$ es abierto y $p \in f^{-1}(H) \subset f^{-1}(V^*)$. Es decir, $f^{-1}(V^*)$ es entorno de p y por tanto f es continua en p .

$\Leftarrow$) Supongamos que f es continua en todo $p \in X$ y sea $H \subset Y$ abierto. Para cada $p \in f^{-1}(H)$ existe un abierto $G_p \subset X$ tal que $p \in G_p \subset f^{-1}(H)$. Es decir,

$$f^{-1}(H) = \bigcup_{p \in f^{-1}(H)} G_p$$

es unión de abiertos y por tanto abierto, luego f es continua.

121. Números armónicos y constante de Euler Mascheroni

Se define el n -ésimo número armónico como la suma de los recíprocos de los primeros n números naturales. Se le denota por H_n , es decir

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Demostrar la representación de Euler de los números armónicos:

$$H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx.$$

2. Demostrar la expresión combinatoria

$$H_n = - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{n}{k}.$$

3. Demostrar que la sucesión $a_n = H_n - \log n$ es convergente con límite γ que verifica $0 \leq \gamma \leq 1$. Al número γ se le llama constante de Euler-Mascheroni.

Nota. Se demuestra que $\gamma \approx 0,577$.

Solución. 1. Usando la identidad $\frac{1-x^n}{1-x} = 1+x+\dots+x^{n-1}$,

$$\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx = \int_0^1 (1+x+\dots+x^{n-1}) dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = H_n.$$

2. Usando el apartado anterior, tenemos

$$\begin{aligned} H_n &= \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx \stackrel{x=1-t}{=} \int_1^0 \frac{1-(1-t)^n}{t} (-dt) = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-t)^k}{t} dt = \int_0^1 \left[- \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} t^{k-1} \right] dt \\ &\quad - \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 t^{k-1} dt = - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

3. Veamos que a_n es monótona decreciente. En efecto,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= H_{n+1} - H_n - \log(n+1) + \log n \\ &= \frac{1}{n+1} + \log \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \log \left(1 - \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Consideremos la función $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t + \log(1-t)$. Tenemos $f(0) = 0$ y

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{1-t} = \frac{-t}{1-t} < 0 \quad \forall t \in (0, 1),$$

lo cual implica que f es estrictamente decreciente en $[0, 1)$. Como $1/(n+1) \in (0, 1)$ concluimos que $a_{n+1} - a_n < 0$ para todo n y por ende, a_n es monótona decreciente.

Veamos ahora que a_n tiene cota inferior. Para todo $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &< \frac{1}{x} < \frac{1}{k-1} \Rightarrow \frac{1}{k} < \int_{k-1}^k \frac{dx}{x} < \frac{1}{k-1} \\ \Rightarrow H_n - 1 &< \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} < H_{n-1} \\ \Rightarrow H_n - 1 &< \int_1^n \frac{dx}{x} < H_{n-1} \Rightarrow H_n - 1 < \log n < H_{n-1} \\ \Rightarrow -1 &< -H_n + \log n < -H_n + H_{n-1} \Rightarrow -1 < -H_n + \log n < -\frac{1}{n} \\ \Rightarrow -1 &< -a_n < -\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} < a_n < 1. \end{aligned}$$

Esto demuestra que 0 es cota inferior de a_n y al ser monótona decreciente, tiene límite $\gamma \geq 0$. Por ser $a_n < 1$, se verifica $\gamma \in [0, 1]$.

122. Determinante de una matriz solución de un S.D.L.H.

Sea el sistema diferencial lineal homogéneo de orden n

$$X' = A(t)X. \quad (H)$$

en donde $A(t) = [a_{ij}(t)]$, $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado de la recta real, y

$$a_{ij} : [a, b] \rightarrow \mathbb{K} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{K} = \mathbb{C})$$

son funciones continuas. Sea $\Phi(t) = [\varphi_{ij}(t)]$ una matriz solución de (H) , es decir una matriz que satisface $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, lo cual equivale a decir que las columnas de $\Phi(t)$ son soluciones de (H) . Sea $t_0 \in [a, b]$.

1. Demostrar que

$$\det \Phi(t) = e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(t) dt} \det \Phi(t_0) \quad (\forall t \in [a, b]).$$

2. Demostrar que $\det \Phi(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$ o bien $\det \Phi(t)$ no se anula en ningún punto de $[a, b]$.

Solución. 1. La matriz $\Phi(t)$ es de la forma

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix}, \text{ con } \varphi_{ij} \in \mathcal{C}^1[a, b] \quad \forall i, j.$$

Derivando $\det \Phi(t)$ por filas:

$$(\det \Phi(t))' = \begin{vmatrix} \varphi'_{11}(t) & \cdots & \varphi'_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi'_{n1}(t) & \cdots & \varphi'_{nn}(t) \end{vmatrix}. \quad (*)$$

Dado que $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, se verifica:

$$\begin{bmatrix} \varphi'_{11}(t) & \cdots & \varphi'_{1n}(t) \\ \varphi'_{21}(t) & \cdots & \varphi'_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi'_{n1}(t) & \cdots & \varphi'_{nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

por tanto

$$(\varphi'_{11}(t), \dots, \varphi'_{1n}(t)) = (a_{11}(t), \dots, a_{1n}(t)) \Phi(t),$$

y podemos expresar el primer término del segundo miembro de (*) en la forma

$$\begin{vmatrix} \varphi'_{11} & \cdots & \varphi'_{1n} \\ \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\varphi_{11} + a_{12}\varphi_{21} + \cdots + a_{1n}\varphi_{n1} & \cdots & a_{11}\varphi_{1n} + a_{12}\varphi_{2n} + \cdots + a_{1n}\varphi_{nn} \\ \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}.$$

(Hemos prescindido por comodidad de la escritura de t). Efectuando la transformación

$$F_1 \rightarrow F_1 - a_{12}F_2 - \cdots - a_{1n}F_n :$$

$$\begin{vmatrix} \varphi'_{11} & \cdots & \varphi'_{1n} \\ \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\varphi_{11} & \cdots & a_{11}\varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\Phi(t).$$

De manera análoga se pueden transformar los demás sumandos del segundo miembro de (*), por tanto

$$(\Phi(t))' = a_{11} \det \Phi(t) + \cdots + a_{nn} \det \Phi(t) = (\operatorname{tr} A(t)) \det \Phi(t).$$

Llamando $f(t) = \det \Phi(t)$, queda la ecuación diferencial $f'(t) = (\operatorname{tr} A(t)) f(t)$. Resolviendo:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \operatorname{tr} A(t), \quad \log |f(t)| = \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(t) dt + C,$$

$$f(t) = K e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(t) dt}, \quad f(t_0) = K.$$

Es decir,

$$\det \Phi(t) = e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(t) dt} \det \Phi(t_0) \quad (\forall t \in [a, b]). \quad (**)$$

2. Si $\det \Phi(t_0) = 0$, de (**) se deduce que $\det \Phi(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$. Si $\det \Phi(t_0) \neq 0$ entonces, también por (**) y teniendo en cuenta que la función exponencial no se anula nunca, concluimos que $\det \Phi(t)$ no se anula en ningún punto de $[a, b]$.

123. Variación de las constantes

Usando el método de variación de las constantes hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$x'' + x = \frac{1}{\cos t}$$

Solución. Recordamos el método de variación de las constantes. Sea la ecuación diferencial

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t). \quad (1)$$

Entonces, si $x_1(t), \dots, x_n(t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada a (1), la solución general de (1) es

$$x(t) = C_1(t)x_1(t) + \dots + C_n(t)x_n(t)$$

en donde $C_1(t), \dots, C_n(t)$ son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1(t)C_1'(t) + \dots + x_n(t)C_n'(t) = 0 \\ x_1'(t)C_1'(t) + \dots + x_n'(t)C_n'(t) = 0 \\ \dots \\ x_1^{(n-1)}(t)C_1'(t) + \dots + x_n^{(n-1)}(t)C_n'(t) = f(t). \end{cases} \quad (2)$$

En nuestro caso la ecuación homogénea $x'' + x = 0$ es de coeficientes constantes, su ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$, con raíces $\lambda = \pm i$ y una

base de su espacio de soluciones está formada por las funciones $x_1(t) = \cos t$ y $x_2(t) = \sin t$. Planteamos el sistema (2) :

$$\begin{cases} C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t = 0 \\ -C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t = \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

Su solución es:

$$C_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ \frac{1}{\cos t} & \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = -\tan t, \quad C_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & \frac{1}{\cos t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = 1.$$

Entonces, $C_1(t) = \log |\cos t| + K_1$ y $C_2(t) = t + K_2$. La solución general de la ecuación dada es por tanto:

$$x(t) = t \sin t + (\cos t)(\log |\cos t|) + K_1 \cos t + K_2 \sin t \quad (K_1, K_2 \in \mathbb{R}).$$

124. Caracterizaciones de cuerpos

Sea A un anillo conmutativo, unitario y no nulo. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- (1) A es un cuerpo.
- (2) Los únicos ideales de A son $\{0\}$ y A .
- (3) Cada homomorfismo de A en todo anillo conmutativo, unitario y no nulo B , es inyectivo.

Nota. Se consideran los homomorfismos que cumplen $f(1) = 1$.

Solución. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $I \neq \{0\}$ un ideal de A . Entonces, I contiene un elemento no nulo a . Por hipótesis A es cuerpo, luego a es unidad de A y por tanto

$$I \supset (a) = (1) = A \Rightarrow I = A.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo de anillos. Entonces, $\ker f$ es un ideal de A . Como $f(1) = 1$, ha de ser $\ker f \neq A$ y en consecuencia $\ker f = \{0\}$ con lo cual, f es inyectivo.

(3) $\Rightarrow$ (1). Si $a \in A$ no es invertible entonces $(a) \neq (1)$, luego $A/(a)$ no es el anillo nulo. El homomorfismo canónico $p : A \rightarrow A/(a)$ tiene como núcleo $\ker p = (a)$. Por hipótesis p es inyectivo luego $(a) = \{0\}$, lo cual implica $a = 0$.

125. Norma en un anillo unitario

Sea R un anillo unitario con unidad $1 = 1_R$ y $N : R \rightarrow \mathbb{R}^+$ una aplicación. Se dice que N es una *norma* sobre R si se verifican las condiciones

$$\begin{aligned} (N1) \quad & N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \\ (N2) \quad & N(xy) = N(x)N(y) \quad \forall x, y \in R. \\ (N3) \quad & N(x + y) \leq N(x) + N(y) \quad \forall x, y \in R. \end{aligned}$$

A la condición (N3) se la llama desigualdad triangular. Una norma en un anillo unitario R se dice que es no *arquimediana* si el axioma (N3) es sustituye por la condición más fuerte

$$(N3)' \quad N(x + y) \leq \max\{N(x), N(y)\} \forall x, y \in R,$$

llamada *desigualdad ultramétrica*, y si no se cumple (N3)' la norma se dice que es *arquimediana*. Frecuentemente se usa la notación $\|x\|$ en vez de $N(x)$.

1) Sea R cualquier subanillo unitario de los complejos $\mathbb{C}$. Demostrar que $N(x) = |x|$ (valor absoluto) es una norma arquimediana en R (en particular, para $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

2) (Norma trivial). Demostrar que en cualquier subanillo unitario R de los complejos $\mathbb{C}$, la aplicación

$$\| \cdot \| : R \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \|x\| = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

es una norma no arquimediana.

Solución. 1) Usando las conocidas propiedades del valor absoluto:

$$\begin{aligned} (N1) \quad & N(x) = |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0. \\ (N2) \quad & N(xy) = |xy| = |x||y| = N(x)N(y) \quad \forall x, y \in R. \\ (N3) \quad & N(x + y) = |x + y| \leq |x| + |y| = N(x) + N(y) \quad \forall x, y \in R. \end{aligned}$$

La norma es arquimediana pues

$$N(1 + 1) = |1 + 1| = 2 \not\leq 1 = \max\{N(1), N(1)\}.$$

2) Por definición $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Sean $x, y \in R$. Tenemos

$$\begin{aligned} x = 0 \wedge y = 0 &\Rightarrow xy = 0 \Rightarrow \begin{cases} \|xy\| = 0 = 0 \cdot 0 = \|x\| \|y\| \\ \|x + y\| = \|0\| = 0 \leq \|x\| + \|y\|. \end{cases} \\ x \neq 0 \wedge y = 0 &\Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x + y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|xy\| = 0 = 1 \cdot 0 = \|x\| \|y\| \\ \|x + y\| = 1 \leq 1 + 0 = \|x\| + \|y\|. \end{cases} \end{aligned}$$

El caso $x = 0 \wedge y \neq 0$ se razona análogamente.

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \|xy\| = 1 = 1 \cdot 1 = \|x\| \|y\| \\ \|x + y\| \leq 1 \leq 1 + 1 = \|x\| + \|y\|. \end{cases}$$

Por tanto $\| \cdot \|$ es norma. Usando los resultados anteriores

$$x = y = 0 \Rightarrow \|x + y\| = 0 \leq \max\{0, 0\} = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

$$x \neq 0 \wedge y = 0 \Rightarrow \|x + y\| = 1 \leq \max\{1, 0\} = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

El caso $x = 0 \wedge y \neq 0$ se razona análogamente.

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow \|x + y\| \leq 1 \leq \max\{1, 1\} = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

luego la norma no es arquimediana.

Fascículo 6

Monografías 126-150

126. Una sucesión de Cauchy con la distancia p -ádica

1) Demostrar que en $R = \mathbb{Q}$ con la norma p -ádica la sucesión

$$x_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1}$$

es de Cauchy.

2) Demostrar que es además convergente con límite $x = 1/(1 - p) \in \mathbb{Q}$

Solución. 1) Tenemos

$$\begin{aligned} \|x_{n+k} - x_n\|_p &= \left\| p^n + p^{n+1} + \cdots + p^{n+k-1} \right\|_p \\ &= \left\| p^n (1 + p + p^2 \cdots + p^{k-1}) \right\|_p. \end{aligned}$$

Ahora bien, $\text{ord}_p [p^n (1 + p + p^2 \cdots + p^{k-1})] = n$ y por tanto

$$\|x_{n+k} - x_n\|_p = p^{-n} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < p^n.$$

Eligiendo n_0 tal que $p^{n_0} > 1/\epsilon$, se verifica $\|x_{n+k} - x_n\|_p < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$ y para todo k , luego x_n es sucesión de Cauchy.

2) Dado que $x_n = (p^n - 1)/(p - 1)$:

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_p < \epsilon &\Leftrightarrow \left\| \frac{p^n - 1}{p - 1} - \frac{1}{1 - p} \right\|_p = \left\| \frac{p^n}{p - 1} \right\|_p \\ &= p^{-n} = \frac{1}{p^n} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < p^n, \end{aligned}$$

y eligiendo n_0 tal que $p^{n_0} > 1/\epsilon$, se verifica $\|x_n - x\|_p < \epsilon$ si $n \geq n_0$.

Nótese que $x_n \rightarrow +\infty$ si se considera en $\mathbb{Q}$ la norma del valor absoluto.

127. Anillo de las sucesiones de Cauchy en un anillo normado

Sea R un anillo unitario con norma $\| \cdot \|$ y $d(x, y) = \|x - y\|$ la distancia inducida por ella. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto formado por todas las sucesiones de Cauchy en R . Definimos en $\mathcal{C}$ las operaciones:

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n), \quad (x_n) \cdot (y_n) = (x_n y_n).$$

Demostrar que $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ es anillo unitario y que es conmutativo si R lo es.

Solución. 1) Veamos que $(\mathcal{C}, +)$ es grupo abeliano.

Interna. Sean $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ dos elementos de $\mathcal{C}$ es decir, dos sucesiones de Cauchy en R . Sea $\epsilon > 0$. Entonces, existen n_1, n_2 números naturales tales que

$$m, n \geq n_1 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \epsilon/2,$$

$$m, n \geq n_1 \Rightarrow \|y_m - y_n\| < \epsilon/2.$$

Si $m, n \geq n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ tenemos

$$\begin{aligned} \|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)\| &= \|(x_m - x_n) + (y_m - y_n)\| \\ &\leq \|x_m - x_n\| + \|y_m - y_n\| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Es decir, $x + y$ es sucesión de Cauchy, luego pertenece a $\mathcal{C}$.

Asociativa. Para todo $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, $z = (z_n)$ elementos de $\mathcal{C}$ y aplicando la propiedad asociativa de la suma de los elementos de R :

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= ((x_n) + (y_n)) + (z_n) = (x_n + y_n) + (z_n) = ((x_n + y_n) + z_n) \\ &= (x_n + (y_n + z_n)) = (x_n) + (y_n + z_n) = (x_n) + ((y_n) + (z_n)) = x + (y + z). \end{aligned}$$

Elemento neutro. La sucesión $0 = (0)$, cuyos términos son todos nulos, es elemento neutro para la suma de sucesiones en $\mathcal{C}$, pues trivialmente es de Cauchy y para todo $x = (x_n) \in \mathcal{C}$:

$$x + 0 = (x_n + 0) = (x_n) = x.$$

$$0 + x = (0 + x_n) = (x_n) = x.$$

Elemento simétrico. Dada $x = (x_n) \in \mathcal{C}$, la sucesión $-x = (-x_n)$ es elemento simétrico de x , pues claramente es de Cauchy y

$$x + (-x) = (x_n + (-x_n)) = (0) = 0.$$

$$(-x) + x = ((-x_n) + x_n) = (0) = 0.$$

Conmutativa. Para todo $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ elementos de $\mathcal{C}$ y usando la propiedad conmutativa de la suma de elementos de R :

$$x + y = (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) = (y_n + x_n) = (y_n) + (x_n) = y + x.$$

2) Veamos que $(\mathcal{C}, \cdot)$ es semigrupo unitario.

Interna. Recordamos que en todo espacio métrico toda sucesión de Cauchy está acotada. Sean $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ elementos de $\mathcal{C}$. y sea $\epsilon > 0$. Tenemos

$$\forall \epsilon_x > 0 \exists n_x : m, n \geq n_x \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \epsilon_x,$$

$$\forall \epsilon_y > 0 \exists n_y : m, n \geq n_y \Rightarrow \|y_m - y_n\| < \epsilon_y.$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} \|x_m y_m - x_n y_n\| &= \|x_m y_m - x_m y_n + x_m y_n - x_n y_n\| \\ &\leq \|x_m\| \|y_m - y_n\| + \|y_n\| \|x_m - x_n\|. \end{aligned}$$

Sean $X > 0$ e $Y > 0$ cotas superiores de $\|x_n\|$ e $\|y_n\|$ respectivamente y elijamos $\epsilon_x < \epsilon/2Y$, $\epsilon_y < \epsilon/2X$. Sea $n_0 = \max\{n_x, n_y\}$, entonces

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_m y_m - x_n y_n\| < X \cdot \frac{\epsilon}{2X} + Y \cdot \frac{\epsilon}{2Y} = \epsilon.$$

Hemos demostrado que la suma de elementos de $\mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{C}$.

Asociativa. Para todo $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, $z = (z_n)$ elementos de $\mathcal{C}$ y aplicando la propiedad asociativa del producto de los elementos de R :

$$\begin{aligned} (xy)z &= ((x_n)(y_n))(z_n) = (x_n y_n)(z_n) = ((x_n y_n)z_n) = \\ &= (x_n(y_n z_n)) = (x_n)(y_n z_n) = (x_n)((y_n)(z_n)) = x(yz). \end{aligned}$$

Elemento unidad. La sucesión $1 = (1)$ cuyos elementos son todos iguales a la unidad de R es trivialmente de Cauchy y además para todo $x = (x_n) \in \mathcal{C}$:

$$x1 = (x_n 1) = (x_n) = x,$$

$$1x = (1x_n) = (x_n) = x,$$

luego $1 = (1)$ es elemento unidad de $\mathcal{C}$.

3) Veamos que la operación producto es distributiva respecto de la suma. En efecto, para todo $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, $z = (z_n)$ elementos de $\mathcal{C}$ y aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en R :

$$\begin{aligned} x(y + z) &= (x_n)((y_n) + (z_n)) = (x_n)(y_n + z_n) = (x_n(y_n + z_n)) = \\ &= (x_n y_n + x_n z_n) = (x_n y_n) + (x_n z_n) = (x_n)(y_n) + (x_n)(z_n) = xy + xz, \end{aligned}$$

y análogamente se demuestra $(x + y)z = xz + yz$. Concluimos que $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ es un anillo unitario. Además, si R es conmutativo también $\mathcal{C}$ es conmutativo pues para todo $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ elementos de $\mathcal{C}$ y usando la propiedad conmutativa del producto en R :

$$xy = (x_n)(y_n) = (x_n y_n) = (y_n x_n) = (y_n)(x_n) = yx.$$

128. Ideal en el anillo de las sucesiones de Cauchy

Sea R un anillo unitario con una norma $\| \cdot \|$ y $\mathcal{C}$ el anillo unitario de las sucesiones de Cauchy sobre R . Demostrar que el conjunto I formado por las sucesiones nulas sobre R (es decir, con límite 0) es un ideal de $\mathcal{C}$.

Solución. (a) Sean $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ elementos de I . Como $(x_n) \rightarrow 0$ e $(y_n) \rightarrow 0$, para todo $\epsilon > 0$ existen números naturales n_1 y n_2 tales que

$$n \geq n_1 \Rightarrow \|x_n\| < \frac{\epsilon}{2}, \quad n \geq n_2 \Rightarrow \|y_n\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ tenemos:

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Rightarrow \|x_n - y_n\| = \|x_n + (-1)y_n\| \leq \|x_n\| + \|(-1)y_n\| \\ &= \|x_n\| + \|(-1)\| \|y_n\| = \|x_n\| + 1 \|y_n\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Es decir, $(x_n - y_n) \rightarrow 0$ y por tanto, $x - y \in I$.

(b) Si $x = (x_n) \in \mathcal{C}$ e $y = (y_n) \in I$ entonces $\|x_n\|$ está acotada e $(y_n) \rightarrow 0$. Sea $K > 0$ tal que $\|x_n\| < K$ para todo n . Para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $\|y_n\| < \epsilon/K$ si $n \geq n_0$. Entonces,

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n y_n\| = \|x_n\| \|y_n\| < K \cdot \frac{\epsilon}{K} = \epsilon$$

es decir, $(x_n y_n) \rightarrow 0$ con lo cual $xy \in I$. Análogamente se demuestra que $yx \in I$. Concluimos que I es ideal de $\mathcal{C}$.

Nota. Como consecuencia, queda automáticamente definido el anillo cociente $\mathcal{C}/I$.

129. Norma en el anillo cociente $\widehat{R}$ de las sucesiones de Cauchy sobre el ideal de las nulas

1) Sea R anillo unitario con norma $\| \cdot \|$. Demostrar que

$$|||a| - |b||| \leq \|a - b\|, \quad \forall a, b \in R.$$

Es decir, que el valor absoluto de la diferencia de normas es menor o igual que la norma de la diferencia.

2) Sea R anillo unitario con norma $\| \cdot \|_R$ y sea $\widehat{R} = \mathcal{C}/I$ el anillo cociente de las sucesiones de Cauchy en R sobre el ideal I de las sucesiones nulas en R , y designemos por $\{x_n\}$ la clase a la que pertenece (x_n) . Es decir,

$$\widehat{R} = \{\{x_n\} = (x_n) + I : (x_n) \text{ es sucesión de Cauchy en } R\}.$$

Demostrar que la aplicación $\|\cdot\|_{\widehat{R}} : \widehat{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$\|\{x_n\}\|_{\widehat{R}} = \lim \|x_n\|_R$$

es una norma en el anillo unitario $\widehat{R}$.

Solución. 1) Podemos escribir

$$\|a\| = \|(a - b) + b\| \leq \|a - b\| + \|b\| \Rightarrow \|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|.$$

Análogamente, $\|b\| - \|a\| \leq \|b - a\| = \|a - b\|$, de lo cual se deduce

$$|\|a\| - \|b\|| \leq \|a - b\|.$$

2) Veamos primeramente que $\lim \|x_n\|_R$ existe y es ≥ 0 . En efecto al ser (x_n) de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que si $m, n \geq n_0$ entonces $\|x_m - x_n\|_R < \epsilon$. Usando que el valor absoluto de la diferencia de normas es menor o igual que la norma de la diferencia:

$$|\|x_m\|_R - \|x_n\|_R| \leq \|x_m - x_n\|_R < \epsilon \text{ si } m, n \geq n_0.$$

Esto prueba que $\|x_n\|_R$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ (que es completo) con lo cual es convergente. Pero $\|x_n\|_R \geq 0$ para todo n , luego $\lim \|x_n\|_R \in \mathbb{R}^+$.

Veamos que $\|\{x_n\}\|_{\widehat{R}} = \lim \|x_n\|_R$ no depende del representante de la clase. Efectivamente, si $\{x_n\} = \{x'_n\}$ entonces $(x_n - x'_n) \in I$ es decir, $\lim (x_n - x'_n) = 0$ con lo cual

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x'_n\|_R < \epsilon \Rightarrow |\|x_n\|_R - \|x'_n\|_R| < \epsilon.$$

Es decir, $\lim (\|x_n\|_R - \|x'_n\|_R) = 0$ y al existir y ser finitos $\lim \|x_n\|_R$ y $\lim \|x'_n\|_R$ se concluye

$$\lim \|x_n\|_R = \lim \|x'_n\|_R$$

y la aplicación $\|\cdot\|_{\widehat{R}} : \widehat{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ está bien definida.

Veamos ahora que $\|\{x_n\}\|_{\widehat{R}} = \lim \|x_n\|_R$ es una norma en $\widehat{R}$.

(1) Tenemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} \|\{x_n\}\|_{\widehat{R}} = 0 &\Leftrightarrow \lim \|x_n\|_R = 0 \Leftrightarrow \lim x_n = 0 \Leftrightarrow (x_n) \in I \\ &\Leftrightarrow (x_n) - (0) \in I \Leftrightarrow (x_n) + I = (0) + I \Leftrightarrow \{x_n\} = \{0\}, \end{aligned}$$

y $\{0\}$ es el cero de la suma en $\widehat{R}$.

(2) Para todo $\{x_n\}, \{y_n\} \in \widehat{R}$:

$$\|\{x_n\} \cdot \{y_n\}\|_{\widehat{R}} = \|\{x_n y_n\}\|_{\widehat{R}} = \lim \|x_n y_n\|_R$$

$$= (\lim \|x_n\|_R) (\lim \|y_n\|_R) = \|\{x_n\}\|_{\widehat{R}} \|\{y_n\}\|_{\widehat{R}}.$$

(3) Para todo $\{x_n\}, \{y_n\} \in \widehat{R}$:

$$\begin{aligned} \|\{x_n\} + \{y_n\}\|_{\widehat{R}} &= \|\{x_n + y_n\}\|_{\widehat{R}} = \lim \|x_n + y_n\|_R \leq \lim (\|x_n\|_R + \|y_n\|_R) \\ &= \lim \|x_n\|_R + \lim \|y_n\|_R = \|\{x_n\}\|_{\widehat{R}} + \|\{y_n\}\|_{\widehat{R}}. \end{aligned}$$

130. R como subanillo de $\widehat{R}$

Sea R anillo unitario y $\widehat{R} = \mathcal{C}/I$ el anillo cociente de las sucesiones de Cauchy de R sobre el ideal I de las sucesiones nulas de R . Sea la aplicación $\phi : R \rightarrow \widehat{R}$ dada por $\phi(a) = \overline{(a)}$ en donde (a) representa la sucesión constante de término general a . Demostrar que ϕ es un homomorfismo inyectivo de anillos.

Solución. Para todo $a, b \in R$ tenemos

$$\phi(a + b) = \overline{(a + b)} = \overline{(a)} + \overline{(b)} = \phi(a) + \phi(b),$$

$$\phi(ab) = \overline{(ab)} = \overline{(a)} \overline{(b)} = \phi(a)\phi(b),$$

lo cual prueba que ϕ es homomorfismo de anillos. Además $\phi(1) = \overline{(1)}$ es decir, ϕ transforma la unidad de R en la unidad de $\widehat{R}$. Por otra parte

$$\begin{aligned} \ker \phi &= \{a \in R : \phi(a) = \widehat{(0)}\} = \{a \in R : \overline{(a)} = \widehat{(0)}\} \\ &= \{a \in R : a - 0 \in I\} = \{I\} = \{0 + I\} \end{aligned}$$

es decir, el núcleo de ϕ se reduce al cero de $\widehat{R}$ lo cual prueba que ϕ es inyectivo.

Consecuencia. R es isomorfo al subanillo $\text{Im } \phi$ de $\widehat{R}$ i.e. $R \cong \phi(R)$, con lo cual R se puede considerar como un subanillo de $\widehat{R}$. Además, la norma $\|\cdot\|_{\widehat{R}}$ de $\widehat{R}$ extiende a la norma $\|\cdot\|_R$ de R pues $\|\{a\}\|_{\widehat{R}} = \lim \|a\|_R = \|a\|_R$.

131. Completación de todo anillo normado

1) Sea (X, d) un espacio métrico cualquiera. Sea (b_n) una sucesión de Cauchy en X y (a_n) una sucesión en X tal que $d(a_n, b_n) < 1/n$ para cada n natural. Demostrar que

(i) (a_n) es también sucesión de Cauchy en X .

(ii) (a_n) converge a p en X si y sólo si, (b_n) converge a p en X .

2) Sea R anillo unitario con norma $\|\cdot\|_R$. Demostrar que $\widehat{R}$ es completo con la norma $\|\cdot\|_{\widehat{R}}$. Además, R es denso en $\widehat{R}$.

3) Demostrar que si R es cuerpo, también $\widehat{R}$ es cuerpo.

Solución. 1) (i) Por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} d(a_m, a_n) &\leq d(a_m, b_m) + d(b_m, a_n) \\ &\leq d(a_m, b_m) + d(b_m, b_n) + d(b_n, a_n). \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Entonces, existe n_1 tal que $1/n_1 < \epsilon/3$ y por tanto

$$n, m \geq n_1 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \epsilon/3 + d(b_m, b_n) + \epsilon/3.$$

Como (b_n) es de Cauchy,

$$\exists n_2 \text{ tal que } n, m \geq n_2 \Rightarrow d(b_m, b_n) < \epsilon/3.$$

Eligiendo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$,

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

lo cual prueba que (a_n) es de Cauchy.

(ii) Por la desigualdad triangular, $d(b_n, p) \leq d(b_n, a_n) + d(a_n, p)$. Entonces,

$$0 \leq \lim d(b_n, p) \leq \lim d(b_n, a_n) + \lim d(a_n, p).$$

Usando la hipótesis $d(a_n, b_n) < 1/n$:

$$0 \leq d(a_n, b_n) < 1/n \Rightarrow$$

$$0 \leq \lim d(a_n, b_n) \leq \lim(1/n) = 0 \Rightarrow \lim d(a_n, b_n) = 0$$

Si $\lim a_n = p$, tenemos $\lim d(a_n, p) = 0$ y por tanto,

$$0 \leq \lim d(b_n, p) \leq 0 \Rightarrow \lim d(b_n, p) = 0 \Rightarrow \lim b_n = p.$$

De manera análoga se demuestra que si $\lim b_n = p$ entonces, $\lim a_n = p$.

2) Podemos considerar a R como subanillo de $\widehat{R}$ identificando cada elemento a de R con el elemento $\{a\}$ de $\widehat{R}$. Veamos sucesivamente:

(a) Toda sucesión de Cauchy en R tiene límite en $\widehat{R}$.

Sea (x_m) una sucesión de Cauchy en R . Esta sucesión puede tener o no límite en R pero seguro que lo tiene en $\widehat{R}$ a saber: $x = \{x_n\}$. Efectivamente, identificando

$$x_1 = \{x_1\}, x_2 = \{x_2\}, \dots, x_m = \{x_m\}, \dots$$

podemos escribir

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|\{x_m\} - x\|_{\widehat{R}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|\{x_m\} - \{x_n\}\|_{\widehat{R}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \|\{x_m - x_n\}\|_{\widehat{R}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_m - x_n\|_R \right) \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_m - x_n\|_R \underbrace{=}_{(x_n) \text{ de Cauchy en } R} 0 \Rightarrow (x_m) \rightarrow x = \{x_n\}.
\end{aligned}$$

(b) R es denso en $\widehat{R}$.

Bastará demostrar que cada elemento de $\widehat{R}$ es el límite de una sucesión de R . Sea $x = \overline{(x_n)}$ un elemento arbitrario de $\widehat{R}$. Entonces, la sucesión (x_m) es de Cauchy en R y por (1), x es el límite de la sucesión (x_m) de R .

(c) $\widehat{R}$ es completo.

En efecto, sea (α_n) una sucesión de Cauchy en $\widehat{R}$. Como R es denso en $\widehat{R}$, para todo n natural

$$\exists x_n \in R \text{ tal que } \|x_n - \alpha_n\|_{\widehat{R}} < 1/n.$$

Por el apartado 1), (x_n) es también una sucesión de Cauchy y por (2), su límite es $x \in \widehat{R}$. También, por el apartado 1), $\lim \alpha_n = x$ y por tanto, (α_n) converge en $\widehat{R}$.

3) Si $\{x_n\} \in \widehat{R}$ es no nulo, tiene norma $k > 0$. Entonces,

$$k = \|\{x_n\}\|_{\widehat{R}} = \lim \|x_n\|_R > 0,$$

con lo cual existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $\|x_n\|_R > k/2$ y por tanto $x_n \neq 0$ si $n \geq n_0$. Definimos la sucesión (y_n) en R dada por $y_n = 1$ si $n < n_0$, $y_n = x_n^{-1}$ si $n \geq n_0$. La sucesión (y_n) es de Cauchy y además

$$\lim x_n y_n = 1 \Rightarrow (x_n y_n) - (1) \rightarrow 0 \Rightarrow (1) = \{x_n y_n\} = \{x_n\} \{y_n\}.$$

Es decir, $\{x_n\}$ tiene inverso $\{y_n\}$ en $\widehat{R}$.

Nota. Si $\mathbb{Q}$ es el cuerpo de los números racionales con la norma del valor absoluto, entonces $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ es la clásica y conocida construcción del cuerpo de los números reales con la topología usual.

132. Conservación de normas no arquimediadas por completación

1) Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes de números reales. Demostrar que la sucesión $\max\{a_n, b_n\}$ es convergente con límite:

$$\lim (\max\{a_n, b_n\}) = \max\{\lim a_n, \lim b_n\}.$$

2) Si $\|\cdot\|_R$ es no arquimediana en el anillo R , demostrar que también $\|\cdot\|_{\widehat{R}}$ es no arquimediana en el anillo $\widehat{R}$.

Solución. 1) Supongamos que $(a_n) \rightarrow A$ y $(b_n) \rightarrow B$. Sea $c_n = \max\{a_n, b_n\}$. Si $A > B$ llamemos $2d = A - B > 0$. Existen n_1, n_2 tales que

$$n \geq n_1 \Rightarrow a_n > A - d, \quad n \geq n_2 \Rightarrow b_n < B + d.$$

Dado que $A - d = B + d$, si $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ entonces $c_n = a_n$ si $n \geq n_0$ y por tanto, $\lim c_n = A$. Si $B > A$, análogo razonamiento para demostrar que $\lim c_n = B$. Sea por último $A = B$. Si la sucesión (c_n) está formada por infinitos términos de (a_n) e infinitos términos de (b_n) entonces, (c_n) está formada por dos subsucesiones que tienen el mismo límite $A = B$ y por tanto, $(c_n) \rightarrow A = B$. Si sólo aparece un número finito de términos de (a_n) entonces, $(c_n) \rightarrow B$ y si sólo aparece un número finito de términos de (b_n) entonces, $(c_n) \rightarrow A$. En cualquier caso, $(c_n) \rightarrow A = B$.

2) Sean $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \widehat{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|x + y\|_{\widehat{R}} &= \|\{x_n\} + \{y_n\}\|_{\widehat{R}} = \|\{x_n + y_n\}\|_{\widehat{R}} = \lim \|x_n + y_n\|_R \\ &\leq \lim (\max\{\|x_n\|_R, \|y_n\|_R\}) \quad \underbrace{=}_{\text{Apartado 1)}} \max\{\lim \|x_n\|_R, \lim \|y_n\|_R\} \\ &= \max\{\|x\|_{\widehat{R}}, \|y\|_{\widehat{R}}\} \Rightarrow \|\cdot\|_{\widehat{R}} \text{ es no arquimediana.} \end{aligned}$$

133. Cuerpo $\mathbb{Q}_p$ de los números p -ádicos y subanillo $\mathbb{Z}_p$

Sea $\mathbb{Q}$ el anillo de los números racionales con la norma p -ádica $\|\cdot\|_p$ y sea $\mathbb{Q}_p := \widehat{\mathbb{Q}}$. Al anillo $\mathbb{Q}_p$ se le llama *anillo de los números p -ádicos*. La norma en $\mathbb{Q}_p$ también se la designará por $\|\cdot\|_p$.

Nota. Dado que si un anillo unitario R es cuerpo también lo es $\widehat{R}$, se concluye que $\mathbb{Q}_p$ es cuerpo.

Se llama conjunto de los *enteros p -ádicos* al disco cerrado:

$$\mathbb{Z}_p = \{\alpha \in \mathbb{Q}_p : \|\alpha\|_p \leq 1\}.$$

Demostrar que el conjunto de los enteros p -ádicos $\mathbb{Z}_p$ es un subanillo conmutativo y unitario de $\mathbb{Q}_p$.

Solución. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$. Dado que la norma $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{Q}_p$ es no arquimediana,

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\|_p &\leq \max\{\|\alpha\|_p, \|\beta\|_p\} \leq 1 \\ \|\alpha\beta\|_p &= \|\alpha\|_p \|\beta\|_p \leq 1 \end{aligned}$$

es decir, $\alpha + \beta$ y $\alpha\beta$ pertenecen a $\mathbb{Z}_p$ luego $\mathbb{Z}_p$ es subanillo de $\mathbb{Q}_p$. Es conmutativo por serlo $\mathbb{Q}_p$ y es unitario pues $\|1\|_p = 1$.

134. Sucesiones eventualmente constantes con normas no arquimedianas

Sea R anillo unitario con una norma no arquimediana $\| \cdot \|$. Sea (a_n) una sucesión de Cauchy en R y $b \in R$ tal que $\lim a_n \neq b$. Demostrar que existe n_0 tal que

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \|a_m - b\| = \|a_n - b\|.$$

Es decir, la sucesión de números reales $(\|a_n - b\|)$ es eventualmente constante. En particular, si (a_n) no es no nula, la sucesión $(\|a_n\|)$ es eventualmente constante.

Solución. Usando que el valor absoluto de la diferencia de normas es menor o igual que la norma de la diferencia

$$|\|a_m - b\| - \|a_n - b\|| \leq \|a_m - a_n\|.$$

Por tanto, la sucesión $(\|a_n - b\|)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y en consecuencia, convergente. Sea $l = \lim \|a_n - b\|$. Ha de ser $l > 0$ pues en caso contrario tendríamos $\lim a_n = b$ contra la hipótesis. Existe por tanto n_1 tal que

$$n \geq n_1 \Rightarrow \|a_n - b\| > \frac{l}{2}. \quad (1)$$

Por ser (a_n) de Cauchy, existe n_2 tal que

$$m, n \geq n_2 \Rightarrow \|a_m - a_n\| < \frac{l}{2}. \quad (2)$$

Llamando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y para $m, n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \|a_m - b\| &= \|(a_n - b) + (a_m - a_n)\| \\ &\leq \max\{\|a_n - b\|, \|a_m - a_n\|\} \underbrace{=}_{\text{Por (1) y (2)}} \|a_n - b\|. \end{aligned}$$

135. Fórmula de Stirling

1) Se consideran las sucesiones

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}, \quad b_n = \log a_n.$$

Demostrar que $b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2}(2n+1) \log \frac{n+1}{n} - 1$.

2) Usar los desarrollos en series de Maclaurin de las funciones $\log(1+x)$ y $-\log(1-x)$ para demostrar que

$$b_n - b_{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{2k}.$$

3) Demostrar que la sucesión (b_n) es decreciente y está acotada inferiormente.

4) Demostrar que para una constante real C se verifica la siguiente aproximación de Stirling

$$n! \sim C\sqrt{2n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \text{ para } n \rightarrow +\infty.$$

5) Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Demostrar que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (\forall n \geq 2).$$

6) Usando la relación del apartado anterior, demostrar que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}.$$

7) Demostrar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$.

8) Demostrar la siguiente fórmula de Wallis:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

9) Demostrar que la fórmula de Wallis se puede expresar en la forma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n!)^2 (2n+1))} = \frac{\pi}{2}.$$

10) Demostrar la fórmula de aproximación de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n, \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Solución. 1) Tenemos:

$$\begin{aligned}
 b_n - b_{n+1} &= \log a_n - \log a_{n+1} = \log a_n \cdot \frac{1}{a_{n+1}} = \\
 &= \log \frac{n!}{\sqrt{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \cdot \frac{\sqrt{2(n+1)} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \\
 &= \log \frac{1}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{e}\right) = \\
 &= -\log(n+1) + \frac{1}{2} \log \frac{n+1}{n} + n \log(n+1) - n \log n + \log(n+1) - 1 \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{n+1}{n} + n \log \frac{n+1}{n} - 1 = \\
 &= \frac{1}{2} (2n+1) \log \frac{n+1}{n} - 1.
 \end{aligned}$$

2) Los desarrollos en series de Maclaurin de las funciones $\log(1+x)$ y $-\log(1-x)$ son

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad |x| < 1,$$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots, \quad |x| < 1,$$

y de estos dos desarrollos obtenemos

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1. \quad (*)$$

Fácilmente deducimos que

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2n+1},$$

y este x cumple $|x| < 1$. Sustituyendo este x en $(*)$ obtenemos

$$\log \frac{n+1}{n} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1}}{2k+1} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1}.$$

Usando el apartado 1:

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2} (2n+1) \log \frac{n+1}{n} - 1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(2n+1) \cdot 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{2k+1} - 1 \\
&= (2n+1) \left(\frac{1}{2n+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{2k+1} \right) - 1 \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{2k} - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{2k}.
\end{aligned}$$

3) Por el apartado anterior, $b_n - b_{n+1}$ es la suma de una serie convergente de números positivos es decir, $b_n - b_{n+1} > 0$ luego (b_n) es decreciente (estrictamente). Por otra parte,

$$b_n - b_{n+1} < \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} \right)^k \underbrace{=}_{\text{Serie geom.}} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{4} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Podemos expresar

$$\begin{aligned}
b_1 - b_n &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) \\
&< \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j(j+1)} < \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $b_n > b_1 - 1/4$, lo cual implica que (b_n) está acotada inferiormente.

4) Como (b_n) es decreciente y está acotada inferiormente, (b_n) tiene límite $L \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n} = e^L = C \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\sqrt{2n} \left(\frac{n}{e} \right)^n} &= C \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{C \sqrt{2n} \left(\frac{n}{e} \right)^n} = 1 \\
&\Rightarrow n! \sim C \sqrt{2n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \text{ para } n \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

5) Usando integración por partes con $u = \sin^{n-1} x$ y $dv = \sin x \, dx$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x \, dx \\
&= [-\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx
\end{aligned}$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Obtenemos por tanto la relación: $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (\forall n \geq 2)$.

6) Para n par tenemos

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(n-1)(n-3) \cdots 1}{n(n-2) \cdots 2} I_0 = \frac{(n-1)(n-3) \cdots 1}{n(n-2) \cdots 2} \int_0^{\pi/2} dx \\ &= \frac{(n-1)(n-3) \cdots 1}{n(n-2) \cdots 2} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Para n impar

$$I_n = \frac{(n-1)(n-3) \cdots 2}{n(n-2) \cdots 3} \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{(n-1)(n-3) \cdots 2}{n(n-2) \cdots 3} \cdot 1.$$

Podemos por tanto escribir

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}, \quad I_{2n+1} = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1},$$

y usando estas relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= I_{2n} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \\ &= I_{2n} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \right) \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \right)^{-1} \\ &= \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}. \end{aligned}$$

7) Veamos que (I_n) es una sucesión decreciente de términos positivos. En efecto, para todo $x \in [0, \pi/2]$ y para todo $n \geq 1$ se verifica $0 \leq \sin^n x \leq \sin^{n-1} x \leq 1$. Tenemos pues la relación $1/I_{n-1} \leq 1/I_n \leq 1/I_{n+1}$. Multiplicando por I_{n+1} y por el apartado 5

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} &= \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_{n+1}} = 1 \\ \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Teor. Sandwich}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} &= 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1. \end{aligned}$$

8) Tomando límites cuando $n \rightarrow +\infty$ en la igualdad demostrada en el apartado 6 queda

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1}.$$

9) Operando obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1))(3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1))(2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n!)^2)(2n+1)}. \end{aligned}$$

10) En el apartado 4 demostramos que $n! \sim C\sqrt{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ para $n \rightarrow +\infty$ para cierta constante C . Usando esta aproximación en la fórmula del apartado anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n} C^4 (2n)^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{4n}}{C^2 4n \left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} (2n+1)} = C^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n} 4n^2 n^{4n}}{4n (2n)^{4n} (2n+1)} \\ &= C^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{C^2}{2} \Rightarrow C = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

y por tanto

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Queda demostrada la fórmula de aproximación de Stirling.

136. Teorema de compactificación de Alexandrov

Sea (X, T) un espacio topológico. Sea $X_\infty := X \cup \{\infty\}$, en donde ∞ representa cualquier elemento tal que $\infty \notin X$ y al que llamamos *punto del infinito*. Consideremos la clase T_∞ de subconjuntos de X_∞ :

$$T_\infty = T \cup \{A \cup \{\infty\} : A \subset X \text{ y } X - A \text{ es cerrado y compacto}\}$$

es decir, T_∞ está formada por los elementos de T y los complementos en X_∞ de los subconjuntos cerrados y compactos de X . Se trata de demostrar el *teorema de compactificación de Alexandrov por un único punto*, es decir que (X_∞, T_∞) es un espacio topológico compacto.

1) Demostrar que T_∞ es una topología en X_∞ .

- 2) Demostrar que T es la topología $T_\infty|_X$ inducida por T_∞ sobre X .
- 3) Demostrar que (X_∞, T_∞) es un espacio compacto lo cual probará el teorema de Alexandrov.
- 4) Demostrar que si X no es compacto entonces X es denso en X_∞ .
- 5) Demostrar el siguiente lema:
Sea Y un espacio compacto, Z un espacio de Hausdorff y $f : Y \rightarrow Z$ biyectiva y continua. Entonces, f es homeomorfismo.
- 6) *Aplicación.* Sea $X = (0, 1)$ y $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ambos con la topologías inducidas por la usuales de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente y llamemos $P = (1, 0) \in S^1$. Demostrar que

$$f : X_\infty \rightarrow S^1, \quad f(t) = \begin{cases} (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) & \text{si } t \in (0, 1) \\ P & \text{si } t = \infty \end{cases}$$

es un homeomorfismo. Es decir, topológicamente $X_\infty = S^1$.

Solución. 1) Veamos que T_p cumple los tres axiomas de topología.

- (a) $\emptyset \in T_\infty$ pues $\emptyset \in T$. Por otra parte, $X_\infty \in T_\infty$ pues $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ y $X - X = \emptyset$ es cerrado y compacto.
- (b) Sean $V_1, V_2 \in T_\infty$ y llamemos $V = V_1 \cap V_2$. Si $\infty \in V$ entonces,

$$V_1 = A_1 \cup \{\infty\}, \quad V_2 = A_2 \cup \{\infty\} \quad \text{con } X - A_1 \text{ y } X - A_2 \text{ cerrados y compactos.}$$

Entonces, $V = A \cup \{\infty\}$ con $A = A_1 \cap A_2$. Tenemos

$$X - A = X - (A_1 \cap A_2) = (X - A_1) \cup (X - A_2).$$

La última unión es un conjunto cerrado y compacto por ser unión de dos cerrados y compactos, por tanto $V = V_1 \cap V_2 \in T_\infty$.

Si $\infty \notin V$ entonces, o bien ∞ no pertenece ni a V_1 ni a V_2 , o bien pertenece a uno de ellos pero no al otro. En el primer caso $V_1, V_2 \in T$, luego $V \in T$ y por tanto $V \in T_\infty$.

Supongamos ahora y sin pérdida de generalidad que $\infty \in V_1$, $\infty \notin V_2$. Entonces $V_1 = A_1 \cup \{\infty\}$ con $X - A_1$ cerrado y acotado, y $V_2 \in T$. Entonces,

$$V = V_1 \cap V_2 = (A_1 \cup \{\infty\}) \cap V_2 = (A_1 \cap V_2) \cup \underbrace{(\{\infty\} \cap V_2)}_{=\emptyset} = A_1 \cap V_2.$$

Pero $A_1 \in T$ al ser $X - A_1$ cerrado en X , y por tanto $V \in T$ lo cual implica $V \in T_\infty$.

- (c) Sea $G_i \in T_\infty$ para todo $i \in I$ y llamemos $G = \bigcup_{i \in I} G_i$. Analicemos el caso en el que $\infty \notin G$:

$$\infty \notin G \Rightarrow \infty \notin G_i \quad \forall i \in I \Rightarrow G_i \in T \quad \forall i \in I \Rightarrow G = \bigcup_{i \in I} G_i \in T \Rightarrow G \in T_\infty.$$

Si $\infty \in G$, podemos descomponer el subconjunto de índices I en la forma $I = I_1 \sqcup I_2$ en donde $\infty \notin G_i$ si $i \in I_1$ y $\infty \in G_i$ si $i \in I_2$. En el segundo caso, podemos escribir $G_i = A_i \cup \{\infty\}$ con $A_i \subset X$ y $X - A_i$ cerrado y compacto. Podemos escribir

$$G = A \cup \{\infty\} \text{ con } A = (\cup_{i \in I_1} G_i) \cup (\cup_{i \in I_2} A_i).$$

Aplicando las leyes de Morgan,

$$\begin{aligned} X - A &= X - [(\cup_{i \in I_1} G_i) \cup (\cup_{i \in I_2} A_i)] \\ &= [\cap_{i \in I_1} (X - G_i)] \cap [\cap_{i \in I_2} (X - A_i)]. \end{aligned}$$

Entonces, $X - A$ es cerrado en X y está contenido en $X - A_k$ ($k \in I_2$) que es compacto, con lo cual $X - A$ también es compacto y $G \in T_\infty$. Queda demostrado que T_∞ es topología en X_∞ .

2) Efectivamente, por definición de topología inducida,

$$\begin{aligned} T_\infty|_X &= \{G \cap X : G \in T_\infty\} \\ &= \{G \cap X : G \in T \vee G = A \cup \{\infty\} \text{ con } X - A \text{ cerrado y compacto}\} \\ &= \{G \cap X : G \in T\} \cup \{G \cap X : G = A \cup \{\infty\} \text{ con } X - A \text{ cerrado y compacto}\} \\ &= T \cup \{A : X - A \text{ es compacto y } A \text{ es abierto}\} = T. \end{aligned}$$

3) Sea $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ un recubrimiento abierto de X_∞ . Existe $i_0 \in I$ tal que $\infty \in G_{i_0}$. Ahora bien, $X - G_{i_0}$ es un conjunto compacto y está recubierto por $\mathcal{G}$, luego existe un número finito de elementos $G_{i_1}, \dots, G_{i_m} \in \mathcal{G}$ cuya unión contiene a $X - G_{i_0}$. Entonces,

$$\mathcal{G}_1 = \{G_{i_0}, G_{i_1}, \dots, G_{i_m}\}$$

es un subrecubrimiento de $\mathcal{G}$ que contiene a X_∞ , con lo cual X_∞ es compacto. Queda demostrado el teorema de compactificación de Alexandrov.

4) Tenemos que demostrar que $\overline{X} = X_\infty$. Razonemos por reducción al absurdo:

$$\begin{aligned} \overline{X} \neq X_\infty &\Rightarrow \overline{X} = X \Rightarrow X \text{ es cerrado en } X_\infty \\ &\Rightarrow X_\infty - X = \{\infty\} \text{ es abierto en } X_\infty. \end{aligned}$$

Dado que $\{\infty\} = \emptyset \cup \{\infty\}$, ha de ser $X - \emptyset = X$ cerrado y compacto, en contradicción con la hipótesis.

5) Al ser f continua, f^{-1} transforma conjuntos cerrados en conjuntos cerrados. Es suficiente demostrar que f transforma conjuntos cerrados en conjuntos cerrados. Pero si F es cerrado en Y entonces es compacto y por tanto

$f(F)$ es compacto. Dado que Z es Hausdorff, $f(F)$ es cerrado en Z .

6) Si t recorre el intervalo $(0, 1)$ entonces, $2\pi t$ recorre el intervalo $(0, 2\pi)$ con lo cual $(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ recorre inyectivamente todos los puntos de S^1 salvo $P = (1, 0)$. Esto implica que f es biyectiva. Claramente f es continua si $t \neq \infty$. Para demostrar la continuidad en $P = (1, 0)$, sea V un entorno de P . Este entorno ha de contener un conjunto de la forma

$$W = \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : -\epsilon < t < \epsilon\} \text{ para algún } \epsilon > 0.$$

Ahora bien, $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(W) = X_\infty - [\epsilon, 1 - \epsilon]$ y éste último conjunto es abierto en X_∞ al ser $[\epsilon, 1 - \epsilon]$ cerrado y compacto. Es decir, $f^{-1}(V)$ es entorno de ∞ , lo cual completa la demostración de la continuidad de f . Ahora, basta aplicar el lema del apartado anterior.

137. Matriz equivalente en forma canónica

Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz con respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ es:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

1) Determinar unas bases B y B' de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente tales que

$$[f]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) Determinar matrices P y Q invertibles de orden 4 tales que

$$Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

lo cual probará que A es equivalente a $\text{diag}(I_r, 0)$ (que está en forma canónica).

Solución. 1) Hallemos el rango de A

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{matrix} F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{matrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_3 - 2F_2 \end{matrix} \Rightarrow \text{rango } A = 2. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de $\ker f$ son

$$\ker f : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Asignando a las variables libres los valores x_2 y x_4 primero los valores $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ y luego $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, obtenemos la base del núcleo de f :

$$B_{\ker f} = \{u_3 = (2, 1, 0, 0)^T, u_4 = (1, 0, 3, 1)^T\}.$$

Una base de la imagen estará formada por dos columnas linealmente independientes de la matriz A (por ejemplo la primera y la tercera):

$$B_{\text{Im } f} = \{v_1 = (-1, 2, 3)^T, v_2 = (0, -1, -2)^T\}.$$

Llamando $u_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ y $u_2 = (0, 0, 1, 0)^T$ tenemos $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_2$. Tenemos construida una base de $\mathbb{R}^4$:

$$B = \{u_1 = (1, 0, 0, 0)^T, u_2 = (0, 0, 1, 0)^T, u_3 = (2, 1, 0, 0)^T, u_4 = (1, 0, 3, 1)^T\}.$$

Una base de $\mathbb{R}^3$ se obtiene añadiendo a los vectores v_1 y v_2 el vector $v_3 = (0, 0, 1)^T$:

$$B' = \{v_1 = (-1, 2, 3)^T, v_2 = (0, -1, -2)^T, v_3 = (0, 0, 1)^T\}.$$

En consecuencia,

$$\begin{cases} f(u_1) = v_1 \\ f(u_2) = v_2 \\ f(u_3) = 0 \\ f(u_4) = 0 \end{cases} \Rightarrow [f]_{B'}^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) Si P es la matriz de cambio de la canónica de $\mathbb{R}^4$ a B y Q la de cambio de la canónica de $\mathbb{R}^3$ a B' , por un conocido teorema la matriz de f con respecto a las bases B y B' es $Q^{-1}AP$. Por tanto

$$Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y la matrices pedidas son

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Queda pues probado que A es equivalente a la matriz en forma canónica $\text{diag}(I_2, 0)$.

138. Representación paramétrica regular

Sea I un intervalo de la recta real y $E = \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Se llama *representación paramétrica regular* a cualquier aplicación

$$\mathbf{x} : I \rightarrow E, \quad t \rightarrow \mathbf{x}(t)$$

que satisface las condiciones

- (1) $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^1(I)$.
- (2) $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0} \quad \forall t \in I$.

1) Demostrar que las siguientes aplicaciones son representaciones paramétricas regulares

- (a) $\mathbf{x} : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}(t) = (2t, 1 + t^2)$.
- (b) $\mathbf{x} : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin(t/2))$.

2) Demostrar que si $\mathbf{x}$ es una representación paramétrica regular en el intervalo I entonces, para todo $t_0 \in I$ existe un entorno de t_0 en el cual $\mathbf{x}$ es inyectiva. Interpretar el resultado.

Solución. 1) (a) Las funciones componentes de $\mathbf{x}$, $x_1(t) = 2t$, $x_2(t) = 1 + t^2$ son claramente de clase 1 en $(-\infty, +\infty)$, luego también lo es $\mathbf{x}$. Además, $\mathbf{x}'(t) = (1, 2t) \neq (0, 0)$ para todo t .
 (b) Tenemos $\mathbf{x}'(t) = (-\sin t, \cos t, \cos(t/2))$, luego $\mathbf{x}$ es de clase 1 en $\mathbb{R}$. Por otra parte

$$|\mathbf{x}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \cos^2(2t)} = \sqrt{1 + \cos^2(2t)} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}'(t) \neq (0, 0, 0) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2) Como $\mathbf{x}$ es representación paramétrica regular, $\mathbf{x}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ con lo cual alguna de las componentes de $\mathbf{x}'(t_0)$ ha de ser no nula, por ejemplo $x'_1(t_0) \neq 0$. Al ser x'_1 continua en t_0 , existe $\delta > 0$ tal que

$$x'_1(t) \neq 0 \text{ si } t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) = I_1. \quad (*)$$

Veamos que x_1 es inyectiva en I_1 . En efecto, si existieran $t_1 < t_2$ en I_1 tales que $x_1(t_1) = x_1(t_2)$, por el teorema de Rolle, $x'_1(\xi) = 0$ para algún $\xi \in (t_1, t_2)$ en contradicción con (*). Por tanto x_1 es inyectiva en I_1 y como consecuencia también lo es $\mathbf{x}$. Lo anterior prueba que en un entorno de t_0 no existen puntos dobles es decir, no ocurre $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$ si $t_1 \neq t_2$.

139. Fórmula de Bayes

Sea $(E, \mathcal{B}, p)$ un espacio probabilístico, $B, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ con probabilidades no nulas, $A_1, A_2, \dots, A_n$ mutuamente excluyentes y que forman un sistema exhaustivo, es decir,

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j, \quad \text{y} \quad A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E.$$

1) Demostrar el *teorema de la probabilidad total*, es decir

$$p(B) = \sum_{i=1}^n p(A_i) p(B | A_i).$$

2) Demostrar la *fórmula de Bayes*, es decir que para todo $i = 1, \dots, n$:

$$p(A_i | B) = \frac{p(A_i) p(B | A_i)}{\sum_{j=1}^n p(A_j) p(B | A_j)}.$$

3) *Aplicación.* Tenemos tres urnas con las siguientes composiciones: A_1 tres bolas blancas y una negra, A_2 dos blancas y dos negras y A_3 una blanca tres negras. Se extrae una bola al azar de una de las urnas y resulta ser blanca. Determinar la probabilidad de que proceda de la urna A_3 .

Solución. 1) Podemos escribir

$$p(B) = p(B \cap E) = p(B \cap (\cup_i A_i)) = P(\cup_i (B \cap A_i)).$$

Dado que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, También $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset$ y por tanto,

$$p(B) = \sum_{i=1}^n p(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n p(A_i) p(B | A_i).$$

2) Por definición de probabilidad condicionada:

$$p(A_i \cap B) = p(A_i) p(B | A_i) = p(B) p(A_i | B).$$

Usando el teorema de la probabilidad total:

$$p(A_i | B) = \frac{p(A_i) p(B | A_i)}{p(B)} = \frac{p(A_i) p(B | A_i)}{\sum_{j=1}^n p(A_j) p(B | A_j)}.$$

3) Llamemos A_1, A_2, A_3 a los sucesos elegir la urna A_1, A_2, A_3 respectivamente y B al suceso la bola extraída es blanca. Tenemos

$$P(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = \frac{1}{3},$$

$$p(B | A_1) = \frac{3}{4}, \quad p(B | A_2) = \frac{2}{4}, \quad p(B | A_3) = \frac{1}{4}.$$

Aplicando la fórmula de Bayes,

$$P(A_3 | B) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \right)} = \frac{1}{6}.$$

140. Distribución de Poisson

Se define la distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$ como:

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

en donde λ es un número real positivo.

1) Demostrar que la distribución de Poisson es una distribución de probabilidad.

2) Determinar su media y desviación típica.

3) Demostrar que los límites cuando $n \rightarrow +\infty$ de las probabilidades $p_k(n)$ de una distribución binomial $B(n, p)$, son las p_k de una distribución de Poisson con $\lambda = np$ (constante).

Nota. Esto significa que la distribución de Poisson aproxima bien la binomial cuando n es grande y p pequeño. Se considera que la aproximación es buena si $p < 0,1$ y $np < 5$.

4) *Aplicación.* Supóngase que el 2% de los artículos producidos por una fábrica son defectuosos. Hallar la probabilidad P de que halla 3 artículos defectuosos en un lote de 100 artículos.

Solución. 1) Para todo $k = 0, 1, 2, \dots$ es $p_k \geq 0$. Por otra parte,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

2) La media es

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \cdot 1 = \lambda. \end{aligned}$$

La varianza es $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p_k - \mu^2$. Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p_k &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k p_k + \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \right) \\ &= \lambda(\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow \sigma^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \end{aligned}$$

En consecuencia, la desviación típica de la distribución de Poisson es $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

3) La probabilidad de k éxitos en una distribución binomial $B(n, p)$ es

$$p_k(n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Si denotamos $\lambda = np$,

$$\begin{aligned} p_k(n) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}. \end{aligned}$$

Cuando $n \rightarrow +\infty$, el primer factor es constante, el segundo tiende a $e^{-\lambda}$ y el tercero tiende a 1 al haber un número finito de factores en el numerador y el denominador que todos tienden a 1. En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_k(n) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p_k.$$

4) Se trata de una distribución binomial con $n = 100$ y $p = 0,02$. Entonces,

$$P = \binom{100}{3} (0,02)^3 (0,98)^{97} = 0,182 \dots$$

Ahora bien, al ser n grande y p pequeño, podemos aplicar la distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 100 \cdot 0,02 = 2$, con lo cual

$$P \approx p_3 = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0,180 \dots$$

141. Cambio admisible de parámetro

Sea I_u un intervalo de la recta real y $t : I_u \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación. Se dice que la función $t = t(u)$ es un *cambio admisible de parámetro* si

$$(1) \ t \in \mathcal{C}^1(I_u). \quad (2) \ \frac{dt}{du} \neq 0 \quad \forall u \in I_u.$$

1) Demostrar que las siguientes aplicaciones son cambios admisibles de parámetro

$$(a) \ t = 3u^5 + 10u^3 + 15u + 1 \text{ en } I_u = \mathbb{R}.$$

$$(b) \ t = \tan \frac{\pi u}{2} \text{ en } I_u = [0, 1).$$

2) Demostrar que si t es cambio admisible de parámetro en I_u entonces, t es en I_u estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

3) Demostrar que si t es cambio admisible de parámetro en I_u entonces, $I_t := t(I_u)$ es un intervalo de la recta real y que $t : I_u \rightarrow I_t$ es biyectiva.

4) Demostrar que la inversa de un cambio admisible de parámetro también es cambio admisible de parámetro.

Solución. 1) (a) Tenemos $dt/du = 15u^4 + 30u^2 + 15 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Por otra parte

$$\frac{dt}{du} = 15u^4 + 30u^2 + 15 = 15(u^4 + 2u^2 + 1) = (u^2 + 1)^2 \neq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

(b) Si u recorre el intervalo $[0, 1)$ entonces, $\pi u/2$ recorre el intervalo $[0, \pi/2)$ y en éste último intervalo el coseno no se anula, en consecuencia,

$$\frac{dt}{du} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi u}{2}} \in \mathcal{C}^1([0, 1)) \quad \text{y} \quad \frac{dt}{du} \neq 0 \quad \forall u \in [0, 1).$$

2) Dado que dt/du es no nula y continua en I_u , por el teorema de Bolzano no puede tomar dt/du valores de distinto signo, luego $dt/du > 0$ en I_u con lo cual t es estrictamente creciente, o bien $dt/du < 0$ en I_u con lo cual t es estrictamente decreciente.

3) Como I_u es intervalo de la recta real, es conjunto conexo. Al ser t continua, $I_t = t(I_u)$ es también conexo y por tanto es un intervalo de la recta real. Al ser t estrictamente creciente o estrictamente decreciente, es inyectiva. Es sobreyectiva por construcción.

4) Si $t : I_u \rightarrow I_t$ es cambio admisible de parámetro y $u : I_t \rightarrow I_u$ es su función inversa, entonces

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\underbrace{dt/du}_{\neq 0}} \neq 0.$$

Además, al ser dt/du continua, también lo es du/dt .

142. Curvas regulares

Se dice que la representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in I_t$ es *equivalente* a la representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(u)$, $u \in I_u$ sii existe un cambio admisible de parámetro $t = t(u)$ en I_u tal que $t(I_u) = I_t$ y además

$$\mathbf{x}[t(u)] = \mathbf{x}^*(u) \quad \forall u \in I_u.$$

1) Demostrar que la relación definida anteriormente es una relación de equivalencia sobre el conjunto de las representaciones paramétricas regulares.

2) Se llama *curva regular* a cada una de las clases de equivalencia de la relación anterior. Demostrar que las dos siguientes representaciones paramétricas regulares definen la misma curva regular.

$$\mathbf{x} : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \sin t \\ x_3 = e^t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad \mathbf{x}^* : \begin{cases} x_1 = \log t \\ x_2 = \sin \log t \\ x_3 = t \end{cases} \quad (t \in (0, +\infty)).$$

Solución. 1) *Reflexiva.* Sea la representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in I_t$ y consideremos la aplicación identidad $t : I_u = I_t \rightarrow I_t$, $t = u$. Claramente $t = u$ es un cambio admisible de parámetro y además

$$\mathbf{x}[t(u)] = \mathbf{x}(u) \quad \forall u \in I_u.$$

Simétrica. Si la representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in I_t$ es equivalente a la representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(u)$, $u \in I_u$, existe un cambio admisible de parámetro $t : I_u \rightarrow I_t$, $t = t(u)$ tal que

$$\mathbf{x}[t(u)] = \mathbf{x}^*(u) \quad \forall u \in I_u.$$

Sabemos que la aplicación inversa $u : I_t \rightarrow I_u$, $u = u(t)$ es un cambio admisible de parámetro y además

$$\mathbf{x}^*[u(t)] = \mathbf{x}^*(u) = \mathbf{x}[t(u)] = \mathbf{x}(t) \quad \forall t \in I_t,$$

luego $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(u)$, $u \in I_u$ es equivalente a $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in I_t$.

Transitiva. Sean las representaciones regulares

$$R_1 : \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \\ t \in I_t \end{cases} \quad R_2 : \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}^*(u) \\ u \in I_u \end{cases} \quad R_3 : \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}^{**}(\theta) \\ \theta \in I_\theta \end{cases}$$

Si R_1 es equivalente a R_2 y R_2 a R_3 , existen cambios admisibles de parámetro $t : I_u \rightarrow I_t$, $t = t(u)$ y $u : I_\theta \rightarrow I_u$, $u = u(\theta)$ tales que

$$\mathbf{x}[t(u)] = \mathbf{x}^*(u) \quad \forall u \in I_u, \quad \mathbf{x}^*[u(\theta)] = \mathbf{x}^{**}(\theta) \quad \forall \theta \in I_\theta.$$

Consideremos la composición de los cambios admisibles de parámetro

$$t \circ u : I_\theta \rightarrow I_t, \quad \theta \rightarrow t = t[u(\theta)]$$

Aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{dt}{d\theta} = \underbrace{\frac{dt}{du}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\frac{du}{d\theta}}_{\neq 0} \Rightarrow \frac{dt}{d\theta} \neq 0 \text{ en } I_\theta,$$

y dt/du , $du/d\theta$ son continuas, en consecuencia, $t \circ u : I_\theta \rightarrow I_t$ es cambio admisible de parámetro y además

$$\mathbf{x}[(t \circ u)(\theta)] = \mathbf{x}[t(u(\theta))] = \mathbf{x}^*[u(\theta)] = \mathbf{x}^{**}(\theta) \quad \forall \theta \in I_\theta$$

por tanto, R_1 es equivalente a R_3 .

2) Consideremos la aplicación $t : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $t = \log u$. Entonces, $dt/du = 1/u$ es continua y no nula para todo $u \in (0, +\infty)$, con lo cual es un cambio admisible de parámetro. Por otra parte

$$\mathbf{x}[t(u)] = \mathbf{x}(\log u) = (\log u, \sin \log u, u) = \mathbf{x}^*(u) \quad \forall u \in (0, +\infty),$$

lo cual prueba que definen la misma curva regular.

143. EDO homogénea con coeficiente analíticos

Se considera la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (E)$$

en donde las funciones p y q son analíticas en el intervalo $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ con desarrollos

$$p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x - x_0)^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x - x_0)^n.$$

1. Supongamos que $y(x)$ es una solución de (E) analítica en I , esto es

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Demostrar que se verifican las relaciones de recurrencia

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = - \sum_{k=0}^n [(k+1)a_{k+1}b_{n-k} + a_k c_{n-k}], \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (*)$$

2. Las relaciones recurrentes anteriores definen a_{n+2} en función de los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}$ y de los de $p(x)$ y $q(x)$ y por ende, $a_2, a_3, a_4, \dots$ en función de a_0, a_1 y de los de $p(x)$ y $q(x)$. Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ es convergente en I , con lo cual estará demostrado que $y(x)$ es solución de (E) .

3. Demostrar que existen dos funciones analíticas de (E) que son linealmente independientes.

Nota. En general, se puede demostrar que para la ecuación homogénea

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0y = 0 \quad (n \geq 1)$$

con coeficientes $p_{n-1}(x), \dots, p_0(x)$ funciones analíticas en el intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$, existen n funciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ linealmente independientes y analíticas en dicho intervalo.

4. Aplicación. Dar una solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - xy' + 4y = 0$$

que sea analítica en $\mathbb{R}$. Expresarla como combinación lineal de dos funciones linealmente independientes.

Solución. 1. Usando la derivación término a término de las series de potencias

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Usando la fórmula del producto de Cauchy para series absolutamente convergentes:

$$\begin{aligned} q(x)y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_n c_{n-k} \right) (x-x_0)^n, \\ p(x)y'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} b_{n-k} \right) (x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (E) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + \sum_{k=0}^n ((k+1) a_{k+1} b_{n-k} + a_k c_{n-k}) \right] (x-x_0)^n = 0.$$

Por tanto se han de verificar las relaciones:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = - \sum_{k=0}^n [(k+1)a_{k+1}b_{n-k} + a_k c_{n-k}], \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

2. Para $x = x_0$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge trivialmente. Sea $x_1 \in I$ con $x_1 \neq x_0$ y llamemos $t = |x_1 - x_0|$. Como las series $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x_1 - x_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x_1 - x_0)^n$ son absolutamente convergentes en x_1 , sus términos están acotados en valor absoluto, es decir existen constantes positivas K_1 y K_2 tales que

$$|b_k| t^k \leq K_1, \quad |c_k| t^k \leq K_2, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Llamando $K = \max\{K_1, K_2\}$ se verifica

$$|b_k| \leq \frac{K}{t^k}, \quad |c_k| \leq \frac{K}{t^k}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Usando las relaciones anteriores junto con las relaciones de recurrencia (*):

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)|a_{n+2}| &= \left| \sum_{k=0}^n [(k+1)a_{k+1}b_{n-k} + a_k c_{n-k}] \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n [(k+1)|a_{k+1}||b_{n-k}| + |a_k||c_{n-k}|] \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left[(k+1)|a_{k+1}| \frac{M}{t^{n-k}} + |a_k| \frac{M}{t^{n-k+1}} \right] \\ &= \frac{M}{t^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^n (k+1)|a_{k+1}| t^{k+1} + \sum_{k=0}^n |a_k| t^k \right]. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\sum_{k=0}^n |a_k| t^k = |a_0| + \sum_{k=1}^n |a_k| t^k = |a_0| + \sum_{k=0}^n |a_{k+1}| t^{k+1} - |a_{n+1}| t^{n+1},$$

con lo cual

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)|a_{n+2}| &\leq \\ \frac{M}{t^{n+1}} &\left[\sum_{k=0}^n (k+1)|a_{k+1}| t^{k+1} + |a_0| + \sum_{k=0}^n |a_{k+1}| t^{k+1} - |a_{n+1}| t^{n+1} \right] \\ &\leq \frac{M}{t^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^n (k+1)|a_{k+1}| t^{k+1} + |a_0| + \sum_{k=0}^n |a_{k+1}| t^{k+1} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{M}{t^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^n (k+2) |a_{k+1}| t^{k+1} + |a_0| \right] = \frac{M}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} (k+1) |a_k| t^k.$$

Definamos la sucesión $\{A_n\}_{n \geq 0}$ de la forma recurrente

$$\begin{cases} A_0 = |a_0|, \quad A_1 = |a_1|, \\ (n+2)(n+1)A_{n+2} = \frac{M}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} (k+1) A_k t^k. \quad (**) \end{cases}$$

Como $|a_n| \leq A_n$ para todo $n \geq 0$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |x - x_0|^n$ está mayorada por la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n |x - x_0|^n$, para todo $x \in I$ con lo cual si la segunda es convergente, lo será la primera. Sustituyendo n por $n-1$ en (**):

$$(n+1)nA_{n+1} = \frac{M}{t^n} \sum_{k=0}^n (k+1) A_k t^k.$$

Multiplicando por t^{-1} :

$$(n+1)nt^{-1}A_{n+1} = \frac{M}{t^{n+1}} \sum_{k=0}^n (k+1) A_k t^k.$$

Restando a la igualdad (**) la igualdad anterior

$$(n+2)(n+1)A_{n+2} - (n+1)nt^{-1}A_{n+1} = M(n+2)A_{n+1},$$

de lo cual se deduce

$$\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} = \frac{(n+1)n + M(n+2)t}{(n+2)(n+1)t} \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} = \frac{1}{t}.$$

Aplicando el criterio de D'Alembert para $x \in I$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_{n+2} |x - x_0|^{n+2}}{A_{n+1} |x - x_0|^{n+1}} = \frac{|x - x_0|}{t} < 1 \text{ si } |x - x_0| < t = |x_1 - x_0|.$$

Al ser x_1 arbitrario en I se deduce que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ es absolutamente convergente en I y por tanto convergente.

3. Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ las soluciones de (E) que satisfacen respectivamente $a_0 = 1, a_1 = 0$ y $a_0 = 0, a_1 = 1$ es decir,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + 0(x - x_0) + \dots \\ y_2(x) &= 0 + 1(x - x_0) + \dots \end{aligned}$$

entonces

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2(x - x_0) + \dots = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

lo cual implica que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones analíticas de (E) en el intervalo I y linealmente independientes.

4. Las funciones $p(x) = x$, $q(x) = -4$ son analíticas en todo intervalo de la forma $(-r, r)$ para todo $r > 0$ y por tanto analíticas en $\mathbb{R}$. Por el teorema anterior, existen las soluciones pedidas. Sea

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Sustituyendo en la ecuación dada:

$$\begin{aligned} 0 &= y'' - xy' + 4y \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 4a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 4a_n x^n \\ &= (2a_2 + 4a_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-4)a_n]. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} 2a_2 + 4a_0 &= 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-4)a_n &= 0. \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} a_2 &= -2a_0 \\ a_{n+2} &= \frac{n-4}{(n+2)(n+1)} a_n. \end{aligned}$$

Distingamos los casos n par y n impar. Para n par tenemos:

$$a_2 = -2a_0, \quad a_4 = -\frac{1}{6}a_2 = \frac{1}{3}a_0, \quad a_6 = 0, \quad a_8 = 0, \quad a_{10} = 0, \quad \dots$$

Para $n = 2k + 1$ impar tenemos:

$$a_{2k+1} = \frac{2k-5}{(2k+1)(2k)} a_{2k-1} = \frac{(2k-5)(2k-7)}{(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)} a_{2k-3}$$

$$= \dots = \frac{(2k-5)(2k-7)\dots(-3)}{(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)\dots(3)(2)} a_1.$$

Por tanto,

$$y(x) = a_0 \left(1 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4 \right) + a_1 \left(x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k-5)(2k-7)\dots(-3)}{(2k+1)!} x^k \right),$$

y de acuerdo con el apartado anterior, las dos funciones entre paréntesis son soluciones de la ecuación diferencial dada, analíticas en $\mathbb{R}$ y linealmente independientes.

144. Límite de una sucesión por la definición

$$\text{Demostrar que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 2}{3n^2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Solución. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño

$$\begin{aligned} \left| \frac{n^2 - 2}{3n^2 + 1} - \frac{1}{3} \right| < \epsilon &\Leftrightarrow \left| \frac{-7}{9n^2 + 3} \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{7}{9n^2 + 3} < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{\epsilon} - 3 < 9n^2 \Leftrightarrow \frac{7 - 3\epsilon}{9\epsilon} < n^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{7 - 3\epsilon}{9\epsilon}} < n \end{aligned}$$

Es decir, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño si

$$n_0 = \left\lfloor \sqrt{\frac{7 - 3\epsilon}{9\epsilon}} \right\rfloor + 1$$

entonces

$$\left| \frac{n^2 - 2}{3n^2 + 1} - \frac{1}{3} \right| < \epsilon$$

si $n \geq n_0$ por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 2}{3n^2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

145. Inverso de un elemento en $\mathbb{Q}/\langle x^2 + x + 1 \rangle$

Hallar el inverso del elemento $3 + 2x + \langle x^2 + x + 1 \rangle$ de $\mathbb{Q}/\langle x^2 + x + 1 \rangle$.

Solución. Tenemos:

$$\begin{aligned} (3 + 2x + \langle x^2 + x + 1 \rangle) (ax + b + \langle x^2 + x + 1 \rangle) &= 1 + \langle x^2 + x + 1 \rangle \\ \Leftrightarrow (3 + 2x)(ax + b) + \langle x^2 + x + 1 \rangle &= 1 + \langle x^2 + x + 1 \rangle \\ \Leftrightarrow 2ax^2 + (3a + 2b)x + 3b + \langle x^2 + x + 1 \rangle &= 1 + \langle x^2 + x + 1 \rangle. \end{aligned}$$

El resto de la división de $2ax^2 + (3a + 2b)x + 3b$ entre $x^2 + x + 1$ es $(a + 2b)x + 3b - 2a$, por tanto

$$\begin{aligned} 2ax^2 + (3a + 2b)x + 3b &= \langle x^2 + x + 1 \rangle = \\ (a + 2b)x + 3b - 2a + \langle x^2 + x + 1 \rangle &= 1 + \langle x^2 + x + 1 \rangle. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 3b - 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -2/7, b = 1/7.$$

Por tanto,

$$[(3 + 2x + \langle x^2 + x + 1 \rangle)]^{-1} = -\frac{2}{7}x + \frac{1}{7} + \langle x^2 + x + 1 \rangle.$$

146. Caracterización de $a \ker f$ para un homomorfismo de grupos

Sea $f : G \rightarrow G'$ un homomorfismo de grupos y sea $a \in G$. Demostrar que $a \ker f = \{g \in G : f(g) = f(a)\}$.

Solución. Denotemos por e' al neutro de G' y veamos el doble contenido

$$\subset) \quad x \in a \ker f \Rightarrow g = ah \text{ con } h \in \ker f$$

$$\Rightarrow f(g) = f(ah) = f(a)f(h) = f(a)e' = f(a).$$

$$\supset) \quad f(g) = f(a) \Rightarrow [f(a)]^{-1} f(g) = e' \Rightarrow f(a^{-1}g) = e' \Rightarrow a^{-1}g \in \ker f$$

$$\Rightarrow a^{-1}g = h \text{ con } h \in \ker f \Rightarrow g = ah \text{ con } h \in \ker f \Rightarrow g \in a \ker f.$$

Concluimos pues que $a \ker f = \{g \in G : f(g) = f(a)\}$.

147. Límite de una sucesión de conjuntos

Sea $A_1, A_2, A_3, \dots$ una sucesión de conjuntos contenidos en un conjunto universal U . Se definen:

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

1. Demostrar que

$$(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c, \quad (\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c.$$

2. Si para una sucesión de conjuntos $\{A_n\}$ se verifica $\liminf A_n = \limsup A_n$, se define

$$\lim A_n = \liminf A_n = \limsup A_n.$$

Demostrar que

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

3. Determinar $\lim A_n$, siendo $A_n = \left[0, \frac{n}{n+1}\right)$.

4. Demostrar que:

$$(a) \limsup A_n = \left\{ x \in U : \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) = \infty \right\},$$

$$(b) \liminf A_n = \left\{ x \in U : \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n^c}(x) < \infty \right\}.$$

en donde χ_M representa la función característica de $M \subset U$.

5. Demostrar que para cualquier sucesión $A_1, A_2, A_3, \dots$ se verifica

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n.$$

Solución. 1. Usando las leyes de Morgan

$$\begin{aligned} (\liminf A_n)^c &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right)^c \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c = \limsup A_n^c. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} (\limsup A_n)^c &= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)^c \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \liminf A_n^c. \end{aligned}$$

2. Si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ entonces, $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ y por tanto $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ entonces, $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ y por tanto

$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Por otra parte si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ entonces $A_1^c \supset A_2^c \supset A_3^c \supset \dots$, con lo cual

$$\begin{aligned} \limsup A_n^c &= \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \underbrace{=}_{\text{apartado 1}} (\limsup A_n)^c \\ &\Rightarrow \limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \end{aligned}$$

en consecuencia

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \Rightarrow \lim A_n = \liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

De igual manera si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ entonces $A_1^c \subset A_2^c \subset A_3^c \subset \dots$, con lo cual

$$\begin{aligned} \liminf A_n^c &= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \underbrace{=}_{\text{apartado 1}} (\liminf A_n)^c \\ &\Rightarrow \liminf A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \end{aligned}$$

en consecuencia

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \Rightarrow \lim A_n = \liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

3. Para todo n natural tenemos

$$A_n = \left[0, \frac{n}{n+1} \right), \quad A_{n+1} = \left[0, \frac{n+1}{n+2} \right).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} &= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \\ &\Rightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

y por el apartado anterior, $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dado que $n/(n+1) < 1$ para todo n , se verifica $A_n \subset [0, 1)$ luego $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0, 1)$. Sea ahora $x \in [0, 1)$. Como $\lim n/(n+1) = 1$, existe n_0 tal que $n_0/(n_0+1) > x$ lo cual implica

que $x \in A_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Concluimos que $\lim A_n = [0, 1)$.

4. (a) Tenemos

$$x \in \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow \forall n \exists k_n : x \in A_{k_n}$$

$$\Rightarrow \forall n \exists k_n : \chi_{A_{k_n}}(x) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) = \infty.$$

Recíprocamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) = \infty$ existe una sucesión $k_1, k_2, k_3, \dots$ tal que $\chi_{A_{k_n}}(x) = 1$ o bien $x \in A_{k_n}$ con lo cual para todo n , $x \in \bigcup_{k \geq n} A_k$ y por ende $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

(b) Tenemos

$$\begin{aligned} x \in \liminf A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \exists n_0 : x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \exists n_0 : x \notin \left(\bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k \right)^c \\ &= \bigcup_{k=n_0}^{\infty} A_k^c \Leftrightarrow x \notin A_k^c \forall k \geq n_0 \Leftrightarrow \exists n_0 : \chi_{A_k^c}(x) = 0 \forall k \geq n_0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n^c}(x) < \infty. \end{aligned}$$

5. Según el apartado anterior, el límite superior es el conjunto de los elementos que pertenecen a infinitos conjuntos de la sucesión, y el límite inferior es el conjunto de los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de la sucesión salvo a lo sumo a un número finito. De aquí se deduce trivialmente que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

148. Ecuaciones paramétricas de la intersección de una esfera y un plano

Determinar unas ecuaciones paramétricas de la curva intersección de la esfera $E : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el plano $\pi : x + y + z = 0$.

Solución. Sustituyendo $z = -x - y$ en la ecuación de la esfera obtenemos

$$x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 4, \text{ o bien } 2x^2 + 2xy + 2y^2 = 4.$$

Podemos escribir la cónica anterior en la forma

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 4 = (x, y) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4 = 0.$$

Apliquemos a M el teorema espectral. Valores propios

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = 1.$$

Bases de los subespacios propios

$$V_3 \equiv \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}, \quad B_{V_1} = \{(1, 1)\}$$

$$V_1 \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}, \quad B_{V_4} = \{(-1, 1)\}$$

Una base ortonormal y de vectores propios de $\mathbb{R}^2$ es por tanto

$$B' = \{e_1, e_2\} \text{ con } e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1).$$

La matriz de P de cambio de la base canónica $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a la B' es

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{ortogonal}),$$

y la expresión del cambio es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 4 &= (x, y) M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4 \\ &= (x', y') P^t M P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 4 = (x', y') \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 4 \\ &= 3(x')^2 + (y')^2 - 4 = 0. \end{aligned}$$

La ecuación de la cónica en los nuevos ejes $x'y'$ es por tanto

$$\frac{(x')^2}{(2/\sqrt{3})^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1.$$

Las ecuaciones paramétricas de la elipse son por tanto

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t \\ y' = 2 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sustituyendo $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cos t - 2 \sin t \right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cos t + 2 \sin t \right) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Como $z = -x - y$, unas ecuaciones paramétricas de la intersección $E \cap \pi$ son

$$E \cap \pi : \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos t - \sin t \right) \\ y = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos t + \sin t \right) \\ z = -\frac{4}{\sqrt{6}} \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

149. Cuerpo primo

Los cuerpos $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \dots, \mathbb{Q}$ se denominan cuerpos primos.

1. Demostrar que todo subcuerpo de un cuerpo primo coincide con él mismo.
2. Demostrar que todo cuerpo contiene a un subcuerpo isomorfo a un cuerpo primo. Es decir, todo cuerpo contiene a un cuerpo mínimo que es una copia de $\mathbb{Q}$ o de $\mathbb{Z}_p$ para algún p primo.

Solución. 1. Si L es subcuerpo de $\mathbb{Q}$ entonces, $1 \in L$ y por tanto $n \cdot 1 = n \in L$ para todo entero n . Es decir $\mathbb{Z} \subset L$. Como L es cuerpo, si $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ entonces $1/m \in L$ y por ende $n \cdot (1/m) = n/m \in L$. Es decir $L \supset \mathbb{Q}$ y por tanto $L = \mathbb{Q}$.

Si L es subcuerpo de $\mathbb{Z}_p$ con p primo, entonces $1 \in L$ y por tanto

$$r \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{r)} \in L \quad \forall r = 0, 1, 2, \dots, p-1.$$

Es decir, $L \supset \mathbb{Z}_p$ luego $L = \mathbb{Z}_p$.

2. Sea K un cuerpo y consideremos la aplicación

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow K, \quad f(n) = n \cdot 1_K = 1_K + 1_K + \dots + 1_K \quad (n \text{ veces}).$$

Fácilmente verificamos que f es un homomorfismo de anillos y por tanto $\ker f$ es un ideal de $\mathbb{Z}$.

Primer caso: $\ker f = \{0\}$. En este caso, $n \cdot 1_K = 0$ implica $n = 0$ luego cada entero no nulo se transforma en un elemento invertible de K . Consideremos la aplicación

$$g: \mathbb{Q} \rightarrow K, \quad g\left(\frac{m}{n}\right) = (m \cdot 1_K)(n \cdot 1_K)^{-1}$$

Esta aplicación es un isomorfismo de cuerpos con lo cual $\mathbb{Q} \cong \text{Im } f \subset K$ y en consecuencia K contiene una copia de $\mathbb{Q}$.

Segundo caso: $\ker f \neq \{0\}$. En este caso, $n \cdot 1_K = 0$ para algún $n \neq 0$. Si p es el menor entero positivo tal que $p \cdot 1_K = 0$, entonces p es primo pues p es la característica de K . Por un conocido teorema de isomorfía, se verifica $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\ker f \cong \text{Im } f \subset K$ lo cual implica que K contiene una copia de $\mathbb{Z}_p$.

150. Cuerpo de ruptura de un polinomio

Sea k un cuerpo, $f \in k[x]$ irreducible y sin raíces en k . Se llama *cuerpo de ruptura* de f a cualquier extensión simple $k' = k(\xi)$ de k en la que f tiene la raíz ξ .

1) Sea k un cuerpo, $f \in k[x]$ irreducible y sin raíces en k (por tanto, grado $f \geq 2$). Demostrar que

(i) $\Sigma = k[x]/(f)$ es un cuerpo extensión de k .

(ii) $\xi = x + (f)$ es raíz de f en Σ .

(iii) $\Sigma = k(\xi)$, es decir Σ es extensión algebraica simple.

Nota. Esto demuestra que $\Sigma = k(\xi)$ es cuerpo de ruptura de f , y por tanto f es reducible en $k(\xi)[x]$ al ser $f(x) = (x - \xi)g(x)$ con $g \in k(\xi)[x]$.

2) Describir las operaciones suma y producto en $k(\xi)$.

3) Determinar un cuerpo de ruptura $\mathbb{Q}(\xi)$ del polinomio irreducible

$$f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x].$$

4) Determinar un cuerpo de ruptura $\mathbb{R}(\xi)$ del polinomio irreducible

$$f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x].$$

5) Determinar un cuerpo de ruptura $\mathbb{Q}(\xi)$ del polinomio irreducible

$$f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x].$$

Solución. 1) (i) Al ser f irreducible, (f) es ideal maximal y por tanto $\Sigma = k[x]/(f)$ es un cuerpo. Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} k &\rightarrow \bar{k} = \{a + (f) : a \in k\} \subset \Sigma \\ a &\rightarrow a + (f). \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que tal aplicación es un isomorfismo de cuerpos, y por tanto se puede considerar k incluido en Σ .

(ii) Sea $f(x) = \sum_{k=0}^m c_k x^k$. Usando las conocidas operaciones en $k[x]/(f)$,

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^m c_k \xi^k = \sum_{k=0}^m c_k (x + (f))^k = \sum_{k=0}^m c_k (x^k + (f)) = \sum_{k=0}^m (c_k x^k + (f))$$

$$= \left(\sum_{k=0}^m c_k x^k \right) + (f) = f(x) + (f) \underbrace{=}_{f-0=f \in (f)} 0 + (f) = 0.$$

(iii) Todo elemento de $\sum$ es de la forma

$$h(x) + (f) = \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) + (f) = \sum_{k=0}^n a_k (x + (f))^k = \sum_{k=0}^n a_k \xi^k.$$

Es decir, $\sum \subset k[\xi]$. Entonces, $\sum \subset k[\xi] \subset k(\xi) \subset \sum$ luego $\sum = k(\xi)$.

2) Si $f \in k[x]$ es irreducible de grado m y $\xi = x + (f)$, entonces el cuerpo de ruptura $\sum$ de f es de la forma

$$\sum = \{r_0 + r_1 \xi + \cdots + r_{m-1} \xi^{m-1} : r_i \in k\}.$$

Si tenemos los elementos de $\sum$

$$\begin{aligned} \mu(\xi) &= r_0 + r_1 \xi + \cdots + r_{m-1} \xi^{m-1}, \\ \mu'(\xi) &= r'_0 + r'_1 \xi + \cdots + r'_{m-1} \xi^{m-1}, \end{aligned}$$

debido a la construcción del cuerpo $\sum$, la operación suma es

$$\mu(\xi) + \mu'(\xi) = r_0 + r'_0 + (r_1 + r'_1) \xi + \cdots + (r_{m-1} + r'_{m-1}) \xi^{m-1},$$

y $\mu(\xi)\mu'(\xi)$ es $r(\xi)$, siendo $r(x)$ el resto de la división de $\mu(x)\mu'(x)$ entre $f(x)$. El método expuesto se llama *adjunción simbólica de Cauchy*.

3) Los elementos de $\mathbb{Q}(\xi)$ son de la forma $a + b\xi$ con $a, b \in \mathbb{Q}$. Para dos elementos $a + b\xi$ y $a' + b'\xi$ de $\mathbb{Q}(\xi)$ la suma es

$$(a + b\xi) + (a' + b'\xi) = (a + b) + (a' + b')\xi$$

Por otra parte,

$$(a + bx)(a' + b'x) = aa' + (ba' + ab')x + bb'x^2,$$

y efectuando la división euclídea entre $x^2 - 2$ obtenemos el resto $2bb' + (a'b + ab')x$, con lo cual

$$(a + b\xi)(a' + b'\xi) = 2bb' + (a'b + ab')\xi.$$

Dado que $\xi^2 = 2$, dividiendo $f(x) = x^2 - 2$ entre $x - \xi$,

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & -2 \\ \xi & & \xi & \xi^2 \\ \hline & 1 & \xi & 0 \end{array}$$

por tanto $f(x) = (x - \xi)(x + \xi)$. Según es sabido, denotamos a ξ por el símbolo $\sqrt{2}$.

4) Los elementos de $\mathbb{R}(\xi)$ son de la forma $a + b\xi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Para dos elementos $a + b\xi$ y $a' + b'\xi$ de $\mathbb{R}(\xi)$ la suma es

$$(a + b\xi) + (a' + b'\xi) = (a + b) + (a' + b')\xi$$

Por otra parte,

$$(a + b\xi)(a' + b'\xi) = a + a' + (ba' + ab')\xi + bb'\xi^2,$$

y efectuando la división euclídea entre $x^2 + 1$ obtenemos el resto $2bb' + (a'b + ab')\xi$, con lo cual

$$(a + b\xi)(a' + b'\xi) = aa' - bb' + (a'b + ab')\xi.$$

Dado que $\xi^2 = 1$, dividiendo $f(x) = x^2 + 1$ entre $x - \xi$,

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 0 & 1 \\ \xi & & \xi & \xi^2 \\ \hline & 1 & \xi & 0 \end{array}$$

por tanto $f(x) = (x - \xi)(x + \xi)$. Según es sabido, denotamos a ξ por el símbolo i (unidad imaginaria). Nótese que hemos construido el cuerpo de los números complejos.

5) Los elementos de $\mathbb{Q}(\xi)$ son de la forma $a + b\xi + c\xi^2$ con $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Para dos elementos $a + b\xi + c\xi^2$ y $a' + b'\xi + c'\xi^2$ de $\mathbb{Q}(\xi)$ la suma es

$$\begin{aligned} & (a + b\xi + c\xi^2) + (a' + b'\xi + c'\xi^2) \\ &= (a + b) + (a' + b')\xi + (c + c')\xi^2 \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} & (a + b\xi + c\xi^2)(a' + b'\xi + c'\xi^2) \\ &= aa' + (ba' + ab')\xi + (a'c + bb' + ac')\xi^2 + (b'c + bc')\xi^3 + cc'\xi^4, \end{aligned}$$

y efectuando la división euclídea entre $x^3 - 2$ obtenemos el resto

$$aa' + 2b'c + 2bc' + (ba' + ab' + 2cc')\xi + (a'c + bb' + ac')\xi^2,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} & (a + b\xi + c\xi^2)(a' + b'\xi + c'\xi^2) \\ &= aa' + 2b'c + 2bc' + (ba' + ab' + 2cc')\xi + (a'c + bb' + ac')\xi^2. \end{aligned}$$

Dado que $\xi^3 = 2$, dividiendo $f(x) = x^3 - 2$ entre $x - \xi$,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -2 \\ \xi & & \xi & \xi^2 & \xi^3 \\ \hline & 1 & \xi & \xi^2 & 0 \end{array}$$

por tanto $f(x) = (x - \xi)(x^2 + \xi x + \xi^2)$. Según es sabido, denotamos a ξ por el símbolo $\sqrt[3]{2}$.

Fascículo 7

Monografías 151-175

151. Completación de todo espacio métrico

Sea X un espacio métrico. Se dice que el espacio métrico X^* es una *completación* de X si X^* es completo y X es isométrico a un subespacio denso de X^* . El objetivo de éste problema es demostrar que todo espacio métrico tiene una completación y que ésta es única salvo isometrías.

1) Sea (X, d) un espacio métrico y sea $C[X]$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en X . Se define en $C[X]$ la relación

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim d(x_n, y_n) = 0.$$

Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $C[X]$

2) Sean (x_n) e (y_n) dos elementos de $C[X]$. Demostrar que la sucesión de números reales $d(x_n, y_n)$ es convergente.

3) Sea el conjunto cociente $X^* = C[X] / \sim$. Se define la aplicación

$$d^* : X^* \times X^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad d^*([x_n], [y_n]) = \lim d(x_n, y_n).$$

Demostrar que está bien definida, es decir que no depende del representante elegido en cada clase.

4) Demostrar que d^* es una distancia en X^* .

5) Para todo $p \in X$ sea la sucesión constante $(p) = (p, p, p, \dots)$. Consideremos el subconjunto de X^* : $\hat{X} = \{[(p)] : p \in X\}$. Demostrar que X es isométrico a $\hat{X}$.

6) Demostrar que $\hat{X}$ es denso en X^* .

7) Demostrar el siguiente lema:

Sea (M, d) un espacio métrico, (b_n) una sucesión de Cauchy en M y sea (a_n) una sucesión en M tal que $d(a_n, b_n) < 1/n$ para todo n natural. Entonces,

(i) (a_n) es sucesión de Cauchy en M .

(ii) $(a_n) \rightarrow p \in M \Leftrightarrow (b_n) \rightarrow p \in M$

- 8) Demostrar que (X^*, d^*) es completo.
 9) Demostrar que si Y^* es una completación de X , entonces Y^* es isométrico a X^* .
 10) ¿Cuál es la completación de $\mathbb{Q}$ con la distancia usual?

Solución. 1) *Reflexiva.* Para todo $(x_n) \in C[X]$ tenemos $\lim d(x_n, x_n) = \lim 0 = 0$, luego $(x_n) \sim (x_n)$.

Simétrica. Para todo $(x_n), (y_n) \in C[X]$ tenemos

$$(x_n) \sim (y_n) \Rightarrow \lim d(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim d(y_n, x_n) = \lim d(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow (y_n) \sim (x_n).$$

Transitiva. Si $(x_n) \sim (y_n)$ e $(y_n) \sim (z_n)$ se verifica $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ y $d(y_n, z_n) \rightarrow 0$. Por la desigualdad triangular, $0 \leq d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$. Por el teorema del Sandwich, $d(x_n, z_n) \rightarrow 0$ luego $(x_n) \sim (z_n)$.

2) Por la desigualdad triangular

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$$

o bien $d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$ con lo cual

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$$

Como las sucesiones (x_n) e (y_n) son de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existen naturales N_x, N_y tales que $d(x_n, x_m) < \epsilon/2$ si $n, m \geq N_x$ y $d(y_n, y_m) < \epsilon/2$ si $n, m \geq N_y$. Entonces,

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \text{ si } N = \max\{N_x, N_y\}.$$

Esto prueba que la sucesión de números reales $d(x_n, y_n)$ es de Cauchy y por tanto convergente al ser $\mathbb{R}$ completo.

3) Supongamos que $(x_n) \sim (x'_n)$ y que $(y_n) \sim (y'_n)$. Sea $l = \lim d(x_n, y_n)$ y $l' = \lim d(x'_n, y'_n)$. Tenemos que demostrar que $l = l'$. Por la desigualdad triangular,

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n).$$

Sea ahora $\epsilon > 0$. Tenemos

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow d(x_n, x'_n) < \epsilon/3,$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \Rightarrow d(y_n, y'_n) < \epsilon/3,$$

$$\exists n_3 \in \mathbb{N} : n \geq n_3 \Rightarrow |d(x'_n, y'_n) - l'| < \epsilon/3.$$

Si $n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\}$ se verifica $d(x_n, y_n) < l' + \epsilon$ y por tanto $\lim d(x_n, y_n) = l \leq l' + \epsilon$ para todo ϵ luego $l \leq l'$. De manera simétrica se demuestra que

$l' \leq l$ y por tanto, $l = l'$.

4) Para todo $[(x_n)], [(y_n)] \in X^*$ tenemos $d^*([(x_n)], [(y_n)]) = \lim d(x_n, y_n)$, límite que vimos que existe y que además es ≥ 0 al ser los $d(x_n, y_n) \geq 0$. Por otra parte,

$$d^*([(x_n)], [(y_n)]) = 0 \Leftrightarrow \lim d(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow (x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow [(x_n)] = [(y_n)].$$

Para todo $[(x_n)], [(y_n)] \in X^*$:

$$d^*([(x_n)], [(y_n)]) = \lim d(x_n, y_n) = \lim d(y_n, x_n) = d^*([(y_n)], [(x_n)]),$$

Para todo $[(x_n)], [(y_n)], [(z_n)] \in X^*$:

$$\begin{aligned} d^*([(x_n)], [(y_n)]) &= \lim d(x_n, y_n) \leq \lim [d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)] \\ &= \lim d(x_n, z_n) + \lim d(z_n, y_n) = d^*([(x_n)], [(z_n)]) + d^*([(z_n)], [(y_n)]). \end{aligned}$$

Concluimos pues que d^* es distancia en X^* .

5) Para todo $p \in X$ la sucesión constante (p) es convergente y por tanto de Cauchy, con lo cual $\hat{X} \subset X^*$. Definamos la aplicación $f : X \rightarrow \hat{X}$ dada por $f(p) = [(p)]$. Tenemos,

$$f(p) = f(q) \Rightarrow [(p)] = [(q)] \Rightarrow \lim (p - q) = p - q = 0 \Rightarrow p = q$$

es decir, f es inyectiva. Por otra parte para todo $[(p)] \in \hat{X}$ se verifica $[(p)] = f(p)$, luego f es sobreyectiva. Veamos ahora que la biyección f es isometría. En efecto, para todo $p, q \in X$:

$$d^*([(p)], [(q)]) = \lim d(p, q) = d(p, q).$$

6) Basta demostrar que todo punto de X^* es el límite de una sucesión de elementos de $\hat{X}$. Sea pues $x = [(x_n)] \in X^*$ y denotemos por $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \dots$ los elementos de $\hat{X}$:

$$\hat{x}_1 = [(x_1, x_1, x_1, \dots)], \hat{x}_2 = [(x_2, x_2, x_2, \dots)], \hat{x}_3 = [(x_3, x_3, x_3, \dots)], \dots$$

Dado que (x_n) es sucesión de Cauchy en X :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} d^*(\hat{x}_m, x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_m, x_n) \right) = \lim_{m, n \rightarrow +\infty} d(x_m, x_n) = 0$$

luego $(\hat{x}_n) \rightarrow x$.

7) (i) Por la desigualdad triangular

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, b_m) + d(b_m, b_n) + d(b_n, a_n).$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe n_1 natural tal que $1/n_1 < \epsilon/3$ por tanto

$$n, m \geq n_1 \Rightarrow d(a_m, a_n) \leq \epsilon/3 + (b_m, b_n) + \epsilon/3.$$

Como (b_n) es de Cauchy, existe n_2 natural tal que si $n, m \geq n_2$ entonces $d(b_m, b_n) < \epsilon/3$. Si $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$,

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

lo cual implica que (a_n) es de Cauchy.

(ii) $\Rightarrow$ Por hipótesis $(a_n) \rightarrow p$, luego $d(a_n, p) \rightarrow 0$. Por otra parte $0 \leq d(b_n, a_n) \leq 1/n$, es decir $d(b_n, a_n) \rightarrow 0$. De la desigualdad triangular $0 \leq d(b_n, p) \leq d(b_n, a_n) + d(a_n, p)$ obtenemos usando el teorema del Sandwich que $d(b_n, p) \rightarrow 0$ o de forma equivalente $(b_n) \rightarrow p$.

$\Leftarrow$ Se demuestra de manera análoga.

8) Sea (α_n) una sucesión de Cauchy en X^* . Tenemos que demostrar que converge en X^* . Como $\hat{X}$ es denso en X^* , para todo n natural existe $\hat{x}_n \in \hat{X}$ tal que $d^*(\hat{x}_n, \alpha_n) < 1/n$. Por la parte (i) del apartado anterior, la sucesión $(\hat{x}_n)$ es también de Cauchy en X^* con lo cual lo será (x_n) en X por ser X y $\hat{X}$ isométricos. Por el apartado 6, $(\hat{x}_n) \rightarrow x \in X^*$ y por la parte (ii) del apartado anterior también $(\alpha_n) \rightarrow x$.

9) Sea Y^* una completación de X . Al ser X isométrico a un subespacio denso de Y^* , podemos asumir que X es subespacio de Y^* . Al ser X denso en Y^* , para todo $y \in Y^*$ existe una sucesión (x_n) de X que converge a y con lo cual (x_n) es de Cauchy. Definamos la aplicación

$$g : Y^* \rightarrow X^*, \quad g(y) = [(x_n)].$$

La aplicación está bien definida pues si (x'_n) es otra sucesión tal que $(x'_n) \rightarrow y$, entonces $d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$ y por tanto $[(x'_n)] = [(x_n)]$. Sean ahora $y, y' \in Y^*$ con $(x_n) \rightarrow y$, $(x'_n) \rightarrow y'$. Entonces,

$$g(y) = g(y') \Rightarrow [(x_n)] = [(x'_n)] \Rightarrow \lim d(x_n, x'_n) = 0 \Rightarrow y = y'$$

luego g es inyectiva. También es sobreyectiva. En efecto, si $[(x_n)] \in X^*$ la sucesión (x_n) es de Cauchy en $X \subset Y^*$ por tanto (x_n) converge a un $y \in Y^*$, luego $[(x_n)] = g(y)$. Por último, para todo $y, y' \in Y^*$

$$\begin{aligned} d^*(f(y), f(y')) &= d^*([(x_n)], [(x'_n)]) = \lim d(x_n, x'_n) \\ &= d(\lim x_n, \lim x'_n) = d(y, y') \end{aligned}$$

es decir, g es isometría.

10) De la conocida construcción de los números reales vía sucesiones de Cauchy racionales, deducimos que la completación de $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}^* = \mathbb{R}$.

152. Álgebras uniformemente densas, teorema Stone-Weierstrass

Sea X un espacio topológico compacto y $C(X)$ el espacio vectorial de las funciones reales continuas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ con la norma de la convergencia uniforme

$$\|f\|_{\infty} = \max \{|f(x)| : x \in X\}.$$

Es claro que una sucesión f_n de $C(X)$ converge uniformemente a $f \in C(X)$ si y sólo si f_n converge a f con la norma anterior. El teorema de Stone-Weierstrass asegura que si $\mathcal{F}$ es un álgebra de $C(X)$ que separa puntos y contiene a las funciones constantes, entonces es uniformemente densa en $C(X)$ (es decir, es densa con la norma de la convergencia uniforme).

Esto, naturalmente equivale a decir que para toda función $f \in C(X)$ existe una sucesión f_n en $\mathcal{F}$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Se pide:

- 1) Demostrar que el conjunto $\mathbb{R}[x]$ de las funciones polinómicas es familia uniformemente densa en $C([a, b])$. Concluir.
- 2) Ídem para $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y la familia $\mathcal{F} = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ de las funciones polinómicas.
- 3) Demostrar que el subespacio vectorial de $C[0, 1]$ generado por las funciones $\{e^{nx} : n \in \mathbb{Z}\}$ es uniformemente densa en $C[0, 1]$.
- 4) Demostrar que el teorema de Stone-Weierstrass es aplicable al intervalo $[a, b]$ con

$$\mathcal{F} = \text{Lip}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } f \text{ lipschitziana}\}.$$

Solución. 1) Recordamos que si A y B son conjuntos y $\mathcal{F}$ es una familia de funciones de A en B , se dice que $\mathcal{F}$ separa puntos si para cada par de elementos $x, y \in A$ con $x \neq y$ existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

El intervalo $[a, b]$ es compacto, $\mathbb{R}[x]$ es un álgebra de $C([a, b])$ y contiene a las funciones constantes. Por otra parte si $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha \neq \beta$ el polinomio $p(x) = x$ satisface $p(\alpha) \neq p(\beta)$. Por el teorema de Stone-Weierstrass $\mathbb{R}[x]$ es álgebra uniformemente densa en $C([a, b])$. Concluimos que para toda función continua f en $[a, b]$ existe una sucesión de polinomios p_n tales que $p_n \rightarrow f$ en $[a, b]$ uniformemente.

Nota. Este caso particular del teorema de Stone-Weierstrass se conoce como *Teorema de Weierstrass*.

2) De nuevo, K es compacto por hipótesis, $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ es un álgebra de $C(K)$ y contiene a las funciones constantes. Por otra parte si $\alpha, \beta \in K$ con

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n),$$

existe k tal que $\alpha_k \neq \beta_k$. Eligiendo $p(x_1, \dots, x_n) = x_k$, obtenemos $p(\alpha) \neq p(\beta)$, i.e. $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ es familia uniformemente densa en $C(K)$.

3) El subespacio vectorial $\mathcal{F}$ generado por $\{e^{nx} : n \in \mathbb{Z}\}$ está formado por las funciones de la forma

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda_1 e^{n_1 x} + \lambda_2 e^{n_2 x} + \cdots + \lambda_m e^{n_m x} \quad (\lambda_i \in \mathbb{R}, n_i \in \mathbb{Z}).$$

$\mathcal{F} \subset C[0, 1]$ pues las funciones de $\mathcal{F}$ son continuas. Es fácil demostrar que forman un álgebra. Contiene a las funciones constantes pues $f(x) = C = Ce^{0x} \in \mathcal{F}$. Por último, si $\alpha, \beta \in [0, 1]$ con $\alpha \neq \beta$ entonces, $f(x) = e^x = 1e^{1x} \in \mathcal{F}$ y $f(\alpha) = e^\alpha \neq e^\beta = f(\beta)$. Concluimos que $\mathcal{F}$ es uniformemente densa en $C([0, 1])$.

4) (i) $\text{Lip } [a, b]$ es subespacio vectorial de $C[a, b]$. En efecto, sabemos que toda función lipschitziana es uniformemente continua y por tanto continua, luego $\text{Lip } [a, b] \subset C[a, b]$. La función nula es claramente lipschitziana. Además, para todo $x, y \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} f, g \in \text{Lip } [a, b] &\Rightarrow \begin{cases} \exists k_1 > 0 : |f(x) - f(y)| \leq k_1 |x - y| \\ \exists k_2 > 0 : |g(x) - g(y)| \leq k_2 |x - y| \end{cases} \\ &\Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(y)| = |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| = (k_1 + k_2) |x - y| \Rightarrow f + g \in \text{Lip } [a, b]. \\ \lambda \in \mathbb{R}, f \in \text{Lip } [a, b] &\Rightarrow \exists k > 0 : |f(x) - f(y)| \leq k |x - y| \\ &\Rightarrow |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)| = |\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| |f(x) - f(y)| \\ &\leq k |\lambda| |x - y| \Rightarrow \lambda f \in \text{Lip } [a, b]. \end{aligned}$$

(ii) $\text{Lip } [a, b]$ es subanillo de $C[a, b]$. En efecto, $\emptyset \neq \text{Lip } [a, b] \subset C[a, b]$. Además, para todo $x, y \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} f, g \in \text{Lip } [a, b] &\Rightarrow \begin{cases} \exists k_1 > 0 : |f(x) - f(y)| \leq k_1 |x - y| \\ \exists k_2 > 0 : |g(x) - g(y)| \leq k_2 |x - y| \end{cases} \\ &\Rightarrow |(f-g)(x) - (f-g)(y)| = |f(x) - g(x) - f(y) + g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| = (k_1 + k_2) |x - y| \Rightarrow f - g \in \text{Lip } [a, b]. \end{aligned}$$

Si f, g son lipschitzianas en $[a, b]$, son continuas en $[a, b]$ y por tanto están acotadas, es decir existe $M > 0$ tal que $|f| \leq M$ y $|g| \leq M$. Entonces,

$$\begin{aligned} f, g \in \text{Lip } [a, b] &\Rightarrow |(fg)(x) - (fg)(y)| = |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq M (|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|) \leq M(k_1 + k_2) |x - y| \Rightarrow fg \in \text{Lip } [a, b]. \end{aligned}$$

$\text{Lip } [a, b]$ es por tanto subanillo de $C[a, b]$ (además, conmutativo y unitario).

Ahora, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo par de funciones $f, g \in \text{Lip } [a, b]$ se verifica $\lambda(fg) = (\lambda f)g = f(\lambda g)$ con lo cual podemos concluir que $\text{Lip } [a, b]$ es un álgebra. Claramente contiene a las funciones constantes y separa puntos pues $id \in \text{Lip } [a, b]$ e $id(\alpha) \neq id(\beta)$ si $\alpha \neq \beta$. Esto completa la demostración de que se verifican las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass y en consecuencia $\text{Lip } [a, b]$ es álgebra uniformemente densa en $C[a, b]$.

153. Teorema de Wedderburn

A lo largo de éste problema la letra K designará un cuerpo finito y no necesariamente conmutativo. Si A es un conjunto, denotamos por $|A|$ al cardinal de A . Se trata de demostrar el teorema de Wedderburn i.e. que todo cuerpo finito es conmutativo.

- 1) Sea $k \subset K$ un subcuerpo propio y conmutativo de K .
 - (i) Demostrar que la dimensión de K como k -espacio vectorial es finita y mayor o igual que 2
 - (ii) Demostrar existe un entero $n \geq 2$ tal que $|K| = |k|^n$.
- 2) Sea $s \in K$. Definimos el *centralizador* de s como

$$C_s = \{x \in K : xs = sx\}$$

es decir, como el conjunto de los elementos de K que conmutan con s . Demostrar que C_s es subcuerpo de K .

- 3) El *centro* de K se define como

$$Z = \{a \in K : ax = xa \ \forall x \in K\}$$

es decir, es el conjunto de los elementos de K que conmutan con todos los de K . Demostrar que Z es subcuerpo conmutativo de K .

Nota. Obsérvese que el teorema de Wedderburn quedaría demostrado si demostramos que $Z = K$.

- 4) Sea $|Z| = q$. Demostrar que $|K| = q^n$ y que $|C_s| = q^{n_s}$ para ciertos enteros positivos n, n_s . Demostrar que si además K no es conmutativo, existe $s \in K$ tal que $n_s < n$.

- 5) Definimos en $K^* = K \setminus \{0\}$ la relación

$$u \sim v \Leftrightarrow u = x^{-1}vx \text{ para algún } x \in K^*.$$

Demostrar que $\sim$ es relación de equivalencia en K^* y determinar sus clases de equivalencia.

- 6) Demostrar que $||[s]|| = 1 \Leftrightarrow s \in Z$, y que si K no es conmutativo existe al menos una clase tal que $||[s]|| \geq 2$.

7) Para $s \in K^*$ denotamos $C_s^* = C_s \setminus \{0\}$ y $C_s^*x = \{zx : z \in C_s^*\}$. Se considera la aplicación

$$f_s : K^* \rightarrow [s], \quad f_s(x) = x^{-1}sx.$$

Demostrar que $f_s(x) = f_s(y)$ si y sólo si, $y \in C_s^*x$. Aplicar éste resultado para demostrar que

$$\frac{|K^*|}{|C_s^*|} = \frac{q^n - 1}{q^{n_s} - 1} = |[s]|$$

en donde q , n y n_s tienen los mismos significados que en el apartado 4.

8) Sea K no conmutativo y llamemos $Z^* = Z \setminus \{0\}$. Sean $[s_1], \dots, [s_m]$ las clases que tienen más de un elemento (vimos que existen si K no conmutativo). Demostrar la fórmula

$$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{k=1}^m \frac{q^n - 1}{q^{n_k} - 1} \quad \text{con} \quad 1 < \frac{q^n - 1}{q^{n_k} - 1} \in \mathbb{N} \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

9) Sea K no conmutativo. Demostrar que $n_k \mid n$ para todo $k = 1, \dots, m$.

10) Sea $\xi = e^{2\pi i/n}$ y $U_n = \{1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}\}$ el grupo cíclico multiplicativo de las raíces enésimas de la unidad. Si $\lambda \in U_n$ definimos $\text{ord } \lambda$ (orden de λ) como el menor entero positivo d tal que $\lambda^d = 1$. Por el teorema de Lagrange, necesariamente $d \mid n$. Para todos los divisores positivos d de n definimos los polinomios:

$$\phi_d(x) := \prod_{\text{ord } \lambda = d} (x - \lambda) \quad \text{con lo cual,} \quad x^n - 1 = \prod_{d \mid n} \phi_d(x).$$

- (i) Descomponer $x^6 - 1$ como producto de los polinomios $\phi_d(x)$ con $d \mid 6$.
- (ii) Demostrar que para todo n el polinomio $\phi_n(x)$ tiene coeficientes enteros (i.e. $\phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$) y que su término constante es 1 o -1.
- 11) Demostrar que si K no es conmutativo, entonces $\phi_n(q) \mid q - 1$.
- 12) Demostrar el teorema de Wedderburn: todo cuerpo finito es conmutativo.

Solución. 1) (i) Al ser k conmutativo, claramente K es espacio vectorial sobre el cuerpo k , y por ser K finito la dimensión de K es finita. Si $a \in K$ y $a \notin k$ el sistema $S = \{1, a\}$ es libre. En efecto, si $\lambda_1 1 + \lambda_2 a = 0$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in k$ han de ser nulos los escalares λ_1 y λ_2 . Si fuera $\lambda_2 \neq 0$, entonces

$$\lambda_1 1 + \lambda_2 a = 0 \Rightarrow \lambda_2 a = -\lambda_1 \Rightarrow a = \lambda_2^{-1}(-\lambda_1).$$

Entonces, $a = \lambda_2^{-1}(-\lambda_1)$ pertenecería a k en contradicción con la hipótesis. Necesariamente $\lambda_2 = 0$ y por ende, $\lambda_1 = -0a = 0$. Concluimos pues que $\dim K \geq 2$ y finita.

(ii) Sea $\dim K = n$, que según el apartado anterior es ≥ 2 y finita. Al ser K

isomorfo a k^n , se verifica $|K| = |k^n| = |k|^n$.

2) Claramente 0 y 1 pertenecen a C_s . Por otra parte,

$$x, y \in C_s \Rightarrow (x - y)s = xs - ys = sx - sy = s(x - y) \Rightarrow x - y \in C_s,$$

$$x, y \in C_s \Rightarrow (xy)s = x(ys) = x(sy) = (xs)y = (sx)y = s(xy) \Rightarrow xy \in C_s,$$

$$0 \neq x \in C_s \Rightarrow xs = sx \Rightarrow s = x^{-1}sx \Rightarrow sx^{-1} = x^{-1}s \Rightarrow x^{-1} \in C_s$$

es decir, C_s es subcuerpo de K .

3) Tenemos que $Z = \bigcap_{s \in K} C_s$ y la intersección de subcuerpos es subcuerpo. Además, Z es conmutativo por su propia definición.

4) Dado que Z es subcuerpo conmutativo tanto de C_s como de K , podemos considerar a C_s y a K como espacios vectoriales sobre Z . Si $\dim C_s = n_s$ entonces, $n_s \geq 1$ por ser $\{1\}$ sistema libre y $C_s \cong Z^{n_s}$ es decir $|C_s| = q^{n_s}$. De manera análoga, si $\dim K = n$ entonces $|K| = q^n$ con $n \geq 1$. Nótese que según el apartado primero, sería $n \geq 2$ si $Z \subsetneq K$.

5) Para todo $u \in K^*$ se verifica $u = 1^{-1}u1$ es decir, $u \sim u$. Si $u \sim v$ entonces $u = x^{-1}vx$ lo cual implica $v = xux^{-1} = (x^{-1})^{-1}ux^{-1}$, luego $v \sim u$. Sean ahora $u, v, w \in K^*$. Entonces

$$\begin{cases} u \sim v \\ v \sim w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x^{-1}vx \\ v = y^{-1}wy \end{cases} \Rightarrow u = x^{-1}y^{-1}wyx = (yx)^{-1}w(yx) \Rightarrow u \sim w.$$

Concluimos que $\sim$ es relación de equivalencia en K^* . Si $s \in K^*$, la clase de equivalencia a la que pertenece s es

$$\begin{aligned} [s] &= \{u \in K^* : u \sim s\} = \{u \in K^* : u = x^{-1}sx \text{ con } x \in K^*\} \\ &= \{x^{-1}sx : x \in K^*\}. \end{aligned}$$

6) $\Rightarrow$) Si el cardinal de $[s]$ es 1, entonces $[s] = \{s\}$ y por tanto $s = x^{-1}sx$ para todo $x \in K^*$, luego $xs = sx$ para todo $x \in K^*$ y por supuesto para todo $x \in K$ con lo cual $s \in Z$.

$\Leftarrow$) Si $s \in Z$ entonces $sx = xs$ para todo $x \in K$, por tanto

$$[s] = \{x^{-1}sx : x \in K^*\} = \{x^{-1}xs : x \in K^*\} = \{s\} \Rightarrow |[s]| = 1.$$

Si K no es conmutativo existe $s \in K$ tal que $s \notin Z$ por tanto $\emptyset \neq [s]$ no tiene cardinal 1, es decir $|[s]| \geq 2$.

7) Para todo $x, y \in K^*$ se verifica

$$\begin{aligned} f_s(x) = f_s(y) &\Leftrightarrow x^{-1}sx = y^{-1}sy \Leftrightarrow (yx^{-1})s = s(yx^{-1}) \\ &\Leftrightarrow yx^{-1} \in C_s^* \Leftrightarrow y \in C_s^*x. \end{aligned}$$

Claramente $|C_s^*x| = |C_s^*|$ pues x es invertible. Cada elemento $f_s(x) = x^{-1}sx$ de $[s]$ es la imagen de los $y \in K^*$ tales que $y \in C_s^*$ es decir es la imagen de $|C_s^*x| = |C_s^*|$ elementos de K^* , luego $|K^*| = |[s]| |C_s^*|$. Es decir

$$\frac{|K^*|}{|C_s^*|} = \frac{q^n - 1}{q^{n_s} - 1} = |[s]| \quad \forall s \in K^*.$$

8) Tenemos $|K^*| = q^n - 1$, $|Z^*| = q - 1$ y $|C_s^*| = q^{n_s} - 1$. Las clases de equivalencia de $\sim$ en K^* forman una partición de K^* y tenemos $|K^*|$ clases de equivalencia con un elemento y m clases $[s_1], \dots, [s_m]$ con $q^{n_1}, \dots, q^{n_m}$ elementos respectivamente, con lo cual $|K^*| = |Z^*| + \sum_{k=1}^m |C_{s_k}^*|$ y usando el apartado anterior queda

$$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{k=1}^m \frac{q^n - 1}{q^{n_k} - 1}.$$

Por otra parte, para toda clase $[s_k]$ con $k = 1, \dots, m$ se verifica $1 < |[s_k]| \in \mathbb{N}$ con lo cual,

$$1 < |[s_k]| = \frac{q^n - 1}{q^{n_k} - 1} \in \mathbb{N}.$$

9) Podemos escribir $n = an_k + r$ con $0 \leq r < n_k$ y para todo k se verifica $q^{n_k} - 1 \mid q^n - 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} q^{n_k} - 1 \mid q^n - 1 &\Rightarrow q^{n_k} - 1 \mid q^{an_k+r} - 1 \Rightarrow \\ q^{n_k} - 1 &\mid (q^{an_k+r} - 1) - (q^{n_k} - 1) = q^{n_k} (q^{(a-1)n_k+r} - 1). \end{aligned}$$

Dado que q^{n_k} y $q^{n_k} - 1$ son relativamente primos, se verifica $q^{n_k} - 1 \mid q^{(a-1)n_k+r} - 1$, y continuando de esta manera llegaríamos a que $q^{n_k} - 1 \mid q^r - 1$ con $0 \leq r < n_k$ que sólo puede ocurrir si $r = 0$, luego $n = an_k$. Es decir, $n_k \mid n$.

10) (i) Tenemos $U_6 = \{1, \xi, \xi^2, \xi^3, \xi^4, \xi^5\}$. Los mínimos exponentes positivos d que corresponden a cada raíz son

$$1^1 = 1, \quad \xi^6 = 1, \quad (\xi^2)^3 = 1, \quad (\xi^3)^2 = 1, \quad (\xi^4)^3 = 1, \quad (\xi^5)^6 = 1,$$

luego los polinomios $\phi_d(x)$ son

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= x - 1, & \phi_2(x) &= (x - \xi^3), \\ \phi_3(x) &= (x - \xi^2)(x - \xi^4), & \phi_6(x) &= (x - \xi)(x - \xi^5), \end{aligned}$$

y queda $x^6 - 1 = \phi_1(x)\phi_2(x)\phi_3(x)\phi_6(x)$.

(ii) Se verifica $\phi_1(x) = x - 1$ y procedamos por inducción. Supongamos que $\phi_d(x) \in \mathbb{Z}[x]$ para todo $d < n$ y que sus coeficientes constantes son 1 o -1 . Por la descomposición $x^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(x)$:

$$x^n - 1 = p(x)\phi_n(x) \quad \text{con} \quad p(x) = \sum_{i=0}^l a_i x^i, \quad \phi_n(x) = \sum_{j=0}^{n-l} b_j x^j$$

con los a_i enteros y $a_0 = 1$ o $a_0 = -1$. Dado que $-1 = a_0 b_0$, se verifica $b_0 = 1$ o $b_0 = -1$. Supongamos ahora que $b_0, b_1, \dots, b_{k-1} \in \mathbb{Z}$. Igualando coeficientes de x^k en ambos miembros de $x^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(x)$:

$$\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=1}^k a_i b_{k-i} + a_0 b_k \in \mathbb{Z}.$$

Por hipótesis $b_0, b_1, \dots, b_{k-1}$ son enteros, y también lo son todos los a_i . Dado que a_0 es 1 o -1 , también es entero b_k .

11) Si $n_k \mid n$ es uno de los números que aparecen en el apartado 4, se verifica:

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d(x) = (x^{n_k} - 1) \phi_n(x) \prod_{d|n, d \nmid n_k, d \neq n} \phi_d(x).$$

En consecuencia y para $q = |K|$ se verifican las relaciones de divisibilidad en $\mathbb{Z}$:

$$\phi_n(q) \mid q^n - 1 \quad \text{y} \quad \phi_n(q) \mid \frac{q^n - 1}{q^{n_k} - 1}.$$

Por la fórmula demostrada en el apartado 8 para todo n_k :

$$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{k=1}^m \frac{q^n - 1}{q^{n_k} - 1},$$

deducimos que $\phi_n(q) \mid q - 1$.

12) Supongamos que K no es conmutativo. Entonces $Z \subsetneq K$ y por el apartado 1, $n > 1$. Sabemos que $\phi_n(x) = \prod (x - \lambda)$ en donde λ recorre todas las raíces de orden n . Al ser $n > 1$, $\lambda = a + bi \neq 1$ y la parte real a de λ claramente satisface $a < 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} |q - \lambda|^2 &= |q - a - bi|^2 = (q - a)^2 + b^2 = q^2 - 2aq + a^2 + b^2 \\ &= q^2 - 2aq + 1 \underbrace{>}_{a < 1} q^2 - 2q + 1 = (q - 1)^2. \end{aligned}$$

Es decir, se verifica $|q - \lambda| > q - 1$ para toda λ de orden n . Esto implica

$$|\phi_n(q)| > \prod_{\text{ord } \lambda = n} |q - \lambda| > q - 1.$$

Pero esto contradice la relación $\phi_n(q) \mid q - 1$ demostrada en el apartado anterior. Concluimos que K ha de ser necesariamente conmutativo y queda demostrado el teorema de Wedderburn.

154. Un espacio vectorial no usual

Sea el conjunto $H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$.

1) Demostrar que $(H, \oplus)$ es grupo abeliano, estando $\oplus$ definida mediante

$$(x, y) \oplus (z, w) = (x + z - 2, yw).$$

2) Demostrar que la operación

$$\mathbb{R} \times H \rightarrow H, \quad \lambda \otimes (x, y) = (\lambda x - 2\lambda + 2, y^\lambda)$$

dota al grupo abeliano H del apartado anterior, de estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Solución. 1) *Interna.* Dado que para todo $(x, y), (z, w) \in H$, se verifica $x, z \in \mathbb{R}$, también $x + z - 2 \in \mathbb{R}$. Al ser $y, w \in \mathbb{R}_{>0}$ también $yw \in \mathbb{R}_{>0}$ y por tanto, $(x, y) \oplus (z, w) \in H$.

Asociativa. Para todo $(x, y), (z, w), (u, v) \in H$ tenemos

$$(x, y) \oplus [(z, w) \oplus (u, v)] = (x, y) \oplus (z + u - 2, vw) = (x + z + u - 4, yvw),$$

$$[(x, y) \oplus (z, w)] \oplus (u, v) = (x + z - 2, yw) \oplus (u, v) = (x + z + u - 4, yvw).$$

Se verifica la igualdad.

Elemento neutro. El par (a, b) es elemento neutro en H si y sólo si para todo $(x, y) \in H$ se verifica

$$(x, y) \oplus (a, b) = (a, b) \oplus (x, y) = (x, y)$$

o equivalentemente $(x + a - 2, yb) = (a + x - 2, by) = (x, y)$. Es claro que $(a, b) = (2, 1) \in H$ y satisface la relación anterior para todo $(x, y) \in H$. Es por tanto el elemento neutro de H .

Elemento simétrico. El elemento $(x', y') \in H$ es simétrico de $(x, y) \in H$ si y sólo si se verifica

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x', y') \oplus (x, y) = (2, 1)$$

o equivalentemente $(x + x' - 2, yy') = (x' + x - 2, y'y) = (2, 1)$. Es claro que $(x', y') = (4 - x, 1/y)$ es elemento de H y satisface la relación anterior.

Conmutativa. Para todo $(x, y), (z, w) \in H$ tenemos

$$(x, y) \oplus (z, w) = (x + z - 2, yw) = (z + x - 2, wy) = (z, w) \oplus (x, y).$$

Concluimos pues que $(H, \oplus)$ es grupo abeliano.

2) Para todo $\lambda, x \in \mathbb{R}$ se verifica $\lambda x - 2\lambda + 2 \in \mathbb{R}$ y para todo $y \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $y^\lambda > 0$. Es decir, $\lambda \otimes (x, y) \in H$ está bien definida. Veamos ahora que se cumplen los cuatro axiomas de ley externa para espacios vectoriales.

(i) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $(x, y), (z, w) \in H$ tenemos

$$\lambda \otimes [(x, y) \oplus (z, w)] = \lambda \otimes (x + z - 2, yw) = (\lambda x + \lambda z - 2\lambda - 2\lambda + 2, (yw)^\lambda).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} [\lambda \otimes (x, y)] \oplus [\lambda \otimes (z, w)] &= (\lambda x - 2\lambda + 2, y^\lambda) \oplus (\lambda z - 2\lambda + 2, w^\lambda) \\ &= (\lambda x - 2\lambda + 2 + \lambda z - 2\lambda + 2 - 2, y^\lambda w^\lambda) = (\lambda x + \lambda z - 4\lambda + 2, (yw)^\lambda). \end{aligned}$$

Se verifica la igualdad.

(ii) Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $(x, y) \in H$ tenemos

$$(\lambda + \mu) \otimes (x, y) = ((\lambda + \mu)x - 2(\lambda + \mu) + 2, y^{\lambda+\mu}).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} [\lambda \otimes (x, y)] \oplus [\mu \otimes (x, y)] &= (\lambda x - 2\lambda + 2, y^\lambda) \oplus (\mu x - 2\mu + 2, y^\mu) \\ &= (\lambda x - 2\lambda + 2 + \mu x - 2\mu + 2 - 2, y^\lambda y^\mu). \end{aligned}$$

Se verifica la igualdad.

(iii) Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $(x, y) \in H$ tenemos

$$\lambda \otimes [\mu \otimes (x, y)] = \lambda \otimes (\mu x - 2\mu + 2, y^\mu) = (\lambda(\mu x - 2\mu + 2) - 2\lambda + 2, (y^\mu)^\lambda).$$

Por otra parte,

$$(\lambda\mu) \otimes (x, y) = ((\lambda\mu)x - 2(\lambda\mu) + 2, y^{\lambda\mu}).$$

Se verifica la igualdad.

(iv) Para todo $(x, y) \in H$ se verifica

$$1 \otimes (x, y) = (1x - 2 \cdot 1 + 2, y^1) = (x, y).$$

Concluimos que H es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ con las operaciones dadas.

155. Espacio vectorial de las matrices circulantes

Sea $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por $T(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_{n-1}, x_0, \dots, x_{n-2})$. Se llama matriz *circulante* de orden n determinada por $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ y la representamos por $\text{circ}\{x\}$, a la matriz cuyos filas en el orden natural son $v, T(v), \dots, T^{n-1}(x)$, es decir

$$\text{circ}\{x\} = \begin{bmatrix} x \\ T(x) \\ \vdots \\ T^{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

- 1) Escribir de forma explícita una matriz circulante genérica.
- 2) Sea $\text{Circ}(n) = \{\text{circ}\{x\} : x \in \mathbb{C}^n\}$ el conjunto de todas las matrices circulantes de orden n . Demostrar que es subespacio vectorial de $\mathbb{C}^{n \times n}$.
- 3) Demostrar que la aplicación $\Phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \text{Circ}(n)$ dada por $\Phi(x) = \text{circ}\{x\}$ es isomorfismo de espacios vectoriales.
- 4) Hallar la dimensión y una base de $\text{Circ}(n)$. Escribir explícitamente esta base para $n = 3$.

Solución. 1) Una matriz circulante genérica es

$$\text{circ}\{x\} = \begin{bmatrix} x \\ T(x) \\ \vdots \\ T^{n-2}(x) \\ T^{n-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & \dots & x_{n-3} & x_{n-2} \\ \vdots & & & \vdots & \\ x_2 & x_3 & \dots & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

- 2) Se verifica $0 = \text{circ}\{0\} \in \text{Circ}(n)$. Por otra parte y para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y para todo par de matrices $\text{circ}\{x\}, \text{circ}\{y\}$ de $\text{Circ}(n)$:

$$\text{circ}\{x\} + \text{circ}\{y\} = \text{circ}\{x + y\} \in \text{Circ}(n), \quad \lambda \text{circ}\{x\} = \text{circ}\{\lambda x\} \in \text{Circ}(n),$$

por tanto $\text{Circ}(n)$ es subespacio de $\mathbb{C}^{n \times n}$.

- 3) Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$ se verifica

$$\begin{aligned} \Phi(x + y) &= \text{circ}\{x + y\} = \text{circ}\{x\} + \text{circ}\{y\} = \Phi(x) + \Phi(y), \\ \Phi(\lambda x) &= \text{circ}\{\lambda x\} = \lambda \text{circ}\{x\} = \lambda \Phi(x). \end{aligned}$$

Por tanto, Φ es lineal. Es inyectiva pues

$$\ker \Phi = \{x \in \mathbb{C}^n : \Phi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{C}^n : \text{circ}\{x\} = 0\} = \{0\}.$$

Por otra parte, Φ es sobreyectiva por su propia construcción. Concluimos que Φ es isomorfismo.

4) Al ser Φ isomorfismo, $\dim \text{Circ}(n) = \dim \mathbb{C}^n = n$ y como los isomorfismos transforman bases en bases, si $B_c = \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$ una base de $\text{Circ}(n)$ es $B_{\text{Circ}(n)} = \{\Phi(e_0), \Phi(e_1), \dots, \Phi(e_{n-1})\}$. Para $n = 3$, los vectores de una base de $\text{Circ}(3)$ son

$$\Phi(e_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

156. Probabilidad de la unión de n sucesos

Sea (E, Ω, p) un espacio de probabilidad. Se trata de demostrar la fórmula:

$$p(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n p(A_i) - \sum_{i,j=1, i < j}^n p(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k=1, i < j < k}^n p(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n+1} p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n),$$

para $A_1, \dots, A_n \in \Omega$. Se pide:

- 1) Demostrar la fórmula para $n = 2$.
- 2) Demostrar la fórmula para $n = 3$.
- 3) Usando el método de inducción, demostrar que la fórmula es válida para todo $n \geq 2$.

Solución. 1) Tenemos

$$A_1 = A_1 \cap E = A_1 \cap (A_2 \cup A_2^c) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c),$$

$$A_2 = A_2 \cap E = A_2 \cap (A_1 \cup A_1^c) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_1^c).$$

Además, A_1 está expresado como unión de los sucesos incompatibles $A_1 \cap A_2$ y $A_1 \cap A_2^c$ y por tanto,

$$p(A_1) = p(A_1 \cap A_2) + p(A_1 \cap A_2^c). \quad [1]$$

De la misma manera,

$$p(A_2) = p(A_1 \cap A_2) + p(A_2 \cap A_1^c). \quad [2]$$

Por otra parte,

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_2 \cap A_1^c)$$

está expresado como unión de tres sucesos incompatibles y por tanto,

$$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1 \cap A_2) + p(A_1 \cap A_2^c) + p(A_2 \cap A_1^c). \quad [3]$$

Sumando miembro a miembro [1] y [2] y pasando un $p(A_1 \cap A_2)$ al primer miembro

$$p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2) = p(A_1 \cap A_2) + p(A_1 \cap A_2^c) + p(A_2 \cap A_1^c),$$

y usando la igualdad [3] queda

$$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2) = \sum_{i=1}^2 p(A_i) + (-1)^{2+1} p(A_1 \cap A_2).$$

2) Usando la fórmula deducida en el apartado anterior,

$$\begin{aligned} p(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= p[A_1 \cup (A_2 \cup A_3)] = \\ &= p(A_1) + p(A_2 \cup A_3) - p[A_1 \cap (A_2 \cup A_3)] \\ &= p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) - p(A_2 \cap A_3) - p[(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)] \\ &= p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) - p(A_2 \cap A_3) \\ &\quad - [p(A_1 \cap A_2) + p(A_1 \cap A_3) - p((A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3))] \\ &= p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) - p(A_2 \cap A_3) \\ &\quad - p(A_1 \cap A_2) - p(A_1 \cap A_3) + p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \sum_{i=1}^3 p(A_i) - \sum_{i,j=1, i < j}^3 p(A_i \cap A_j) + (-1)^{3+1} p(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

3) Sea la fórmula cierta para $n \geq 3$ y veamos que es cierta para $n+1$:

$$\begin{aligned} p(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= p[(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}] \\ &= p(A_1 \cup \dots \cup A_n) + p(A_{n+1}) - p[(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}] \\ &= p(A_1 \cup \dots \cup A_n) + p(A_{n+1}) - p[(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})] \\ &= \sum_{i=1}^n p(A_i) - \sum_{i,j=1, i < j}^n p(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k=1, i < j < k}^n p(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &\quad + \dots + (-1)^n p(A_1 \cap \dots \cap A_n) + p(A_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n p(A_i \cap A_{n+1}) + \sum_{i,j=1, i < j}^n p(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i,j,k=1, i < j < k}^n p(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}) \\
& + \dots - (-1)^{n+1} p(A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}).
\end{aligned}$$

Agrupando las probabilidades de las intersecciones de un conjunto, de dos, etc. obtenemos

$$\begin{aligned}
p(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} p(A_i) - \sum_{i,j=1, i < j}^{n+1} p(A_i \cap A_j) \\
&+ \sum_{i,j,k=1, i < j < k}^{n+1} p(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{(n+1)+1} p(A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}),
\end{aligned}$$

y la fórmula es cierta para $n + 1$.

157. Cardinal de la unión de n conjuntos

Dado un conjunto A denotamos por $|A|$ a su cardinal. Sean los n conjuntos finitos $A_1, \dots, A_n$ que podemos suponer contenidos en un conjunto universal U finito. Se trata de demostrar la fórmula

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i,j=1, i < j}^n |A_i \cap A_j| + \\
&\sum_{i,j,k=1, i < j < k}^n |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.
\end{aligned}$$

Se pide:

- 1) Demostrar la fórmula para $n = 2$.
- 2) Demostrar la fórmula para $n = 3$.
- 3) Usando el método de inducción, demostrar que la fórmula es válida para todo $n \geq 2$.

Solución. 1) Sabemos que si $B_1, \dots, B_m$ son m conjuntos finitos y disjuntos dos a dos se verifica

$$|B_1 \cup \dots \cup B_m| = |B_1| + \dots + |B_m|. \quad [1]$$

Tenemos

$$A_1 = A_1 \cap U = A_1 \cap (A_2 \cup A_2^c) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c),$$

$$A_2 = A_2 \cap U = A_2 \cap (A_1 \cup A_1^c) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_1^c).$$

Además, A_1 está expresado como unión de los conjuntos disjuntos $A_1 \cap A_2$ y $A_1 \cap A_2^c$ y por [1],

$$|A_1| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2^c|. \quad [2]$$

De la misma manera,

$$|A_2| = |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_1^c|. \quad [3]$$

Por otra parte,

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_2 \cap A_1^c)$$

está expresado como unión de tres conjuntos disjuntos dos a dos, y por [1],

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2^c| + |A_2 \cap A_1^c|. \quad [4]$$

Sumando miembro a miembro [2] y [3] y pasando un $|A_1 \cap A_2|$ al primer miembro

$$|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2^c| + |A_2 \cap A_1^c|,$$

y usando la igualdad [4] queda

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = \sum_{i=1}^2 |A_i| + (-1)^{2+1} |A_1 \cap A_2|.$$

2) Usando la fórmula deducida en el apartado anterior,

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| = \\ &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)|) \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= \sum_{i=1}^3 |A_i| - \sum_{i,j=1, i < j}^3 |A_i \cap A_j| + (-1)^{3+1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

3) Sea la fórmula cierta para $n \geq 3$ y veamos que es cierta para $n+1$:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}|$$

$$\begin{aligned}
&= |A_1 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \\
&= |A_1 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\
&= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i,j=1, i < j}^n |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k=1, i < j < k}^n |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&\quad + \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n| + |A_{n+1}| \\
&\quad - \sum_{i=1}^n |A_i \cap A_{n+1}| + \sum_{i,j=1, i < j}^n |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| \\
&\quad - \sum_{i,j,k=1, i < j < k}^n |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| \\
&\quad + \dots - (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}|.
\end{aligned}$$

Agrupando los cardinales de las intersecciones de un conjunto, de dos, etc. obtenemos

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| &= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{i,j=1, i < j}^{n+1} |A_i \cap A_j| \\
&+ \sum_{i,j,k=1, i < j < k}^{n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{(n+1)+1} p |A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}|,
\end{aligned}$$

y la fórmula es cierta para $n+1$.

158. Valores propios y determinante de una matriz circulante

Recordamos que una matriz circulante es una matriz de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

es decir una matriz cuadrada compleja cuyas componentes de la primera fila son números complejos cualesquiera y cada una de las sucesivas filas se obtiene de la anterior sustituyendo la última componente por la primera y

trasladando las restantes. El objetivo de este problema es hallar los valores propios, vectores propios y el determinante de cualquier matriz circulante.

- 1) Demostrar que $v = [1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}]^T$ con ω cualquier raíz enésima de la unidad, es vector propio de A . Determinar su valor propio asociado.
- 2) Demostrar que A tiene n vectores propios linealmente independientes.
- 3) Calcular $\det A$.
- 4) Para una matriz genérica circulante de orden 2, hallar sus valores propios, vectores propios y determinante sin usar los apartados anteriores. Verificar los resultados.

Solución. 1) Hallemos el vector Av , es decir

$$Av = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Llamemos λ a la primera componente del vector Av . Entonces,

$$\lambda = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \dots + a_{n-2}\omega^{n-2} + a_{n-1}\omega^{n-1}.$$

La segunda componente del vector Av es

$$\begin{aligned} & a_{n-1} + a_0\omega + \dots + a_{n-3}\omega^{n-2} + a_{n-2}\omega^{n-1} \\ &= \omega (a_{n-1}\omega^{n-1} + a_0 + \dots + a_{n-3}\omega^{n-3} + a_{n-2}\omega^{n-2}) \\ &= \omega (a_0 + \dots + a_{n-3}\omega^{n-3} + a_{n-2}\omega^{n-2} + a_{n-1}\omega^{n-1}) = \lambda\omega. \end{aligned}$$

La i -ésima componente es

$$\begin{aligned} & a_{n-i+1} + a_{n-i+2}\omega + \dots + a_{n-i}\omega^{n-1} \\ &= \omega^{i-1} (a_{n-i+1}\omega^{n-i+1} + a_{n-i+2}\omega^{n-i+2} + \dots + a_{n-i}\omega^{n-i}) = \lambda\omega^{i-1}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$Av = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda\omega \\ \lambda\omega^2 \\ \vdots \\ \lambda\omega^{n-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{bmatrix} = \lambda v.$$

Concluimos que $v = [1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}]^T \neq 0$ es vector propio asociado al valor propio $\lambda = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \dots + a_{n-2}\omega^{n-2} + a_{n-1}\omega^{n-1}$, y esto para todo ω raíz n -ésima de la unidad.

2) El razonamiento del apartado anterior es válido para toda raíz n -ésima de la unidad. Si $\zeta = e^{2\pi i/n}$ entonces, las n raíces n -ésimas de la unidad son $\omega = \zeta^k$ con $k = 0, 1, \dots, n-1$. Esto significa que para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$ el vector

$$v_k = [1, \zeta^k, \zeta^{2k}, \dots, \zeta^{k(n-1)}]^T$$

es vector propio de A asociado al valor propio

$$\lambda_k = a_0 + a_1\zeta^k + a_2\zeta^{2k} + \dots + a_{n-2}\zeta^{k(n-2)} + a_{n-1}\zeta^{k(n-1)}.$$

Para demostrar que los vectores v_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) son linealmente independientes formamos la matriz:

$$P = [v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \dots & \zeta^{n-2} & \zeta^{n-1} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \dots & \zeta^{2(n-2)} & \zeta^{2(n-1)} \\ 1 & \zeta^3 & \zeta^6 & \dots & \zeta^{3(n-2)} & \zeta^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & \zeta^{n-1} & \zeta^{2(n-1)} & \dots & \zeta^{(n-1)(n-2)} & \zeta^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}.$$

La matriz P es una matriz de Vandermonde y su determinante es

$$\det P = \prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (\zeta^j - \zeta^i) \neq 0.$$

Es decir, $\text{rg}(P) = n$ lo cual implica que sus columnas son linealmente independientes. Nótese que hemos demostrado también que toda matriz circulante es diagonalizable.

3) El determinante de A es el producto de sus valores propios, en consecuencia

$$\det A = \prod_{k=0}^{n-1} (a_0 + a_1\zeta^k + a_2\zeta^{2k} + \dots + a_{n-1}\zeta^{k(n-1)}), \quad \zeta = e^{2\pi i/n}.$$

4) Hallemos los valores propios de una matriz circulante genérica A de orden dos:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad \chi(\lambda) = \lambda^2 - 2a_0\lambda + a_0^2 - a_1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2a_0 \pm \sqrt{4a_0^2 - 4a_0^2 + 4a_1^2}}{2} = a_0 \pm a_1.$$

Llamemos $\lambda_0 = a_0 + a_1$ y $\lambda_1 = a_0 - a_1$. Se verifica $\lambda_0 = \lambda_1$ si y sólo si $a_1 = 0$. Entonces para $a_1 \neq 0$ tenemos dos valores propios simples y los subespacios propios y una base de cada uno de ellos son:

$$V_{\lambda_0} : \begin{cases} -a_1x_1 + a_1x_2 = 0 \\ a_1x_1 - a_1x_2 = 0, \end{cases} \quad B_{V_{\lambda_0}} = \{v_0 = (1, 1)^T\}.$$

$$V_{\lambda_1} : \begin{cases} a_1x_1 + a_1x_2 = 0 \\ a_1x_1 + a_1x_2 = 0, \end{cases} \quad B_{V_{\lambda_1}} = \{v_1 = (1, -1)^T\}.$$

Para $a_1 = 0$ tenemos

$$Av_0 = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Av_1 = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y por tanto v_0 y v_1 son también vectores propios asociados al valor propio doble $\lambda_0 = \lambda_1 = a_0$. Verificamos todo esto con lo demostrado en los apartados anteriores. Sea $\zeta = -1$. Las raíces cuadradas de la unidad son $\zeta^0 = 1$ y $\zeta^1 = -1$. Los valores propios son:

$$\lambda_0 = a_0 + a_1 = a_0 + a_1\zeta^0, \quad \lambda_1 = a_0 - a_1 = a_0 + a_1\zeta^1,$$

y los respectivos vectores propios

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta^0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta^1 \end{bmatrix}.$$

Por último,

$$\begin{aligned} \det A &= a_0^2 - a_1^2 = (a_0 + a_1)(a_0 - a_1) = (a_0 + a_1\zeta^0)(a_0 + a_1\zeta^1) \\ &= \prod_{k=0}^{2-1} (a_0 + a_1\zeta^k), \quad \zeta = e^{2\pi i/2} = -1. \end{aligned}$$

159. Teorema de reordenación de Riemann

Por simplicidad, denotaremos $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1) Demostrar que si la serie real $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, entonces existen infinitos términos positivos e infinitos negativos.

2) Para todo n descomponemos $a_n = a_n^+ + a_n^-$ con $a_n^+ \geq 0$ y $a_n^- \leq 0$ de la siguiente manera:

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}, \quad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}.$$

Describir tal descomposición según los casos a_n positivo, negativo o nulo.

3) Demostrar que $\sum a_n^+ = +\infty$ y que $\sum a_n^- = -\infty$.

4) Dada una serie real condicionalmente convergente y dado cualquier número real x , demostrar que existe una reordenación de la serie cuya suma es x .

5) Dada una serie real condicionalmente convergente demostrar que existe una reordenación de la serie cuya suma es $+\infty$ y otra cuya suma es $-\infty$ (esto completará la demostración del teorema).

Solución. 1) Supongamos que existiera sólo un número finito de términos positivos y sea a_m el último de ellos. Entonces, al ser $\sum a_n$ convergente, lo sería $\sum_{n>m} a_n = -\sum_{n>m} |a_n|$ con lo cual lo sería $\sum_{n>m} |a_n|$ y por ende $\sum |a_n|$. Llegaríamos al absurdo de que $\sum a_n$ sería absolutamente convergente. Análogo razonamiento si existiera sólo un número finito de términos negativos.

2) De acuerdo con las definiciones de a_n^+ y a_n^- :

$$a_n = \begin{cases} a_n^+ + a_n^- = a_n + 0 & \text{si } a_n > 0 \\ a_n^+ + a_n^- = 0 + a_n & \text{si } a_n < 0 \\ a_n^+ + a_n^- = 0 + 0 & \text{si } a_n = 0. \end{cases}$$

3) Si ambas series fueran convergentes:

$$\begin{cases} \sum a_n^+ = S \in \mathbb{R} \\ \sum a_n^- = T \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum a_n^+ = S \\ \sum |a_n^-| = -T \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum |a_n| = \sum (a_n^+ + |a_n^-|) = \sum a_n^+ + \sum |a_n^-| = S - T \in \mathbb{R}$$

y la serie $\sum a_n$ sería absolutamente convergente (contradicción). Si una de las series $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ fuera convergente y otra divergente, la serie suma $\sum (a_n^+ + a_n^-)$ (que es la serie $\sum a_n$), sería divergente, en contradicción con la hipótesis de ser $\sum a_n$ condicionalmente convergente. Concluimos que necesariamente las series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ son ambas divergentes. Además, al ser $\sum a_n^+$ serie de términos positivos y $\sum a_n^-$ de negativos, ha de ser

$$\sum a_n^+ = +\infty, \quad \sum a_n^- = -\infty.$$

4) Podemos suponer sin pérdida de generalidad que todos los términos de la serie condicionalmente convergente $\sum a_n$ son no nulos. Sea p_n el n -ésimo término positivo de $\sum a_n$ y sea $-q_n$ su n -ésimo negativo. Según el apartado anterior, $\sum p_n = +\infty$ y $\sum -q_n = -\infty$. Elijamos términos positivos $p_1, \dots, p_{n_1}$ hasta el primer p_{n_1} que verifique

$$S_{n_1} = p_1 + \dots + p_{n_1} > x$$

con lo cual, $S_{n_1} - x < p_{n_1}$. Elijamos términos negativos $-q_1, \dots, -q_{n_2}$ hasta el primer $-q_{n_2}$ que verifique

$$S_{n_1+n_2} = p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{n_2} < x$$

con lo cual, $x - S_{n_1+n_2} < q_{n_2}$. Además, $S_{n_1} > S_{n_1+1} > \dots > S_{n_1+n_2}$, luego

$$x - S_n < q_{n_2} \quad \forall n = n_1, n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2.$$

Nótese que estamos reordenado la serie $\sum a_n$. De nuevo, elijamos los términos positivos $p_{n_1+1}, \dots, p_{n_3}$ hasta el primer p_{n_3} que verifique

$$S_{n_1+n_2+n_3} = p_1 + \dots + p_{n_1} - q_1 - \dots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \dots + p_{n_3} > x$$

con lo cual, $S_{n_1+n_2+n_3} - x < p_{n_3}$. Además, $S_{n_1+n_2} < S_{n_1+n_2+1} < \dots < S_{n_1+n_2+n_3}$, luego

$$S_n - x < p_{n_3} \quad \forall n = n_1 + n_2, n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3.$$

Procediendo de esta manera llegamos a una reordenación de la serie $\sum a_n$ de tal manera que sus sumas parciales satisfacen

$$S_{n_1} - x < p_{n_1}, \quad x - S_{n_1+n_2} < q_{n_2}, \quad S_{n_1+n_2+n_3} - x < p_{n_3}, \quad \dots$$

así como las sumas parciales intermedias S_n . Por la condición necesaria de la convergencia de $\sum a_n$ tenemos que $p_n \rightarrow 0$ y $q_n \rightarrow 0$, por tanto las sumas parciales de la serie reordenada tienen límite x .

5) De nuevo y sin pérdida de generalidad suponemos que todos los términos de la serie $\sum a_n$ son no nulos. Sea $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ la sucesión de índices tales que a_{p_i} es término positivo de la serie y $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ la de los que a_{n_i} es negativo. Cada número natural aparece pues una y sólo una vez en alguna de las sucesiones (p_i) o (n_i) . Recordemos que según se ha demostrado, $\sum_{i=1}^{\infty} a_{p_i} = +\infty$. Entonces, sea k_1 el menor número natural tal que

$$\sum_{i=1}^{k_1} a_{p_i} \geq |a_{n_1}| + 1,$$

k_2 el menor número natural tal que

$$\sum_{i=k_1+1}^{k_2} a_{p_i} \geq |a_{n_2}| + 1,$$

y así sucesivamente. Esto define la reordenación de la serie

$$a_{p_1} + a_{p_2} + \dots + a_{p_{k_1}} + a_{n_1} + a_{p_{k_1+1}} + a_{p_{k_1+2}} + a_{p_{k_2}} + a_{n_2} + \dots$$

Veamos que la serie reordenada de esta manera tiene suma $+\infty$. Efectivamente, por construcción, la suma de los $k_1 + 1$ primeros términos de la reordenación es ≥ 1 y ninguna suma parcial de entre esos términos es < 0 . De manera análoga, la suma de los siguientes $k_2 - k_1 + 1$ términos es ≥ 1 y ninguna suma parcial de entre esos términos es < 0 . Reiterando, concluimos que la suma de la reordenación es $+\infty$. La demostración de que existe una reordenación cuya suma es $-\infty$ es similar.

160. Derivada aritmética natural

La función *derivada aritmética* es una función $n' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida recursivamente por

- (1) $p' = 1$ para todo p primo
- (2) $(ab)' = a'b + ab'$ para todo $a, b \in \mathbb{N}$ (Regla de Leibniz).
- 1) Calcular $1'$, $0'$, $6'$ y $9''$.
- 2) Calcular las derivadas de los 11 primeros números naturales.
- 3) Demostrar que si existe la función derivada aritmética, es única.
- 4) Demostrar que la función derivada aritmética existe y es

$$n' = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \vee n = 1 \\ n \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{p_i} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

en donde $n = \prod_{i=1}^m p_i^{n_i} \geq 2$ es la factorización de n en producto de factores primos.

- 5) Usando el teorema anterior, hallar $120'$.

Solución. 1) Tenemos $1' = (1 \cdot 1)' = 1' \cdot 1 + 1 \cdot 1' = 2 \cdot 1' \Rightarrow 1' = 0$.

$0' = (2 \cdot 0)' = 2' \cdot 0 + 2 \cdot 0' = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0' = 2 \cdot 0' \Rightarrow 0' = 0$.

$6' = (2 \cdot 3)' = 2' \cdot 3 + 2 \cdot 3' = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$.

$9'' = (9')' = 6' = 5$.

- 2) Fácilmente podemos verificar las derivadas de los 11 primeros números naturales:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n'	0	0	1	1	4	1	5	1	12	6	7

- 3) Si existe la derivada aritmética vimos que necesariamente $0' = 1' = 0$ y por definición, $p' = 1$ para todo p primo. Sea $n \geq 2$ y $n = \prod_{i=1}^m p_i$ la descomposición de n en factores primos (repetidos o no). Procedamos por inducción sobre m . Para $m = 1$ tenemos $n' = (p_1)' = 1$. Supongamos determinada unívocamente la derivada aritmética para todos los naturales

de la forma $\prod_{i=1}^m p_i$, Entonces,

$$\left(\prod_{i=1}^{m+1} p_i\right)' = \left(\left(\prod_{i=1}^m p_i\right) \cdot p_{m+1}\right)' = \left(\prod_{i=1}^m p_i\right)' \cdot p_{m+1} + \left(\prod_{i=1}^m p_i\right),$$

y al estar determinado $(\prod_{i=1}^m p_i)'$, lo está $(\prod_{i=1}^{m+1} p_i)'$.

4) Es claro que para $n \geq 2$ la fórmula dada es válida incluso si alguno de los exponente n_i es nulo, por tanto si a, b son dos números mayores o iguales que 2 se pueden expresar en la forma $a = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, $b = \prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i}$. Entonces,

$$\begin{aligned} (ab)' &= \left(\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i + \beta_i}\right)' = ab \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i + \beta_i}{p_i} \\ &= \left(a \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{p_i}\right) b + a \left(b \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{p_i}\right) = a'b + ab'. \end{aligned}$$

Si alguno de los a, b es 0 o 1, la comprobación de la regla de Leibniz es inmediata.

5) Tenemos $120' = (2^3 \cdot 3 \cdot 5)' = 120 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = 244$.

161. Propiedades de la derivada aritmética natural

- 1) Demostrar que para k, n enteros positivos se verifica $(n^k)' = kn^{k-1}n'$.
- 2) Demostrar la fórmula de Leibniz para la derivada k -ésima del producto de dos números: $(ab)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{(k-i)} b^{(i)}$.
- 3) Demostrar que la aditividad de la derivada $(a+b)' = a' + b'$ se cumple en algunos casos y en otros no.
- 4) Demostrar que
 - (1) $(a+b)' = a' + b' \Rightarrow (ka+kb)' = (ka)' + (kb)' \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
 - (2) $(a+b)' \geq a' + b' \Rightarrow (ka+kb)' \geq (ka)' + (kb)' \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
 - (3) $(a+b)' \leq a' + b' \Rightarrow (ka+kb)' \leq (ka)' + (kb)' \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
- 5) Demostrar que para todo $k > 1$ número natural se verifica

$$n' \geq n \geq 1 \Rightarrow (kn)' > kn \quad \forall n \geq 1.$$

Solución. 1) Para $k = 1$, $(n^1)' = n' = 1n^{1-1}n'$ y la fórmula se verifica. Para $k = 2$, $(n^2)' = (n \cdot n)' = n'n + nn' = 2nn'$, y también se cumple. Si se cumple para k ,

$$(n^{k+1})' = (n^k n)' = (n^k)' n + n^k n' = kn^{k-1}n' n + n^k n' = (k+1)n^k n',$$

y la fórmula es cierta para $k + 1$.

2) La fórmula es cierta para $k = 1$, en efecto

$$\begin{aligned}(ab)^{(1)} &= (ab)' = a'b + ab' \\ &= \binom{1}{0}a^{(1)}b^{(0)} + \binom{1}{1}a^{(0)}b^{(1)} = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i}a^{(1-i)}b^{(i)}.\end{aligned}$$

Supongamos que la fórmula es cierta para k . Entonces,

$$\begin{aligned}(ab)^{(k+1)} &= \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i}a^{(k-i)}b^{(i)} \right)' = \sum_{i=0}^k \left(\binom{k}{i}a^{(k-i)}b^{(i)} \right)' \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(a^{(k-i+1)}b^{(i)} + a^{(k-i)}b^{(i+1)} \right) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}a^{(k-i+1)}b^{(i)} + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}a^{(k-i)}b^{(i+1)}.\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de índices y usando las conocidas fórmulas combinatorias $\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{i}$, $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}$, $\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$ podemos escribir

$$\begin{aligned}(ab)^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}a^{(k-i+1)}b^{(i)} + \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1}a^{(k-i+1)}b^{(i)} \\ &= \binom{k}{0}a^{(k+1)}b^{(0)} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i}a^{(k-i+1)}b^{(i)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1}a^{(k-i+1)}b^{(i)} + \binom{k}{k}a^{(0)}b^{(k+1)} \\ &= \binom{k+1}{0}a^{(k+1)}b^{(0)} + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i}a^{(k+1-i)}b^{(i)} + \binom{k+1}{k+1}a^{(0)}b^{(k+1)} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i}a^{(k+1-i)}b^{(i)},\end{aligned}$$

lo cual implica que la fórmula es cierta para $k + 1$.

3) Por ejemplo

$$\begin{aligned}(1+2)' &= 3' = 1 = 0+1 = 1' + 2', \\ (3+5)' &= 8' = 12, \quad 3' + 5' = 1+1 = 2 \Rightarrow (3+5)' \neq 3' + 5'.\end{aligned}$$

4) Tenemos

$$(1) (ka + kb)' = (k(a + b))' = k'(a + b) + k(a + b)' = k'a + k'b + k(a' + b') \\ = (k'a + ka') + (k'b + kb') = (ka)' + (kb)'.$$

$$(2) (ka + kb)' = (k(a + b))' = k'(a + b) + k(a + b)' \geq k'a + k'b + k(a' + b') \\ = (k'a + ka') + (k'b + kb') = (ka)' + (kb)'.$$

(3) Análogo razonamiento.

5) Si $k > 1$ entonces $k' \geq 1$ con lo cual $k'n \geq 1$. Entonces, $(kn)' = k'n + kn' > kn' \geq kn$.

162. Cotas para la derivada aritmética natural

- 1) Demostrar que para todo entero positivo n se verifica $n' \leq \frac{n \log_2 n}{2}$.
- 2) Demostrar que si $n = 2^k$ la cota es exacta
- 3) Demostrar que si n es el producto de k factores, cada uno de ellos mayor que 1, se verifica $n' \geq kn^{\frac{k-1}{k}}$.
- 4) Demostrar que si $n = 2^k$ la cota es exacta.
- 5) Demostrar que si $n > 1$ no es primo, entonces $n' \geq 2\sqrt{n}$.

Solución. 1) Si $n = 1$ se verifica la desigualdad trivialmente. Si $n \geq 2$, sea $n = \prod_{i=1}^k p_i^{n_i}$ su descomposición en factores primos. Entonces,

$$n \geq \prod_{i=1}^k 2^{n_i} \Rightarrow \log_2 n \geq \log_2 \prod_{i=1}^k 2^{n_i} = \sum_{i=1}^k n_i.$$

$$\Rightarrow n' = n \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{p_i} \leq n \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{2} = \frac{n}{2} \sum_{i=1}^k n_i \leq \frac{n \log_2 n}{2}.$$

$$2) \text{ Tenemos } n' = n \cdot \frac{k}{2} = \frac{n \log_2 2^k}{2} = \frac{n \log_2 n}{2}.$$

3) Sea $n = n_1 n_2 n_3 \cdots n_k$ con $n_i \geq 2$ para todo $i = 1, \dots, k$. Aplicando la regla de Leibniz y que $n'_i \geq 1$ para todo i ,

$$n' = n'_1 n_2 n_3 \cdots n_k + n_1 n'_2 n_3 \cdots n_k + \dots + n_1 n_2 n_3 \cdots n'_k \\ \geq n_2 n_3 \cdots n_k + n_1 n_3 \cdots n_k + \dots + n_1 n_2 n_3 \cdots n_{k-1} \\ = n \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k} \right).$$

Usando que la media aritmética es mayor o igual que la geométrica,

$$n' \geq nk \left(\frac{1}{n_1} \cdot \frac{1}{n_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n_k} \right)^{1/k} = kn n^{-1/k} = kn^{\frac{k-1}{k}}.$$

- 4) Tenemos $n' = 2^k \frac{k}{2} = k2^{k-1} = k(2^k)^{\frac{k-1}{k}} = kn^{\frac{k-1}{k}}$.
- 5) Si $n > 1$ no es primo, es el producto de $k \geq 2$ factores mayores que 1, por tanto $n' \geq kn^{\frac{k-1}{k}} \geq 2n^{\frac{2-1}{2}} = 2\sqrt{n}$.

163. Primeras ecuaciones diferenciales aritméticas

Es natural plantear el problema de encontrar todos los números naturales que satisfacen a la ecuación diferencial aritmética

$$a_k n^{(k)} + a_{k-1} n^{(k-1)} + \cdots + a_2 n'' + a_1 n' + a_0 n = b$$

con los a_i y b , números naturales. Vemos algunos ejemplos sencillos.

- 1) Demostrar que el único entero positivo que satisface $n' = 0$ es $n = 1$.
- 2) Demostrar que los únicos números naturales n que verifican $n' = 1$ son los primos.
- 3) Demostrar que si $a - 2$ es primo, la ecuación $n' = a$ tiene al menos la solución $n = 2(a - 2)$.
- 4) Demostrar que $n = p^p$ con p primo es solución de la ecuación $n' = n$

Solución. 1) Sabemos que $1' = 0$ y si $n \geq 2$, entonces n contiene algún factor primo con lo cual $n' > 0$.

2) Si n es primo, entonces $n' = 1$ y si $n \geq 2$ no es primo, contiene al menos un par de primos p_1, p_2 en su factorización, es decir $n = p_1 p_2 \cdots$ y $n' = n \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots \right) > 1$.

3) En efecto, $(2(a - 2))' = 2'(a - 2) + 2(a - 2)' = a - 2 + 2 = a$.

4) Tenemos $(p^p)' = pp^{p-1}p' = p^p$.

164. Conjetura de Goldbach y derivada aritmética

La conjetura de Goldbach, no resuelta a día de hoy se enuncia como *todo número par mayor que dos es la suma de dos primos*. Proporcionamos una condición necesaria para que la conjetura sea cierta en términos de una ecuación diferencial aritmética.

Demostrar que si la conjetura de Goldbach es cierta, entonces la ecuación diferencial aritmética $n' = 2a$ tiene solución para todo $a \geq 2$.

Solución. Si la conjetura de Goldbach es cierta, entonces para todo $a \geq 2$ existen primos p_1, p_2 con $2a = p_1 + p_2$. Si $n = p_1 p_2$, tenemos $n' = (p_1 p_2)' = p_1' p_2 + p_1 p_2' = p_2 + p_1 = 2a$, por tanto $n = p_1 p_2$ es solución de $n' = 2a$.

165. Conjetura de los primos gemelos y derivada aritmética

La conjetura de los primos gemelos, no resuelta a día de hoy se enuncia como *existen infinitos pares de números gemelos*, es decir infinitos pares $(p, p+2)$ con p y $p+2$ primos. Proporcionamos una condición necesaria para que la conjetura sea cierta en términos de una ecuación diferencial aritmética.

Demostrar que si la conjetura de la infinitud de los primos gemelos es cierta, entonces la ecuación diferencial aritmética $n'' = 1$ tiene infinitas soluciones.

Solución. Si la conjetura de los primos gemelos es cierta, entonces existen infinitos pares de primos de la forma $p, p+2$. Si $n = 2p$, tenemos $n' = (2p)' = 2'p + 2p' = p + 2$. Pero al ser $p+2$ primo, $n'' = (p+2)' = 1$.

166. Conjetura de Sophie Germain

Un número primo p se dice que es un primo de Sophie Germain si $2p+1$ es también primo. Por ejemplo, 2 es primo de Sophie Germain, y 7 no lo es. Se ha conjeturado que existen infinitos primos de Sophie Germain, pero a día de hoy, esta conjetura ni se ha demostrado ni refutado. 1) Demostrar que si p es primo, entonces $(2^4p)' = 2^4(2p+1)$.

2) Demostrar que para todo entero positivo m se verifica la desigualdad $(2^4m)'' \geq 2^4(4m+3)$, con igualdad si y sólo si m es un primo de Sophie Germain.

3) Demostrar que la conjetura de Sophie Germain es cierta si y sólo si la ecuación diferencial aritmética $n'' = 4n + 48$ tiene infinitas soluciones de la forma $n = 2^4p$ con p primo.

Solución. 1) Tenemos $(2^4p)' = (2^4)'p + 2^4p' = 4 \cdot 2^3 \cdot 2' \cdot p + 2^4 \cdot 1 = 2^4(2p+1)$.
2) Analicemos los casos m primo y no primo. Si m no es primo,

$$(2^4m)' = 4 \cdot 2^3m + 2^4m' = 2^4(2m + m'),$$

$$\begin{aligned} (2^4m)'' &= (2^4(2m + m'))' = 4 \cdot 2^3(2m + m') + 2^4(2m + m')' \\ &= 2^4(4m + 2m' + (2m + m')') > 2^4(4m + 3). \end{aligned}$$

Si m es primo,

$$(2^4m)' = 4 \cdot 2^3m + 2^4m' = 2^4(2m + m') = 2^4(2m + 1),$$

$$(2^4m)'' = (2^4(2m + 1))' = 4 \cdot 2^3(2m + 1) + 2^4(2m + 1)'$$

$$= 2^4 (4m + 2 + (2m + 1)') \geq 2^4 (4m + 3),$$

verificándose la igualdad si y sólo si $2m + 1$ es también primo, es decir si y sólo si m es un primo de Sophie Germain.

3) Si la conjetura de Sophie Germain es cierta, según el apartado anterior existen infinitos primos p tales que $(2^4 p)' = 2^4 (4p + 3)$ y llamando $n = 2^4 p$ queda la ecuación $n'' = 4n + 48$. Recíprocamente, si la ecuación $n'' = 4n + 48$ tiene infinitas soluciones de la forma $n = 2^4 p$, entonces $(2^4 p)' = 2^4 (4p + 3)$ y según el apartado anterior, p es primo de Sophie Germain.

167. La ecuación diferencial aritmética $n' = n$

1) Demostrar que si $n = p^p m$ con p primo y $m > 1$ natural, entonces $n' = p^p (m + m')$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} n^{(k)} = \infty$.

2) Sea n número natural y p^k la mayor potencia del primo p tal que $p^k \mid n$. Si $0 < k < p$, demostrar que p^{k-1} es la mayor potencia de p tal que $p^{k-1} \mid n'$ y que todas las derivadas $n', n'', \dots, n^{(k)}$ son distintas.

3) Demostrar que si $n = p^{pk} m$ para algún primo p y enteros $k, m > 1$, entonces $n' = p^{pk} (km + m')$.

4) Sea $n \geq 2$ entero. Demostrar que: n está libre de cuadrados $\Leftrightarrow (n, n') = 1$.

5) Demostrar que todas las soluciones de la ecuación $n' = n$ son $n = 0$ y $n = p^p$ con p primo.

Solución. 1) Tenemos $n' = (p^p m)' = (p^p)' m + p^p m' = p^p \cdot \frac{p}{p} \cdot m + p^p m' = p^p (m + m')$. Dado que $(p^p)^{(i)} = p^p$ para todo $i \geq 0$ y usando la fórmula de la derivada k -ésima del producto,

$$(p^p m)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (p^p)^{(k-i)} m^{(i)} = p^p (m + km' + \dots)$$

$$\geq p^p m + kp^p m' \geq p^p m + k = n + k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} n^{(k)} = \infty.$$

2) Como $p^k \mid n$, podemos escribir $n = p^k m$. Derivando, $n' = kp^{k-1} m + p^k m' = p^{k-1} (km + pm')$, es decir $p^{k-1} \mid n'$. No puede ocurrir $p^k \mid n'$ pues si así fuera,

$$p^k \mid n' \Rightarrow p^k \mid p^{k-1} (km + pm') \Rightarrow p \mid km + pm',$$

lo cual es absurdo pues $k < p$ y m no contiene el factor p . Deducimos además que n'' sólo puede ser divisible por p^{k-2} , etc. Esto asegura que las derivadas $n', n'', \dots, n^{(k)}$ son distintas.

3) Tenemos $(p^{pk} m)' = kp^{pk-1} m + p^{pk} m' = p^{pk} (km + m')$.

4) $\Rightarrow$ Si $(n, n') \neq 1$, existe primo p tal que $p \mid n$ y $p \mid n'$ y según el apartado 2, $p^2 \mid n$ (absurdo).

$\Leftrightarrow$) Si existe primo p tal que $p^2 | n$, por el apartado 2, $p \mid n'$ con lo cual $(n, n') \neq 1$ (absurdo).

5) Se verifica $0' = 0$ y $(p^p)' = pp^{p-1}p' = p^p$, luego 0 y p^p son soluciones de la ecuación.

Sea $n \neq 0$ y $n' = n$, con lo cual ha de ser $n \geq 2$. Sea p alguno de los factores primos que aparecen en la factorización de n . Entonces, $p \mid n$ y veamos que al menos $p^p \mid n$. En efecto si p^k con $0 < k < p$ fuera la mayor potencia que divide a n , entonces y según el apartado 2, p^{k-1} sería la mayor potencia que divide a $n' = n$ lo cual es absurdo. Pero si $p^p \mid n$ tenemos $n = p^p m$ con $m \geq 1$. Si fuera $m > 1$ y por el apartado 1, $n' = p^p(m + m') = p^p m$ implica $m' = 0$ y por tanto $m = 1$, lo cual es una contradicción. Ha de ser pues $m = 1$ con lo cual necesariamente $n = p^p$.

168. Derivada aritmética entera

Se llama función *derivada aritmética* en los enteros $\mathbb{Z}$ a la función $n' : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por

(1) $0' = 1' = (-1)' = 0$.

(2) Si $n = up_1p_2 \cdots p_k$ con $u = \pm 1$ y los p_i son primos (alguno de ellos puede estar repetido), entonces $n' := u \sum_{i=1}^k p_1 \cdots p_{i-1}p_{i+1} \cdots p_k$.

Nótese que si p es primo, entonces $k = 1$ y el producto anterior es vacío, por tanto $p' = 1$.

1) Demostrar que esta definición generaliza la derivada aritmética en $\mathbb{N}$.

2) Demostrar que $(-n)' = -n'$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y que se verifica la regla de Leibniz.

3) Calcular $(-60)'$.

Solución. 1) En efecto, para $n = 0$ y $n = 1$ coinciden y para $n \geq 2$ con descomposición $n = \prod_{i=1}^m P_i^{n_i} = 1p_1p_2 \cdots p_k$ tenemos

$$n' = n \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{P_i} = p_1p_2 \cdots p_k \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \right)$$

$$= p_2p_3 \cdots p_k + p_1p_3 \cdots p_k + \cdots + p_1p_2 \cdots p_{k-1} = 1 \sum_{i=1}^k p_1 \cdots p_{i-1}p_{i+1} \cdots p_k.$$

2) Son consecuencia inmediatas de la definición.

3) $(-60)' = -(60)' = -(2^2 \cdot 3 \cdot 5)' = -60 \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) = -92$.

169. Derivada aritmética racional

1) Demostrar que la función $(a/b)' : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida mediante

$$\left(\frac{a}{b}\right)' := \frac{a'b - b'a}{b^2},$$

es una extensión de la derivada aritmética en $\mathbb{Z}$ y cumple la regla de Leibniz.

2) Demostrar que es la única extensión que la cumple.

3) Completar la tabla

a	1	2	4	5	6	7	9
b	3	3	5	5	7	8	10
$(a/b)'$							

Solución. 1) Veamos que $(a/b)'$ está bien definida, es decir que no depende del representante de cada número racional. En efecto, si $0 \neq k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{ka}{kb}\right)' &= \frac{(ka)'(kb) - (kb)'(ka)}{(kb)^2} = \frac{(k'a + ka')(kb) - (k'b + kb')(ka)}{(kb)^2} \\ &= \frac{k^2(a'b - b'a)}{k^2b^2} = \frac{a'b - b'a}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)'. \end{aligned}$$

Es una extensión de la derivada aritmética en los enteros pues

$$\left(\frac{a}{1}\right)' = \frac{a'1 - 1'a}{1^2} = a'.$$

Cumple la regla de Leibniz:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)' \left(\frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right)' &= \frac{a'b - b'a}{b^2} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{c'd - d'c}{b^2} \\ &= \frac{(a'c + ac')(bd) - (ac)(b'd + bd')}{b^2d^2} = \frac{(ac)'(bd) - (bd)'(ac)}{(bc)^2} \\ &= \left(\frac{ac}{bd}\right)' = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)'. \end{aligned}$$

2) No existe otra función de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ que extienda a la derivada aritmética en $\mathbb{Z}$ y que cumpla la regla de Leibniz. En efecto, tal derivada ha de cumplir $1' = 0$ y se cumplen las equivalencias

$$1' = 0 \Leftrightarrow \left(n \cdot \frac{1}{n}\right)' = 0 \Leftrightarrow n' \cdot \frac{1}{n} + n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n}\right)' = -\frac{n'}{n^2}.$$

Es decir, necesariamente ha de ser $(1/n)' = -n'/n^2$ y de aquí se deduce que

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)' = a' \cdot \frac{1}{b} + a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)' = \frac{a'}{b} + a \cdot \frac{-b'}{b^2} = \frac{a'b - b'a}{b^2}.$$

3) Fácilmente verificamos:

a	1	2	4	5	6	7	9
b	3	3	5	5	7	8	10
$(a/b)'$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{16}{25}$	0	$\frac{29}{49}$	$-\frac{19}{16}$	$-\frac{1}{10}$

170. Derivada aritmética en dominios de factorización única

Sea D un dominio de factorización única y elijamos en D los elementos irreducibles que son *positivos*, es decir elijamos un conjunto $\mathcal{P}$ de elementos irreducibles tales que cada elemento irreducible de D está asociado a uno y sólo un elemento de $\mathcal{P}$. Llamemos a $\mathcal{P}$ el conjunto de los *átomos positivos* y sea $\mathcal{U}$ el conjunto de las unidades de D . Para todo $a \in D$ definimos la derivada a' de a como sigue:

- (1) Si $a = 0$ o $a \in \mathcal{U}$ entonces $a' = 0$.
- (2) En otro caso, existen $u \in \mathcal{U}$, $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ (únicos salvo el orden y tal vez alguno repetido) tales que $a = up_1 \cdots p_k$. Entonces

$$a' := u \sum_{i=1}^k p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k.$$

Nota. Si $a = p \in \mathcal{P}$ entonces $k = 1$ y tenemos un producto vacío, con lo cual $a' = 1$. La función a' depende por supuesto de la elección de $\mathcal{P}$, en consecuencia se debería escribir $a'_{\mathcal{P}}$. No obstante y por simplicidad de notación, escribiremos a' cuando el conjunto de átomos positivos se sobreentienda.

- 1) Demostrar que la derivada $a'_{\mathcal{P}}$ definida en un dominio de factorización única D , satisface la regla de Leibniz.
- 2) En $D = \mathbb{Z}$, se consideran los conjuntos de átomos positivos

$$\mathcal{P}_1 = \{2, 3, 5, 7, \dots\}, \quad \mathcal{P}_2 = \{2, -3, 5, -7, \dots\}.$$

Calcular $(6)'_{\mathcal{P}_1}$ y $(6)'_{\mathcal{P}_2}$.

- 3) Si $D = \mathbb{R}[x]$, el conjunto de las unidades es $\mathcal{U} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Elijamos como conjunto $\mathcal{P}$ de átomos positivos, el conjunto de los polinomios mónicos de primer grado unión el de los mónicos de segundo grado con discriminante menor que 0 y sea $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 3x^2$. Calcular $(f(x))'_{\mathcal{P}}$.

4) *Nota.* Para todo dominio de factorización única D que no es un cuerpo y con la derivada aritmética $a'_{\mathcal{P}}$, se puede definir una derivada aritmética en su cuerpo de fracciones K que es extensión de $a'_{\mathcal{P}}$, de la misma manera que se hizo en $\mathbb{Q}$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)'_{\mathcal{P}} = \frac{a'_{\mathcal{P}}b - b'_{\mathcal{P}}a}{b^2},$$

y la demostración es análoga.

Sea $\mathbb{R}[x]$ con los átomos positivos del apartado anterior. Calcular

$$\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\right)'.$$

Solución. 1) Denotemos a $a'_{\mathcal{P}}$ simplemente por a' . Tenemos que demostrar que para todo $a, b \in D$ se verifica $(ab)' = a'b + ab'$. Supongamos que tanto a como b no son nulos ni unidades, caso contrario el resultado es evidente. Sean $a = up_1 \cdots p_k$ y $b = vp_{k+1} \cdots p_m$ con u, v unidades y los $p_i \in \mathcal{P}$, entonces

$$\begin{aligned} a'b + ab' &= \left(u \sum_{i=1}^k p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k\right) (vp_{k+1} \cdots p_m) \\ &\quad + (up_1 \cdots p_k) \left(v \sum_{i=k+1}^m p_{k+1} \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_m\right) \\ &= uv \sum_{i=1}^k p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_k p_{k+1} \cdots p_m \\ &\quad + uv \sum_{i=k+1}^m p_1 \cdots p_k p_{k+1} \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_m \\ &= (uv) \sum_{i=1}^m p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_m = (ab)'. \end{aligned}$$

2) El conjunto de la unidades es $\mathcal{U} = \{1, -1\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} (6)'_{\mathcal{P}_1} &= (1 \cdot 2 \cdot 3)' = 1(3+2) = 5, \\ (6)'_{\mathcal{P}_2} &= ((-1) \cdot 2 \cdot (-3))' = (-1)(-3+2) = 1. \end{aligned}$$

Nótese que la derivada en $\mathbb{Z}$ que se definió en el problema 168 es la que corresponde a $\mathcal{P}_1$.

3) La descomposición de $f(x)$ en producto de irreducibles es $(-1) \cdot x \cdot x \cdot (x^2 - 2x + 3)$ y por tanto,

$$(f(x))'_{\mathcal{P}} = (-1) [x \cdot (x^2 - 2x + 3) + x \cdot (x^2 - 2x + 3) + x \cdot x]$$

$$= -2x^3 + 3x^2 - 6x.$$

4) Tenemos

$$\begin{aligned} ((x-1)^2)' &= x-1 + x-1 = 2x-2, \quad (x^2+1)' = 1 \\ \Rightarrow \left(\frac{(x-1)^2}{x^2+1} \right)' &= \frac{(2x-2)(x^2+1) - 1 \cdot (x-1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 3}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

171. Derivada aritmética y anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$

1) Demostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i] = \{a + b\sqrt{5}i : a, b \in \mathbb{Z}\}$ es dominio de integridad con las operaciones habituales suma y producto de complejos pero que no es dominio de factorización única.

2) Demostrar que en $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ no se puede definir una derivada aritmética. Para ello, elegir diferentes conjuntos de átomos positivos.

Solución. 1) Como $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i] \subset \mathbb{C}$ bastará demostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ es subanillo de $\mathbb{C}$. Usamos el conocido teorema de caracterización de subanillos. Claramente, $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i] \neq \emptyset$. Para cada par de elementos $a + b\sqrt{5}i$ y $c + d\sqrt{5}i$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$,

$$(a + b\sqrt{5}i) - (c + d\sqrt{5}i) = (a - c) + (b - d)\sqrt{5}i \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}i],$$

$$(a + b\sqrt{5}i)(c + d\sqrt{5}i) = (ac - 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5}i \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}i].$$

Hemos demostrado pues que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ es anillo. Dado que $\mathbb{C}$ es conmutativo, también lo es $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$. Por otra parte $1 = 1 + 0i \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$, luego es unitario. Al ser $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es dominio de integridad, también lo es $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$.

Un elemento $a + b\sqrt{5}i \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ no nulo es unidad si y sólo si existe un $a' + b'\sqrt{5}i \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ no nulo tal que $(a + b\sqrt{5}i)(a' + b'\sqrt{5}i) = 1$. Tomando módulos al cuadrado, obtenemos $(a^2 + 5b^2)(a'^2 + 5b'^2) = 1$. Como los dos factores anteriores son enteros positivos, ha de ser necesariamente $a^2 + 5b^2 = 1$ o equivalentemente $a = \pm 1 \wedge b = 0$. Es decir, las únicas posibles unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ son $1, -1$. Pero estos elementos son efectivamente unidades al cumplirse $1 \cdot 1 = 1$, $(-1) \cdot (-1) = 1$. Concluimos que $\mathcal{U} = \{1, -1\}$. Expresemos $6 = (a + b\sqrt{5}i)(c + d\sqrt{5}i)$ como producto de dos factores no nulos. Esto equivale a

$$\begin{cases} ac - 5bd = 6 \\ bc + ad = 0 \end{cases}$$

Resolviendo en las incógnitas c, d obtenemos

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -5b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -5b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{6a}{a^2 + 5b^2}, \quad d = \frac{\begin{vmatrix} a & 6 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -5b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{-6b}{a^2 + 5b^2}.$$

Dando los valores $a = 1, b = 1$ obtenemos $c = 1, d = -1$ y por tanto

$$6 = (1 + \sqrt{5}i)(1 - \sqrt{5}i). \quad (1)$$

Por otra parte tenemos la factorización

$$6 = 2 \cdot 3 = (2 + 0\sqrt{5}i)(3 + 0\sqrt{5}i). \quad (2)$$

Veamos que los elementos $1 + \sqrt{5}i, 1 - \sqrt{5}i, 2, 3$ son irreducibles. En efecto, si $x + y\sqrt{5}i \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ divide a $1 + \sqrt{5}i$, existe $u + v\sqrt{5}i \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ tal que $1 + \sqrt{5}i = (x + y\sqrt{5}i)(u + v\sqrt{5}i)$. Tomando módulos al cuadrado queda $6 = (x^2 + 5y^2)(u^2 + 5v^2)$ lo cual implica que $x^2 + 5y^2$ ha de dividir a 6. Esto ocurre en los casos $x = \pm 1, y = 0$ o $x = \pm 1, y = \pm 1$ es decir, los posibles divisores de $1 + \sqrt{5}i$ son $\pm 1, \pm(1 + \sqrt{5}i), \pm(1 - \sqrt{5}i)$. Los elementos ± 1 y $\pm(1 + \sqrt{5}i)$ claramente dividen a $1 + \sqrt{5}i$ pero los primeros son unidades y los segundos sus asociados. Por otra parte, $\pm(1 - \sqrt{5}i)$ no dividen a $1 + \sqrt{5}i$ pues

$$\frac{1 + \sqrt{5}i}{\pm(1 - \sqrt{5}i)} = \pm \frac{(1 + \sqrt{5}i)(1 + \sqrt{5}i)}{(1 - \sqrt{5}i)(1 + \sqrt{5}i)} = \pm \left(-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}i \right) \notin \mathbb{Z}[\sqrt{5}i].$$

Hemos demostrado que $1 + \sqrt{5}i$ es irreducible. De manera análoga podemos demostrar que $1 - \sqrt{5}i, 2, 3$ también lo son. Debido a las factorizaciones (1) y (2), concluimos que $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ no es dominio de factorización única.

2) Veamos que para cualquier elección $\mathcal{P}$ de los átomos positivos, no se puede construir una derivada aritmética en $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$.

Caso 1. Elijamos un conjunto $\mathcal{P}$ de átomos positivos que contiene a los elementos irreducibles $2, 3, 1 + \sqrt{5}i, 1 - \sqrt{5}i$. Entonces,

$$6 = 2 \cdot 3 \Rightarrow 6' = 2 + 3 = 5,$$

$$6 = (1 + \sqrt{5}i)(1 - \sqrt{5}i) \Rightarrow 6' = (1 + \sqrt{5}i) + (1 - \sqrt{5}i) = 2.$$

Caso 2. Si $\mathcal{P}$ contiene a los elementos irreducibles $-2, 3, 1 + \sqrt{5}i, 1 - \sqrt{5}i$,

$$6 = (-1) \cdot (-2) \cdot 3 \Rightarrow 6' = (-1)((-2) + 3) = -1,$$

$$6 = (1 + \sqrt{5}i)(1 - \sqrt{5}i) \Rightarrow 6' = (1 + \sqrt{5}i) + (1 - \sqrt{5}i) = 2.$$

Caso 3. Si $\mathcal{P}$ contiene a los elementos irreducibles $2, -3, 1 + \sqrt{5}i, 1 - \sqrt{5}i$,

$$6 = (-1) \cdot 2 \cdot (-3) \Rightarrow 6' = (-1)(2 + (-3)) = 1,$$

$$6 = (1 + \sqrt{5}i)(1 - \sqrt{5}i) \Rightarrow 6' = (1 + \sqrt{5}i) + (1 - \sqrt{5}i) = 2.$$

Caso 4. Si $\mathcal{P}$ contiene a los elementos irreducibles $-2, -3, 1 + \sqrt{5}i, 1 - \sqrt{5}i$,

$$6 = (-2) \cdot (-3) \Rightarrow 6' = (-2) + (-3) = -5,$$

$$6 = (1 + \sqrt{5}i)(1 - \sqrt{5}i) \Rightarrow 6' = (1 + \sqrt{5}i) + (1 - \sqrt{5}i) = 2.$$

Caso 5. Si $\mathcal{P}$ contiene a los elementos irreducibles $-2, -3, 1 + \sqrt{5}i, -1 + \sqrt{5}i$,

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot 3 \Rightarrow 6' = 2 + 3 = 5, \\ 6 &= (-1) \cdot (1 + \sqrt{5}i)(-1 + \sqrt{5}i) \Rightarrow \\ 6' &= (-1) \left((1 + \sqrt{5}i) + (-1 + \sqrt{5}i) \right) = -2\sqrt{5}i. \end{aligned}$$

En todos los casos anteriores la derivada no está bien definida, y de manera análoga podemos verificar los restantes casos.

172. Ecuación diofántica lineal en dos incógnitas

Una ecuación *diofántica* lineal en dos incógnitas es una ecuación de la

$$ax + by = c, \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0). \quad (E)$$

Se llama solución de la ecuación anterior a todo par de enteros (x, y) que la satisface.

- 1) Sea $d = \text{m.c.d.}(a, b)$. Demostrar que la ecuación (E) tiene alguna solución $\Leftrightarrow d \mid c$.
- 2) Hallar, si es posible, una solución particular de la ecuación diofántica $97x + 35y = 13$.
- 3) Hallar, si es posible, una solución particular de la ecuación diofántica $14x + 21y = 11$.
- 4) Sea la ecuación diofántica $ax + by = c$ con $d = \text{m.c.d.}(a, b) \mid c$. Demostrar que la solución general (i.e. todas las soluciones) de la ecuación es

$$\begin{cases} x = x_0 + k \frac{b}{d} \\ y = y_0 - k \frac{a}{d} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

siendo (x_0, y_0) una solución particular.

- 5) Hallar la solución general de la ecuación diofántica $97x + 35y = 13$.

Solución. 1) $\Rightarrow$) Si la ecuación (E) tiene una solución entera (x_0, y_0) , entonces $ax_0 + by_0 = c$. Como $d \mid a$ y $d \mid b$, se verifica $d \mid ax_0 + by_0 = c$. $\Leftarrow$) Tenemos

$$\begin{aligned} \text{m.c.d.} \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right) &= 1 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Id. Bezout}} \quad \exists p, q \in \mathbb{Z} : p \frac{a}{d} + q \frac{b}{d} = 1 \\ &\Rightarrow a \frac{pc}{d} + b \frac{qc}{d} = c. \end{aligned}$$

Por hipótesis $d \mid c$ con lo cual $(x_0, y_0) = \left(\frac{pc}{d}, \frac{qc}{d} \right)$ es solución de (E) . Nótese, que esto proporciona un método para hallar una solución particular de la

ecuación diofántica (E) .

2) Usando el algoritmo de Euclides:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ \hline 97 & 35 & 27 & 8 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 27 & 8 & 3 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

con lo cual $d = \text{m.c.d.}(97, 35) = 1 \mid 13$ y la ecuación tiene soluciones. Tenemos las relaciones:

$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$

$$8 = 3 \cdot 2 + 2$$

$$27 = 8 \cdot 3 + 2$$

$$35 = 1 \cdot 27 + 8$$

$$97 = 2 \cdot 35 + 27.$$

Expresemos $d = 1$ como combinación lineal de 97 y 35. Tenemos

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 = 3 - (8 - 3 \cdot 2) = 3 \cdot 3 - 8 = 3 \cdot (27 - 3 \cdot 8) - 8 \\ &= 3 \cdot 27 - 10 \cdot 8 = 3 \cdot 27 - 10 \cdot (35 - 27) = 13 \cdot 27 - 10 \cdot 35 \\ &= 13 \cdot (97 - 2 \cdot 35) - 10 \cdot 35 = \underbrace{13}_p \cdot 97 + \underbrace{(-36)}_q \cdot 35. \end{aligned}$$

Según el apartado anterior, una solución particular de la ecuación diofántica es

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{pc}{d}, \frac{qc}{d} \right) = (13 \cdot 13, (-36) \cdot 13) = (169, -468).$$

3) Tenemos $d = \text{m.c.d.}(14, 21) = 7$, que no divide a 11, por tanto la ecuación no tiene soluciones.

4) Como $d \mid c$, del apartado 1 deducimos que existe una solución particular (x_0, y_0) . Sea (x_1, y_1) cualquier solución de la ecuación, entonces

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{a}{d}x_1 + \frac{b}{d}y_1 = \frac{c}{d} \\ \frac{a}{d}x_0 + \frac{b}{d}y_0 = \frac{c}{d} \end{cases} &\Rightarrow \frac{a}{d}(x_1 - x_0) + \frac{b}{d}(y_1 - y_0) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{a}{d}(x_1 - x_0) = -\frac{b}{d}(y_1 - y_0) \Rightarrow \frac{b}{d} \mid \frac{a}{d}(x_1 - x_0). \end{aligned}$$

Pero a/d y b/d son primos entre si, por tanto $\frac{b}{d} \mid (x_1 - x_0)$, con lo cual existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 - x_0 = k \frac{b}{d}$, luego $x_1 = x_0 + k \frac{b}{d}$. Sustituyendo en

$$\frac{a}{d}(x_1 - x_0) + \frac{b}{d}(y_1 - y_0) = 0,$$

$$\frac{a}{d} \cdot k \cdot \frac{b}{d} + \frac{b}{d}(y_1 - y_0) = 0 \Rightarrow \frac{a}{d} \cdot k + y_1 - y_0 = 0 \Rightarrow y_1 = y_0 - k \frac{a}{d}.$$

Hemos demostrado que cualquier solución (x_1, y_1) de la ecuación diofántica es necesariamente de la forma dada. Falta demostrar que son efectivamente soluciones. Pero,

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 &= a \left(x_0 + k \frac{b}{d} \right) + b \left(y_0 - k \frac{a}{d} \right) \\ &= ax_0 + ak \frac{b}{d} + by_0 - bk \frac{a}{d} = ax_0 + by_0 = c. \end{aligned}$$

5) En el apartado 2 vimos que $d = 1$ y que una solución particular es $(169, -468)$. Usando el teorema anterior, obtenemos la solución general:

$$\begin{aligned} x &= 169 + 35k \\ y &= -468 - 97k \end{aligned} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

173. Teorema del valor medio escalar

1) Demostrar el teorema del valor medio escalar:

Sea E un espacio normado, $A \subset E$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Sean $a, b \in A$ con $a \neq b$ tales que el segmento $[a, b] \subset A$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a).$$

2) Verificar la validez del teorema del valor medio escalar para la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ en el intervalo $[a, b]$ con $a = (0, 0)$, $b = (1, 1)$.

3) Demostrar que el teorema del valor medio escalar no se puede extender a campos no escalares. Para ello, considerar $f : E = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(t) = (\cos t, \sin t)^T \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y cualquier intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ de amplitud 2π .

Solución. 1) Consideremos la función $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = f((1-t)a + tb)$. Ésta función es continua en $[0, 1]$ y por la regla de la cadena,

$$\varphi'(t) = Df((1-t)a + tb)(b-a) \quad \forall t \in (0, 1).$$

Aplicando a φ el teorema del valor medio para funciones reales de variable real, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0) = Df((1-t_0)a + t_0b)(b-a).$$

Basta ahora elegir $c = (1 - t_0)a + t_0b$.

2) Las parciales de f son $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y$, que son continuas en $\mathbb{R}^2$ y por tanto f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. El segmento (a, b) es

$$(a, b) = \{(1 - t)(0, 0) + t(1, 1) : 0 < t < 1\} = \{(t, t) : 0 < t < 1\}.$$

Cualquier $c \in (a, b)$ es por tanto de la forma $c = (t, t)$ con $0 < t < 1$. Entonces,

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a) \Leftrightarrow 3 - 0 = \nabla f(t, t) \cdot (1, 1)$$

$$\Leftrightarrow 3 = (2t, 6t) \cdot (1, 1) \Leftrightarrow 3 = 8t \Leftrightarrow t = 3/8,$$

y $c = (3/8, 3/8) \in (a, b)$.

3) Las funciones componentes de f son $f_1(t) = \cos t$ y $f_2(t) = \sin t$ y

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = -\sin t, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = \cos t$$

que son continuas en todo $\mathbb{R}$, y por tanto f es diferenciable en $\mathbb{R}$. Si consideramos el intervalo cerrado $[a, b] = [a, a + 2\pi]$ y $c \in (a, b)$, entonces,

$$Df(c)(b - a) = \begin{pmatrix} -\sin c \\ \cos c \end{pmatrix} (2\pi).$$

Por otra parte,

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \cos(a + 2\pi) \\ \sin(a + 2\pi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pero $Df(c)(b - a) \neq (0, 0)^T$ para todo c , con lo cual no se verifica $f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$. $\square$

174. El número e es trascendente

Demostrar que el número real e es trascendente sobre $\mathbb{Q}$, es decir que no existe $p \in \mathbb{Q}[x]$ no nulo tal que $p(e) = 0$.

Solución. Sea $f \in \mathbb{R}[x]$ de grado r y sea

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(r)}(x).$$

Halleemos la derivada de $h(x) = e^{-x}F(x)$:

$$\frac{d}{dx} (e^{-x}F(x)) = -e^{-x} (f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(r)}(x))$$

$$+e^{-x} \left(f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(r)}(x) + f^{(r+1)}(x) \right) \underbrace{\quad}_{f^{(r+1)}(x)=0} = e^{-x} f(x).$$

La función h satisface las hipótesis del valor medio de Lagrange en todo intervalo de la forma $[0, k]$ con $k > 0$ es decir, existe $\xi_k \in (0, k)$ tal que

$$h'(\xi_k) = \frac{h(k) - h(0)}{k - 0} = \frac{e^{-k}F(k) - F(0)}{k}.$$

Dado que $\xi_k = \theta_k k$ con $0 < \theta_k < 1$, y que $h'(\xi_k) = -e^{-\xi_k} f(\xi_k)$ podemos escribir $e^{-k}F(k) - F(0) = -e^{-\theta_k k} f(\theta_k k) k$ con $0 < \theta_k < 1$. Multiplicando por e^k obtenemos $F(k) - e^k F(0) = -e^{(1-\theta_k)k} f(\theta_k k) k$ con $0 < \theta_k < 1$. Para $k = 1, 2, \dots, n$ obtenemos

$$\begin{aligned} F(1) - eF(0) &= -e^{(1-\theta_1)} f(\theta_1) = \epsilon_1 \\ F(2) - e^2 F(0) &= -2e^{2(1-\theta_2)} f(2\theta_2) = \epsilon_2 \\ &\dots \\ F(n) - e^n F(0) &= -ne^{n(1-\theta_n)} f(n\theta_n) = \epsilon_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Supongamos que e no es trascendente sobre $\mathbb{Q}$, entonces se satisface una relación de la forma $b_n e^n + b_{n-1} e^{n-1} + \cdots + b_1 e + b_0 = 0$ con los $b_j \in \mathbb{Q}$ no todos nulos. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que se satisface una relación de la forma

$$c_n e^n + c_{n-1} e^{n-1} + \cdots + c_1 e + c_0 = 0 \quad (2)$$

con los $c_j \in \mathbb{Z}$ y $c_0 > 0$. En las relaciones (1) multipliquemos la primera igualdad por c_1 , la segunda por c_2 , etc. Sumando obtenemos

$$\begin{aligned} c_1 F(1) + c_2 F(2) + \cdots + c_n F(n) - F(0) (c_1 e + c_2 e^2 + \cdots + c_n e^n) \\ = c_1 \epsilon_1 + c_2 \epsilon_2 + \cdots + c_n \epsilon_n. \end{aligned}$$

Usando (2) queda

$$c_0 F(0) + c_1 F(1) + c_2 F(2) + \cdots + c_n F(n) = c_1 \epsilon_1 + c_2 \epsilon_2 + \cdots + c_n \epsilon_n. \quad (3)$$

Todo el anterior desarrollo es válido para cualquier polinomio $f(x)$. Ahora, vamos a elegir en concreto el polinomio

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p (2-x)^p \cdots (n-x)^p$$

en donde p es un número primo con $p > n$ y $p > c_0$. Al desarrollar, obtenemos un polinomio de la forma

$$f(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{a_0}{(p-1)!} x^p + \frac{a_1}{(p-1)!} x^{p+1} + \cdots$$

con $a_1, a_2, \dots$, enteros. Demostremos que si $i \geq p$ la derivada i -ésima $f^{(i)}(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y todos múltiplos de p . En efecto el primer sumando es un monomio de grado $p-1$ y por tanto, su derivada i -ésima es 0 si $i \geq p$. Los demás monomios son de la forma $m_k(x) = \frac{a_k}{(p-1)!} x^{p+k}$ con $k \geq 0$. Hallemos sus derivadas sucesivas.

$$\begin{aligned} m_k(x) &= \frac{a_k}{(p-1)!} x^{p+k}, \\ m'_k(x) &= \frac{a_k}{(p-1)!} (p+k) x^{p+k-1}, \\ m''_k(x) &= \frac{a_k}{(p-1)!} (p+k)(p+k-1) x^{p+k-2}, \\ &\dots \\ m_k^{(p)}(x) &= \frac{a_k}{(p-1)!} (p+k)(p+k-1) \dots (p+k-(p-1)) x^{p+k-p} \\ &= \frac{a_k}{(p-1)!} (p+k)(p+k-1) \dots (k+1) x^k = \frac{a_k}{(p-1)!} \cdot \frac{(p+k)!}{k!} x^k \\ &= \frac{a_k(p)!}{(p-1)!} \cdot \frac{(p+k)!}{(p!)(k!)} x^k = pa_k \binom{p+k}{k} x^k. \end{aligned}$$

El coeficiente del monomio $m_k^{(p)}(x)$ es por tanto entero y múltiplo de p y obviamente de la misma manera será el coeficiente de $m_k^{(i)}(x)$ para $i \geq p$. Como consecuencia, para todo entero j se verifica $f^{(i)}(j)$ es entero y múltiplo de p si $i \geq p$.

Por su propia construcción, $f(x)$ tiene a $x = 1, 2, \dots, n$ como raíces de multiplicidad p . Entonces, para $j = 1, 2, \dots, n$ se verifica $f(j) = 0$, $f'(j) = 0$, $\dots$, $f^{(p-1)}(j) = 0$ y por tanto

$$F(j) = f(j) + f'(j) + \dots + f^{(p-1)}(j) + f^{(p)}(j) + \dots + f^{(r)}(j)$$

y por lo demostrado anteriormente $F(j)$ es entero y múltiplo de p para todo $j = 1, 2, \dots, n$. Como $x = 0$ es raíz de multiplicidad $p-1$ de $f(x)$, se verifica $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(p-2)}(0) = 0$. Para $i \geq p$, $f^{(i)}(0)$ es entero y múltiplo de p y $f^{(p-1)}(0) = (n!)^p$. Al ser p primo y $p > n$, $p \nmid (n!)^p$ es decir $f^{(p-1)}(0)$ no es divisible por p . Al ser

$$\begin{aligned} F(0) &= f(0) + f'(0) + \dots + f^{(p-2)}(0) + f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \dots + f^{(r)}(0) \\ &= f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \dots + f^{(r)}(0) \end{aligned}$$

se cumple que $F(0)$ es entero y no divisible por p . Al ser

$$c_0 > 0, \quad p > c_0, \quad p \nmid F(0), \quad p \mid F(1), \quad p \mid F(2), \dots, \quad p \mid F(n)$$

podemos asegurar que $c_0F(0) + c_1F(1) + \dots + c_nF(n)$ es entero y no divisible por p .

Las relaciones (1) expresan $-ie^{i(1-\theta_i)}f(i\theta_i) = \epsilon_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ por tanto,

$$\epsilon_i = \frac{-ie^{i(1-\theta_i)}(i\theta_i)^{p-1}(1-i\theta_i)^p \dots (n-i\theta_i)^p}{(p-1)!} \quad (0 < \theta_i < 1).$$

Acotemos los ϵ_i en valor absoluto:

$$|\epsilon_i| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}.$$

Halleemos el límite de los ϵ_i cuando $p \rightarrow +\infty$. Tenemos

$$0 \leq |\epsilon_i| = e^n (n \cdot n!) \cdot \frac{(n \cdot n!)^{p-1}}{(p-1)!} \xrightarrow[\text{si } p \rightarrow +\infty]{} 0$$

pues la exponencial es un infinito de orden menor que el factorial. Es decir, $\epsilon_i \rightarrow 0$ cuando $p \rightarrow +\infty$.

Podemos elegir un primo mayor que n y que c_0 que sea suficientemente grande para que ocurra $|c_1\epsilon_1 + \dots + c_n\epsilon_n| < 1$. Pero por (3), $c_1\epsilon_1 + \dots + c_n\epsilon_n = c_0F(0) + \dots + c_nF(n)$ y por tanto ha de ser entero. Dado que en valor absoluto es menor que 1, la única opción es que $c_0F(0) + \dots + c_nF(n) = 0$. Pero habíamos visto que $p \nmid c_0F(0) + \dots + c_nF(n)$ y sin embargo $p \mid 0$ lo cual es una contradicción. Es decir, de suponer que e no es trascendente llegamos a una contradicción. Concluimos pues que e es trascendente.

175. Desigualdad de Jensen

El teorema de la desigualdad de Jensen, se expresa en los siguientes términos:

Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida con $\mu(\Omega) = 1$. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

a) $f \in L^1(\mu)$.

b) $a < f(x) < b$ para todo $x \in (a, b)$.

c) $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa.

Entonces, se verifica la desigualdad de Jenssen

$$\varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \int_{\Omega} (\varphi \circ f) d\mu.$$

Sean $y_1, \dots, y_n$ números positivos. Aplicar la desigualdad de Jensen para demostrar que

$$\sqrt[n]{y_1 \dots y_n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$$

es decir, que la media geométrica es menor o igual que la media aritmética.

Solución. Consideremos el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ con $\Omega = \{p_1, \dots, p_n\}$ un conjunto finito, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\Omega)$ y la medida μ determinada por $\mu(p_i) = 1/n$ para todo $i = 1, \dots, n$. Se verifica

$$\mu(\Omega) = \mu(p_1) + \dots + \mu(p_n) = 1/n + \dots + 1/n = 1.$$

Consideremos ahora la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p_i) = x_i$ para $x_i \in \mathbb{R}$ genéricos. La función f es claramente simple y medible y $\int |f| d\mu = \sum_{i=1}^n |x_i| \mu(p_i) < +\infty$ es decir, $f \in L^1(\mu)$. Por otra parte, $a < f(x) < b$ para

$$a < \min\{x_1, \dots, x_n\}, \quad \max\{x_1, \dots, x_n\} < b.$$

Elijamos la función convexa en (a, b) dada por $\varphi(x) = e^x$. Tenemos,

$$\varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) = e^{\int_{\Omega} f d\mu} = e^{x_1(1/n) + \dots + x_n(1/n)} = \sqrt[n]{e^{x_1} \dots e^{x_n}},$$

$$\int_{\Omega} (\varphi \circ f) d\mu = \int_{\Omega} e^f d\mu = e^{x_1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + e^{x_n} \cdot \frac{1}{n}.$$

Por la desigualdad de Jensen,

$$\sqrt[n]{e^{x_1} \dots e^{x_n}} \leq \frac{e^{x_1} + \dots + e^{x_n}}{n}.$$

Dados los números positivos $y_1, \dots, y_n$ y eligiendo $x_1, \dots, x_n$ tales que $y_i = e^{x_i}$ para todo $i = 1, \dots, n$ queda

$$\sqrt[n]{y_1 \dots y_n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}.$$

□

Fascículo 8

Monografías 176-200

176. Topología final

Sea $f_i : (X, T_i) \rightarrow Y, i \in I$ una familia de aplicaciones de los espacios topológicos (X_i, T_i) en el conjunto Y .

1) Demostrar que $T_F = \{V \subset Y : f_i^{-1}(V) \in T_i \ \forall i \in I\}$ es una topología en Y . A la topología T_F se la llama topología *final* determinada por las aplicaciones f_i .

2) Demostrar que la topología final T_F es la mayor topología en Y de entre todas las que hacen a las f_i continuas.

3) Sea $f_i : (X, T_i) \rightarrow Y, i \in I$ una familia de aplicaciones de los espacios topológicos (X_i, T_i) en el conjunto Y . Sea (Z, T) un espacio topológico. Demostrar que una aplicación $g : (Y, T_F) \rightarrow (Z, T)$ es continua si y sólo si todas las composiciones $g \circ f_i$ son continuas.

4) Recíprocamente, demostrar que si una topología T' en Y cumple

$$g : (Y, T') \rightarrow (Z, T) \text{ es continua} \Leftrightarrow g \circ f_i \text{ es continua para todo } i \in I$$

entonces, T' es la topología final T_F .

Solución. 1) Se verifican los tres axiomas de topología:

(i) $f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T_i$ para todo $i \in I$ luego $\emptyset \in T_F$. Por otra parte, $f_i^{-1}(Y) = Y \in T_i$ para todo $i \in I$ y por tanto $Y \in T_F$.

(ii) Si $\{V_j : j \in J\}$ es una colección de elementos de T_F , para todo $i \in I$ se verifica

$$f_i^{-1} \left(\bigcup_{j \in J} V_j \right) = \bigcup_{j \in J} \underbrace{f_i^{-1}(V_j)}_{\in T_i} \in T_i,$$

lo cual implica que $\bigcup_{j \in J} V_j \in T_F$.

(iii) Si V_1, V_2 son elementos de T_F , para todo $i \in I$ se verifica

$$f_i^{-1}(V_1 \cap V_2) = \underbrace{f_i^{-1}(V_1)}_{\in T_i} \cap \underbrace{f_i^{-1}(V_2)}_{\in T_i} \in T_i$$

lo cual implica que $V_1 \cap V_2 \in T_F$.

2) En efecto, sea T una topología en Y tal que todas las f_i son continuas. Si $V \in T$, entonces $f_i^{-1}(V) \in T_i$ para todo $i \in I$ y por tanto $V \in T_F$. Es decir, $T \subset T_F$.

3) Las aplicaciones $f_i : (X_i, T_i) \rightarrow (Y, T_F)$ son continuas, por tanto si $g : (Y, T_F) \rightarrow (Z, T)$ es continua las $g \circ f_i$ también lo son (composición de continuas). Supongamos ahora que las aplicaciones $g \circ f_i$ son continuas. Si $W \in T$,

$$f_i^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f_i)^{-1}(W) \in T_i \text{ para todo } i,$$

con lo cual $g^{-1}(W) \in T_F$ y por tanto g es continua.

4) Consideremos las composiciones

$$\begin{aligned} f_i : (X, T_i) &\xrightarrow{f_i} (Y, T') \xrightarrow{I_1} (Y, T_F), \\ f_i : (X, T_i) &\xrightarrow{f_i} (Y, T_F) \xrightarrow{I_2} (Y, T'), \end{aligned}$$

en donde tanto I_1 como I_2 representan la aplicación identidad en Y . Por el apartado anterior, la continuidad de las aplicaciones $f_i = I_1 \circ f_i$ para todo i implica que I_1 es continua, por tanto si $V \in T_F$ entonces $I_1^{-1}(V) = V \in T'$, es decir $T_F \subset T'$. Por hipótesis, la continuidad de las aplicaciones $f_i = I_2 \circ f_i$ para todo i implica que I_2 es continua, por tanto si $V \in T'$ entonces $I_2^{-1}(V) = V \in T_F$, es decir $T' \subset T_F$. Concluimos que T' es la topología final T_F .

177. Operador de Sturm-Liouville

Sea $C[a, b]$ el espacio vectorial de las funciones reales continuas en $[a, b]$ y $p \in C[a, b]$ fijo. Sea $C^2[a, b]$ el espacio vectorial de las funciones reales de clase 2 en $[a, b]$. Se define el conjunto:

$$E = \{f \in C^2[a, b] : p(a)f'(a) = 0 \wedge p(b)f'(b) = 0\}.$$

- 1) Demostrar que E es un subespacio vectorial de $C[a, b]$.
- 2) Si $q \in C[a, b]$ fijo se define la aplicación $T : E \rightarrow C[a, b]$ de la forma

$$T(f) = (pf')' + qf.$$

Demostrar que T es lineal (se la llama operador de *Sturm-Liouville*).

3) Se considera en $C[a, b]$ el producto escalar $\langle h_1, h_2 \rangle = \int_a^b h_1 h_2 dx$. Demostrar que

$$\langle T(f), g \rangle = \langle f, T(g) \rangle \quad \forall f, g \in E$$

es decir, el operador de Sturm-Liouville es simétrico.

4) Sean λ y μ autovalores de T con correspondientes autofunciones f y g . Demostrar que si $\lambda \neq \mu$, las autofunciones f y g son ortogonales.

Solución. 1) Claramente $E \subset C[a, b]$. La función nula 0 es de clase 2 y satisface $p(a) \cdot 0(a) = p(b) \cdot 0(b) = 0$, luego $0 \in E$. Si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ y $f_1, f_2 \in E$ entonces $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ es de clase dos en $[a, b]$ y

$$p(a) (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(a) = p(a) (\alpha_1 f_1(a) + \alpha_2 f_2(a))$$

$$= \alpha_1 p(a) f_1(a) + \alpha_2 p(a) f_2(a) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0$$

y análogamente cambiando b por a , luego $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in E$, y E es subespacio de $C[a, b]$.

2) La aplicación está bien definida pues para todo $f \in E$, la aplicación $T(f)$ es continua en $[a, b]$. Si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ y $f_1, f_2 \in E$ entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) &= (p(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2))' + q(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \\ &= (p(\alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2'))' + \alpha_1(qf_1) + \alpha_2(qf_2) \\ &= (\alpha_1(pf_1') + \alpha_2(pf_2'))' + \alpha_1(qf_1) + \alpha_2(qf_2) \\ &= \alpha_1(pf_1')' + \alpha_2(pf_2')' + \alpha_1(qf_1) + \alpha_2(qf_2) \\ &= \alpha_1((pf_1')' + qf_1) + \alpha_2((pf_2')' + qf_2) \\ &= \alpha_1 T(f_1) + \alpha_2 T(f_2) \end{aligned}$$

luego T es lineal.

3) Tenemos por una parte

$$\begin{aligned} \langle T(f), g \rangle &= \int_a^b T(f)g \, dx = \int_a^b ((pf')' + qf)g \, dx \\ &= \int_a^b (pf')'g \, dx + \int_a^b qfg \, dx. \end{aligned}$$

Aplicando integración por partes a la primera integral con $u = g$, $dv = (pf')'$ obtenemos $du = g'dx$ y $v = pf'$, con lo cual

$$\langle T(f), g \rangle = [gpf']_a^b - \int_a^b pf'g' \, dx + \int_a^b qfg \, dx.$$

Procediendo de la misma manera obtenemos

$$\langle f, T(g) \rangle = [fpg']_a^b - \int_a^b pg'f'dx + \int_a^b fqq'dx.$$

Queda entonces $\langle T(f), g \rangle - \langle f, T(g) \rangle = [gpf' - fpg']_a^b$. Pero al ser f y g funciones de E se verifica $p(a)f(a) = p(b)f(b) = p(a)g(a) = p(b)g(b) = 0$ con lo cual $\langle T(f), g \rangle - \langle f, T(g) \rangle = 0$ y la propiedad queda demostrada.

4) Dado que el operador de Sturm-Liouville T satisface $\langle T(f), g \rangle = \langle f, T(g) \rangle$, tenemos $\langle \lambda f, g \rangle = \langle f, \mu g \rangle$ o bien $\lambda \langle f, g \rangle = \mu \langle f, g \rangle$ o bien $(\lambda - \mu) \langle f, g \rangle = 0$. Al ser $\lambda - \mu \neq 0$, queda $\langle f, g \rangle = 0$.

178. Ecuación de Legendre

Se llama *ecuación de Legendre* a la ecuación diferencial

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \quad (L)$$

con α real.

1) Demostrar que la ecuación de Legendre se puede escribir en la forma

$$((x^2 - 1)y')' = \alpha(\alpha + 1)y.$$

2) Demostrar que la ecuación de Legendre se puede escribir en la forma $T(y) = \lambda y$ con $\lambda = \alpha(\alpha + 1)$ y T un operador de Sturm-Liouville.

3) Demostrar que la ecuación de Legendre tiene dos soluciones analíticas en el intervalo $(-1, 1)$ y que son linealmente independientes.

4) Demostrar que $y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ es solución de la ecuación de Legendre si y sólo si se verifica

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha - n)(n + \alpha + 1)}{(n + 2)(n + 1)}a_n \quad \forall n \geq 0. \quad (*)$$

5) Determinar a_n en función de a_0 para n par y en función de a_1 para n impar.

6) Determinar dos soluciones linealmente independientes de (L) en el intervalo $(-1, 1)$ y deducir la solución general.

Solución. 1) Tenemos las equivalencias

$$\begin{aligned} ((x^2 - 1)y')' &= \alpha(\alpha + 1)y \Leftrightarrow 2xy' + (x^2 - 1)y'' = \alpha(\alpha + 1)y \\ &\Leftrightarrow (1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0. \end{aligned}$$

2) Recordamos que dadas dos funciones fijas $p, q \in C[a, b]$ un operador de Sturm-Liouville es una aplicación lineal de la forma

$$T : E = \{f \in C^2[a, b] : p(a)f(a) = 0 \wedge p(b)f(b) = 0\} \rightarrow C[a, b]$$

dado por $T(f) = (pf')' + qf$. Si elegimos $p = x^2 - 1$ y $q = 0$ tenemos que $p(1) = p(-1) = 0$ y el correspondiente operador de Sturm-Liouville es

$$T : E = \{f \in C^2[-1, 1] : p(-1)f(-1) = p(1)f(1) = 0\} \rightarrow C[-1, 1]$$

dado por $T(y) = ((x^2 - 1)y')'$. Pero $T(y) = \lambda y$ equivale a $((x^2 - 1)y')' = \alpha(\alpha + 1)y$, que según el apartado anterior es la ecuación de Legendre.

3) Recordamos que una ecuación diferencial homogénea de segundo orden $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ con coeficientes analíticos $P(x)$ y $Q(x)$ en un intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$ tiene dos soluciones analíticas y linealmente independientes en el mismo intervalo. Para $x \in (-1, 1)$ la ecuación de Legendre se puede escribir en la forma

$$y'' - \underbrace{\frac{2x}{1-x^2}}_{P(x)} y' + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}}_{Q(x)} y = 0.$$

Ahora bien, para $x \in (-1, 1)$ se verifica $1/(1-x^2) = \sum_{n \geq 0} x^{2n}$ con lo cual, $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas en $(-1, 1)$.

4) Tenemos

$$y = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad y' = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$2xy' = \sum_{n \geq 1} 2n a_n x^n = \sum_{n \geq 0} 2n a_n x^n$$

$$(1-x^2)y'' = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n \geq 0} n(n-1) a_n x^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n] x^n.$$

Sustituyendo en (L) la ecuación se satisface si y sólo si se cumple la relación

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n - 2n a_n + \alpha(\alpha+1) a_n = 0$$

para todo $n \geq 0$. Operando, podemos escribir la relación anterior en la forma

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha - n)(n + \alpha + 1)}{(n + 2)(n + 1)}a_n.$$

5) Para los coeficientes con índice par tenemos

$$a_2 = -\frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 \cdot 2}a_0,$$

$$a_4 = -\frac{(\alpha - 2)(\alpha + 3)}{3 \cdot 4}a_2 = (-1)^2 \frac{\alpha(\alpha - 2)(\alpha + 1)(\alpha + 3)}{4!}a_0,$$

y fácilmente se demuestra por inducción que

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha - 2) \cdots (\alpha - 2n + 2)(\alpha + 1)(\alpha + 3) \cdots (\alpha + 2n - 1)}{(2n)!}a_0.$$

Procediendo de manera análoga obtendríamos para los coeficientes con índice impar

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 3) \cdots (\alpha - 2n + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 4) \cdots (\alpha + 2n)}{(2n)!}a_1.$$

6) Consideremos las funciones $y_1, y_2 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$y_1(x) = \sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n} =$$

$$1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\alpha(\alpha - 2) \cdots (\alpha - 2n + 2)(\alpha + 1)(\alpha + 3) \cdots (\alpha + 2n - 1)}{(2n)!} x^{2n}$$

$$y_2(x) = \sum_{n \geq 0} a_{2n+1} x^{2n+1} =$$

$$x + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 3) \cdots (\alpha - 2n + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 4) \cdots (\alpha + 2n)}{(2n)!} x^{2n+1}$$

funciones que están bien definidas pues las series que las determinan son convergentes en $(-1, 1)$ (criterio del cociente). Las funciones y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación de Lagrange pues los coeficientes de cada una de las series satisfacen las relaciones (*). Las funciones y_1, y_2 son linealmente independientes. Efectivamente, tenemos

$$y_1(x) = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots, \quad y_2(x) = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots$$

con lo cual $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$. Si $\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0$ entonces $\lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) = 0$ y sustituyendo $x = 0$ en las dos igualdades

anteriores, obtenemos $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La solución general de la ecuación de Legendre es por tanto:

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

Nota. Obsérvese que por la forma de los coeficientes de las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$, si $\alpha = 2k$ con $k \geq 0$ entero entonces $y_1(x)$ es un polinomio de grado $2k$ que sólo contiene potencias pares de x . Si $\alpha = 2k + 1$ con $k \geq 0$ entero entonces $y_2(x)$ es un polinomio de grado $2k + 1$ que sólo contiene potencias impares de x .

179. Iteración de punto fijo

Sea una función $g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que $p \in D$ es *punto fijo* de g si se verifica $g(p) = p$.

1) Sea una función $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $p \in D$. Demostrar que

$$p \text{ es cero o raíz de } f \Leftrightarrow p \text{ es punto fijo de } g(x) = x - f(x).$$

2) Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$. Demostrar que *i)* g tiene un punto fijo en $[a, b]$.

ii) Si además, g es derivable en (a, b) y existe constante k con $0 < k < 1$ tal que $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in (a, b)$, el punto fijo de g es único.

3) Demostrar el *Teorema del punto fijo*:

Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$. Supongamos además además, g es derivable en (a, b) y que existe constante k con $0 < k < 1$ tal que $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, la sucesión

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1$$

converge al único punto fijo p en $[a, b]$ (método de *iteración de punto fijo*).

4) Demostrar que en las hipótesis del teorema del punto fijo, se verifican para todo $n \geq 1$ las acotaciones de la sucesión de iteración de punto fijo:

$$(a) \quad |p_n - p| \leq k^n \cdot \max\{p_0 - a, b - p_0\}.$$

$$(b) \quad |p_n - p| \leq \frac{k^n}{1 - k} |p_1 - p_0|.$$

5) *Aplicación.* Se considera la función $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = (x^2 - 1)/3$.

a) Demostrar que g satisface las hipótesis del teorema del punto fijo.

b) Calcular el p_3 de la iteración de punto fijo con $p_0 = -1$.

c) Determinar a partir de qué n la iteración de punto fijo proporciona p con

tres cifras decimales exactas.

d) Demostrar que la iteración de punto fijo proporciona en el caso presente una sucesión convergente a la única solución de la ecuación $x^2 - 3x - 1 = 0$ en $[-1, 1]$. Dar una fórmula cerrada para esta solución.

Solución. 1) $\Rightarrow$) Si p es cero o raíz de f entonces $g(p) = p - f(p) = p - 0 = p$ es decir, p es punto fijo de g .

$\Leftarrow$) Si p es punto fijo de g entonces $f(p) = p - g(p) = p - p = 0$ es decir, p es raíz de f .

2) i) Si $g(a) = 0$ o $g(b) = 0$, un punto fijo es $p = a$ o $p = b$. En caso contrario se verifica $g(a) > a$ y $g(b) < b$. La función $h(x) = g(x) - x$ es continua en $[a, b]$ y verifica $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$. Por el teorema de Bolzano, existe $p \in (a, b)$ tal que $0 = h(p) = g(p) - p$, con lo cual $g(p) = p$ y p es por tanto punto fijo de g .

ii) Supongamos que existieran dos puntos fijos p, q distintos con $p < q$. Aplicando el teorema del valor medio de Lagrange a la función g en el intervalo $[p, q]$:

$$\exists \xi \in (p, q) : g'(\xi) = \frac{g(q) - g(p)}{q - p} \Rightarrow |q - p|$$

$$= |g(q) - g(p)| = |g'(\xi)| |q - p| \leq k |q - p| < |q - p|$$

lo cual es absurdo por tanto, el punto fijo es único.

3) Por el apartado anterior, existe un único punto fijo p . Como $g([a, b]) \subset [a, b]$, la sucesión p_n está bien definida. Dado que $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in (a, b)$ y por el teorema del valor medio de Lagrange,

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)| |p_{n-1} - p| \leq k |p_{n-1} - p|$$

en donde $\xi_n \in (a, b)$. Reiterando obtenemos

$$|p_n - p| \leq k |p_{n-1} - p| \leq k^2 |p_{n-2} - p| \leq \dots \leq k^n |p_0 - p|.$$

Al ser $0 < k < 1$ se verifica $\lim_{n \rightarrow +\infty} |p_n - p| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n |p_0 - p| = 0$, y por tanto la sucesión p_n converge a p .

4) (a) En la demostración del teorema del punto fijo se probó que $|p_n - p| \leq k^n |p_0 - p|$, pero se verifica $|p_0 - p| \leq \max\{p_0 - a, b - p_0\}$.

(b) Tenemos las desigualdades

$$|p_{n+1} - p_n| = |g(p_n) - g(p_{n-1})| \leq k |p_n - p_{n-1}| \leq \dots \leq k^n |p_1 - p_0|.$$

Entonces, para $m > n \geq 1$,

$$|p_m - p_n| = |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - \dots + p_{n+1} - p_n|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \cdots + |p_{n+1} - p_n| \\
&\leq k^{m-1} |p_1 - p_0| + k^{m-2} |p_1 - p_0| + \cdots + k^n |p_1 - p_0| \\
&= k^n (1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1}) |p_1 - p_0|.
\end{aligned}$$

Se verifica $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = p$, por tanto

$$\begin{aligned}
|p - p_n| &= \lim_{m \rightarrow +\infty} |p_m - p_n| \leq k^n |p_1 - p_0| \sum_{j=0}^{m-n-1} k^j \\
&\leq k^n |p_1 - p_0| \sum_{j=0}^{+\infty} k^j = \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0|.
\end{aligned}$$

5) a) La función g es polinómica y por tanto continua en $[-1, 1]$. Es derivable en $(-1, 1)$ con derivada $g'(x) = 2x/3$. El único punto crítico de g es $x = 0$. Tenemos $g(0) = -1/3$, $g(-1) = g(1) = 0$, por tanto el mínimo absoluto de g en $[-1, 1]$ es $-1/3$ y el máximo absoluto 0. Esto demuestra que $g([-1, 1]) \subset [-1, 1]$. Además, se verifica

$$|g'(x)| = \left| \frac{2x}{3} \right| \leq \frac{2}{3} \text{ para todo } x \in (-1, 1),$$

lo cual demuestra que se verifican las hipótesis del teorema del punto fijo.

b) Para $p_0 = -1$ tenemos

$$\begin{aligned}
p_1 &= g(p_0) = g(-1) = -\frac{1}{3}, \\
p_2 &= g(p_1) = g(-1/3) = \frac{1/9 - 1}{3} = -\frac{8}{27}, \\
p_3 &= g(p_2) = g(-8/27) = \frac{64/729 - 1}{3} = -\frac{665}{2187}.
\end{aligned}$$

c) Usando la acotación $|p_n - p| \leq k^n \cdot \max\{p_0 - a, b - p_0\}$, tenemos en nuestro caso $|p_n - p| \leq (2/3)^n \cdot \max\{0, 2\} = 2(2/3)^n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
|p_n - p| \leq 2 \left(\frac{2}{3} \right)^n < 10^{-3} &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \right)^n < \frac{10^{-3}}{2} \Leftrightarrow n \log_{10} \frac{2}{3} < -3 - \log_{10} 2 \\
&\Leftrightarrow \underbrace{n}_{\log_{10}(2/3) < 0} > \frac{-3 - \log_{10} 2}{\log_{10} \frac{2}{3}} = 20,97 \dots,
\end{aligned}$$

con lo cual $n = 21$.

d) Sabemos que p es punto fijo de g si y sólo si p es raíz de $f(x) = x - g(x)$. En nuestro caso,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - g(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{x^2 - 1}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x - x^2 + 1}{3} = 0,$$

lo cual equivale a $x^2 - 3x - 1 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son $(3 \pm \sqrt{13})/2$ y sólo $(3 - \sqrt{13})/2 \in [-1, 1]$. Por tanto, el límite de la iteración de punto fijo es $p = (3 - \sqrt{13})/2$

180. Polinomios de Bernstein

El teorema de Weierstrass asegura que toda función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser aproximada uniformemente por polinomios. Construiremos de manera explícita una de tales sucesiones.

1) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se define el n -ésimo polinomio de *Bernstein* asociado a f como el polinomio:

$$B_n(f)(x) := \sum_{k=0}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \binom{n}{k} (x-a)^k (b-x)^{n-k}.$$

Determinar los polinomios de Bernstein asociados a las funciones $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$.

2) Ídem para la función $f_2(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

3) Demostrar que la sucesión de polinomios de Bernstein $B_n(f_i)(x)$ converge a f_i uniformemente en el intervalo $[0, 1]$ para cada $i = 0, 1, 2$.

4) Sea ahora $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua cualquiera. Demostrar que la sucesión de sus polinomios de Bernstein convergen uniformemente a f en $[0, 1]$.

5) Sea ahora $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua cualquiera. Demostrar que la sucesión de sus polinomios de Bernstein convergen uniformemente a f en $[a, b]$.

Solución. 1) Para una función continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ los polinomios de Bernstein son

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Tenemos para f_0 :

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^n 1 \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1.$$

Para f_1 ,

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Se verifican las implicaciones

$$\begin{aligned} \frac{k}{n} \binom{n}{k} &= \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = \binom{n-1}{k-1} \\ \Rightarrow B_n(f_1)(x) &= x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k} = x(x + (1-x))^{n-1} = x. \end{aligned}$$

Es decir, $B_n(f_0)(x) = 1$ y $B_n(f_1)(x) = x$.

2) Usando la relación $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ demostrada en el apartado anterior,

$$\begin{aligned} B_n(f_2)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &= \frac{n-1}{n} x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &= \frac{n-1}{n} x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &\quad + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &= \frac{n-1}{n} x \cdot x + \frac{x}{n} (x + (1-x))^{n-1} = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x. \end{aligned}$$

3) Para $i = 0$ tenemos la sucesión constante $B_n(f_0)(x) = 1$ que de manera trivial converge uniformemente a $f_0(x) = 1$ en $[0, 1]$. Para $i = 1$, también $B_n(f_1)(x) = x$ es constante y converge trivialmente a $f_1(x) = x$ en $[0, 1]$. Para $i = 2$ tenemos $B_n(f_2)(x) = ((n-1)/n)x^2 + (1/n)x$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n(f_2)(x) = x^2 = f_2(x)$ en $[0, 1]$. Veamos que la convergencia es uniforme.

$$\begin{aligned} |B_n(f_2)(x) - f_2(x)| &= \left| \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x - x^2 \right| = \left| \frac{-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x \right| \\ &= \frac{1}{n} |-x^2 + x| \leq \frac{1}{n} (|-x^2| + |x|) \leq \frac{1}{n} (1 + 1) = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Entonces $2/n < \epsilon$ equivale a $n > 2/\epsilon$. Si $n_0 = \lfloor 2/\epsilon \rfloor + 1$ se verifica $|B_n(f_2)(x) - f_2(x)| < \epsilon$ si $n \geq n_0$ y para todo $x \in [0, 1]$. La convergencia es por tanto uniforme.

4) Tenemos que demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $|f(x) - B_n(f)(x)| < \epsilon$ para todo $x \in [0, 1]$. Llamemos $p_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, entonces podemos escribir $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) p_k(x)$ y dado que

$$\sum_{k=0}^n p_k(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1,$$

bastará demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$,

$$\left| \sum_{k=0}^n (f(x) - f(k/n)) p_k(x) \right| < \epsilon \quad \forall x \in [0, 1].$$

Al ser f continua en el cerrado $[0, 1]$, por el teorema de Heine f es uniformemente continua en $[0, 1]$, es decir, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon/3$ si $|x - y| < \delta$. Para $x \in [0, 1]$ y n natural definimos los conjuntos

$$A_1 = \{k : 0 \leq k \leq n \text{ y } |x - k/n| \leq \delta\},$$

$$A_2 = \{k : 0 \leq k \leq n \text{ y } |x - k/n| > \delta\}.$$

Usando que $0 \leq p_k(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^n (f(x) - f(k/n)) p_k(x) \right| \\ & \leq \sum_{k \in A_1} |f(x) - f(k/n)| p_k(x) + \sum_{k \in A_2} |f(x) - f(k/n)| p_k(x) \\ & \leq \frac{\epsilon}{3} + \sum_{k \in A_2} |f(x) - f(k/n)| p_k(x). \end{aligned}$$

Si $k \in A_2$ se verifica $(x - k/n)^2 > \delta^2$, luego $1 < (x - k/n)^2 / \delta^2$. Al ser f continua en un intervalo cerrado, está acotada. Sea K una cota superior de f . Entonces,

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in A_2} |f(x) - f(k/n)| p_k(x) \leq \sum_{k \in A_2} (|f(x)| + |f(k/n)|) p_k(x) \\ & \leq 2K \sum_{k \in A_2} p_k(x) \leq 2K \sum_{k \in A_2} \frac{(x - k/n)^2}{\delta^2} p_k(x) = \frac{2K}{\delta^2} \sum_{k \in A_2} (x - k/n)^2 p_k(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2K}{\delta^2} \sum_{k=0}^n (x - k/n)^2 p_k(x) \\
&= \frac{2K}{\delta^2} \left(x^2 \sum_{k=0}^n p_k(x) - 2x \sum_{k=0}^n (k/n) p_k(x) + \sum_{k=0}^n (k/n)^2 p_k(x) \right) \\
&\quad \underbrace{=}_{\text{Por los apartados 1 y 2}} \frac{2K}{\delta^2} \left(x^2 - 2x^2 + \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x \right) \\
&= \frac{2K}{\delta^2 n} x(1-x) \leq \frac{2K}{\delta^2 n}.
\end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2K/(\delta^2 n) = 0$, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 natural tal que $2K/\delta^2 n < \epsilon/3$ si $n \geq n_0$ con lo cual,

$$\left| \sum_{k=0}^n (f(x) - f(k/n)) p_k(x) \right| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon \text{ si } n \geq n_0$$

y por tanto, $B_n(f)(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente en $[0, 1]$.

5) Consideremos la función continua y biyectiva $\phi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $\phi(x) = (b-a)x + a$. Su inversa $\phi^{-1}(x) = (x-a)/(b-a)$ es continua. La función $g := f \circ \phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, y por el apartado anterior $B_n(g) \rightarrow g$ uniformemente en $[0, 1]$. Pero $f = g \circ \phi^{-1}$ con lo cual $B_n(g) \circ \phi^{-1} \rightarrow f$ en $[a, b]$ uniformemente. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
B_n(g)[\phi^{-1}(x)] &= B_n(g) \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \\
&= \sum_{k=0}^n g \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^k \left(1 - \frac{x-a}{b-a} \right)^{n-k} \\
&= \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^n f \left(\phi \left(\frac{k}{n} \right) \right) (x-a)^k (b-x)^{n-k} \\
&= \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^n f \left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right) \binom{n}{k} (x-a)^k (b-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

que son los polinomios de Bernstein $B_n(f)$ en $[a, b]$.

181. Espacios l_p

Designamos por $\mathbb{K}$ al cuerpo de los números reales o complejos indistintamente. Sabemos que en el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ y para todo $p \in [1, +\infty)$ se definen la normas

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

y también la norma $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Generalizaremos estos conceptos a $\mathbb{K}^\mathbb{N}$

1) Sea $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ el espacio vectorial de las sucesiones en $\mathbb{K}$ con las operaciones habituales. Para cada $p \in [1, +\infty)$ se define el subconjunto de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$:

$$l_p := \{x = (x_k) \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty\}.$$

Demostrar que l_p es subespacio vectorial de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ y que $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p)^{1/p}$ es una norma en l_p .

2) Demostrar que l_p es espacio de Banach para todo $p \in [1, +\infty)$.

3) Demostrar que para todo $p \in [1, +\infty)$ la dimensión de l_p es infinita.

4) Demostrar que para $1 \leq p < q < +\infty$ se verifica $l_p \subset l_q$ con $l_p \neq l_q$. Es decir l_p se agranda de manera estricta al aumentar p .

5) Se define el subconjunto de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$:

$$l_\infty := \left\{ x = (x_k) \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\} < +\infty \right\}$$

es decir, l_∞ está formado por las sucesiones en $\mathbb{K}$ acotadas. Demostrar que l_∞ es subespacio vectorial de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ de dimensión infinita y que $\|x\|_\infty = \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\}$ es una norma en l_∞ .

6) Demostrar que $l_p \subset l_\infty$ con $l_p \neq l_\infty$ para todo $p \in [1, +\infty)$.

7) Demostrar que l_∞ es espacio de Banach.

Solución. 1) La sucesión nula $0 = (0)$ claramente pertenece a l_p . Si $x = (x_k)$ e $y = (y_k)$ pertenecen a l_p entonces $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} |y_k|^p < +\infty$. Usando la desigualdad de Minkowski,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Tomando límites cuando $n \rightarrow +\infty$,

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |y_k|^p \right)^{1/p} < +\infty, \quad (1)$$

con lo cual $x + y \in l_p$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in l_p$ entonces,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda x_k|^p = |\lambda|^p \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty, \quad (2)$$

con lo cual $\lambda x \in l_p$ y l_p es subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Es claro que $\|x\|_p = 0$ si y sólo si $x = 0$ y las relaciones $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \|x\|_p$ y $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ se deducen inmediatamente de las relaciones (2) y (1) respectivamente. Por tanto, $\|\cdot\|_p$ es norma en l_p .

2) Sea $X_n = (x_{nk})$ una sucesión de Cauchy de elementos de l_p . Para todo par de números naturales m, n se verifica $|x_{nk} - x_{mk}| = (|x_{nk} - x_{mk}|^p)^{1/p} \leq \|X_n - X_m\|_p$. Como X_n es sucesión de Cauchy, también lo es x_{nk} para todo k y al ser $\mathbb{K}$ completo, podemos definir $x_k := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{nk}$. Veamos que la sucesión $X = (x_k)$ pertenece a l_p y que $X_n \rightarrow X$ con lo cual estará demostrado que l_p es completo. Al ser X_n de Cauchy en l_p , para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 natural tal que para $m, n \geq n_0$ se verifica $\|X_n - X_m\|_p < \epsilon$. Para todo N natural tenemos

$$\sum_{k=1}^N |x_{nk} - x_{mk}|^p \leq \left(\|X_n - X_m\|_p \right)^p \leq \epsilon^p.$$

Tomando límites cuando $m \rightarrow +\infty$

$$\sum_{k=1}^N |x_{nk} - x_k|^p = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N |x_{nk} - x_{mk}|^p \leq \epsilon^p,$$

y al ser N cualquiera, $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_{nk} - x_k|^p \leq \epsilon^p$ y por tanto $X_n - X \in l_p$. Ahora bien $X = X_n - (X_n - X)$ con lo cual $X \in l_p$. Por la última desigualdad $\|X_n - X\|_p < \epsilon$ para $n \geq n_0$ es decir, X_n converge a X .

3) Consideremos para cada n natural los elementos de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dados por $e_n = (x_k)$ con $x_k = 1$ si $k = n$ y $x_k = 0$ si $k \neq n$. Es claro que el sistema $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es libre, tiene infinitos elementos y está contenido en l_p para todo $p \in [1, +\infty)$, luego la dimensión de l_p es infinita.

4) Si $x = (x_k) \in l_p$ entonces $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p$ es convergente luego $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = 0$ con lo cual $|x_k|^q \leq |x_k|^p$ para k suficientemente grande. Por el teorema de comparación para series de términos positivos, la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^q$ converge, por tanto $x \in l_q$.

El contenido $l_p \subset l_q$ es estricto. En efecto, consideremos la sucesión $y = (k^{-1/p})$. Entonces,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |y_k|^p = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \text{ (divergente), } \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |y_k|^q = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{q/p}} \text{ (convergente),}$$

es decir $y \notin l_p$ e $y \in l_q$.

5) Es claro que la sucesión nula está acotada, que la suma de dos acotadas está acotada y que el producto de un escalar por una acotada está acotada, por tanto l_∞ es subespacio vectorial de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. La familia $\{e_n = (x_k) : n \in \mathbb{N}\}$ con $x_k = 1$ si $k = n$ y $x_k = 0$ si $k \neq n$ es libre y está contenida en l_∞ , por tanto l_∞ tiene dimensión infinita. Veamos que $\|\cdot\|_\infty$ es norma en l_∞ .

$$\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\} = 0 \Leftrightarrow |x_k| = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow x_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = (0).$$

Para $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x = (x_k) \in l_\infty$,

$$\|\lambda x\|_\infty = \sup\{|\lambda x_k| : k \in \mathbb{N}\} = \sup\{|\lambda| |x_k| : k \in \mathbb{N}\}$$

$$= |\lambda| \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\} = |\lambda| \|x\|_\infty.$$

Por último, para $x = (x_k)$ e $y = (y_k)$ elementos de l_∞ ,

$$\|x + y\|_\infty = \sup\{|x_k + y_k| : k \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{|x_k| + |y_k| : k \in \mathbb{N}\}$$

$$\leq \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\} + \sup\{|y_k| : k \in \mathbb{N}\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

6) Si $x = (x_k) \in l_p$ entonces, $\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p$ es convergente y por tanto $x_k \rightarrow 0$ lo cual implica que $x = (x_k)$ está acotada. Por otra parte, la sucesión constante $x = (1)$ pertenece a l_∞ pero no a l_p .

7) Sea $X_n = (x_{nk})$ una sucesión de Cauchy de elementos de l_∞ . Para todo par de números naturales m, n se verifica $|x_{nk} - x_{mk}| \leq \sup\{|x_{nk} - x_{mk}| : k \in \mathbb{N}\} \leq \|X_n - X_m\|_\infty$. Como X_n es sucesión de Cauchy, también lo es x_{nk} para todo k y al ser $\mathbb{K}$ completo, podemos definir $x_k := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{nk}$. Veamos que la sucesión $X = (x_k)$ pertenece a l_∞ y que $X_n \rightarrow X$ con lo cual estará demostrado que l_∞ es completo.

Si $\epsilon > 0$ existe n_0 natural tal que $|x_{nk} - x_{mk}| < \epsilon/2$ para todo k y para todo $m, n \geq n_0$. Haciendo $m \rightarrow +\infty$ obtenemos $|x_{nk} - x_k| \leq \epsilon/2$ y tomando supremos sobre k ,

$$\sup\{|x_{nk} - x_k| : k \in \mathbb{N}\} \leq \epsilon/2$$

para todo $n \geq n_0$, es decir $\|X_n - X\|_\infty < \epsilon$ si $n \geq n_0$ lo cual prueba que $X_n \rightarrow X$. Por otra parte, es claro que X está acotada, luego $X \in l_\infty$.

182. Concepto de aplicación multilineal

Sean $V_1, \dots, V_n, V$ espacios vectoriales sobre el cuerpo K y sea

$$\phi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow V$$

una aplicación. Se dice que ϕ es *multilineal* si $\forall i = 1, \dots, n$ se verifica

- (a) $\phi(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) = \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \phi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)$,
- (b) $\phi(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) = \alpha \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$,

en donde $v_i, v'_i \in V_i$, $v_j \in V_j$ si $j \neq i$ y $\alpha \in K$.

Nótese que el que ϕ es multilineal equivale a decir que la aplicación de V_i en V dada por $\phi(v_1, \dots, v_{i-1}, \bullet, v_{i+1}, \dots, v_n)$ es lineal $\forall i = 1, \dots, n$. Si $n = 2$, decimos que ϕ es una aplicación *bilineal*. Si $V = K$ decimos que ϕ es *forma* multilineal.

- 1) Si $n = 1$, demostrar que $\phi : V_1 \rightarrow V$ es multilineal si y sólo si es lineal.
- 2) Demostrar que la aplicación $\phi : V \times V^* \rightarrow K$ dada por $\phi(x, T) = T(x)$ es forma bilineal.
- 3) Sea $\phi : (K^n)^n = K^n \times \dots \times K^n \rightarrow K$ dada por $\phi(v_1, \dots, v_n) = \det A$ siendo $A = [v_1 \dots v_n]$ matriz con columnas $v_1 \dots v_n$. Demostrar que ϕ es multilineal.
- 4) Sea A un álgebra sobre K . Definimos

$$\phi : A^n \rightarrow A, \quad \phi(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1 v_2 \cdots v_n.$$

Demostrar que ϕ es multilineal.

Nota. Como casos particulares tenemos las álgebras: $K^{n \times n}$ (matrices cuadradas), $K[x]$ (polinomios), $C^k(I)$, $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ (funciones reales de clase k en un intervalo cerrado $I = [a, b]$).

- 5) Sea $\phi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow V$ multilineal y $T : V \rightarrow W$ lineal. Demostrar que $T \circ \phi$ es multilineal.
- 6) Demostrar que $\phi : (C^\infty(I))^n \rightarrow C^\infty(I)$ dada por $\phi(f_1, \dots, f_n) = (f_1 \cdots f_n)'$ es una aplicación multilineal.
- 7) Si $C[a, b]$ es el álgebra de las funciones reales continuas en el intervalo $[a, b]$, demostrar que la aplicación $\phi : (C[a, b])^n \rightarrow C[a, b]$ dada por

$$\phi(f_1, \dots, f_n) = \int_a^b f_1 \cdots f_n$$

es multilineal.

Solución. 1) Es consecuencia inmediata de la definición de aplicación multilineal.

2) En efecto,

$$\begin{aligned} \phi(x + y, T) &= T(x + y) = T(x) + T(y) = \phi(x, T) + \phi(y, T), \\ \phi(\alpha x, T) &= T(\alpha x) = \alpha T(x) = \alpha \phi(x, T). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\phi(x, T + S) &= (T + S)(x) = T(x) + S(x) = \phi(x, T) + \phi(x, S), \\ \phi(x, \alpha T) &= (\alpha T)(x) = \alpha T(x) = \alpha \phi(x, T).\end{aligned}$$

3) Usando conocidas propiedades de los determinantes,

$$\begin{aligned}\phi(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) &= \det[v_1 \dots v_i + v'_i \dots v_n] \\ &= \det[v_1 \dots v_i \dots v_n] + \det[v_1 \dots v'_i \dots v_n] \\ &= \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \phi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n).\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\phi(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) &= \det[v_1 \dots \alpha v_i \dots v_n] \\ &= \alpha \det[v_1 \dots v_i \dots v_n] = \alpha \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n).\end{aligned}$$

4) Usando las conocidas propiedades de un álgebra,

$$\begin{aligned}\phi(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) &= v_1 \dots (v_i + v'_i) \dots v_n \\ &= v_1 \dots v_i \dots v_n + v_1 \dots v'_i \dots v_n \\ &= \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \phi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n). \\ \phi(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) &= v_1 \dots (\alpha v_i) \dots v_n \\ &= \alpha(v_1 \dots v_i \dots v_n) = \alpha \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n).\end{aligned}$$

5) Tenemos $T \circ \phi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$. Entonces,

$$\begin{aligned}(T \circ \phi)(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) &= T[\phi(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n)] \\ &= T[\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \phi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)] \\ &= T[\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)] + T[\phi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)] \\ &= (T \circ \phi)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + (T \circ \phi)(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n). \\ (T \circ \phi)(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) &= T[\phi(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n)] \\ &= T[\alpha \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)] = \alpha T[\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)] \\ &= \alpha(T \circ \phi)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n).\end{aligned}$$

6) Claramente, el operador derivación $D : C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I)$ es lineal, y la aplicación $\phi_1 : (C^\infty(I))^n \rightarrow C^\infty(I)$ dada por $\phi_1(f_1, \dots, f_n) = f_1 \cdot \dots \cdot f_n$ es multilinear según el apartado 4. Pero $\phi = D \circ \phi_1$ que según el apartado 5 es multilinear.

7) Claramente, el operador integración $\text{Int} : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ es lineal, y la aplicación $\phi_1 : (C[a, b])^n \rightarrow C[a, b]$ dada por $\phi_1(f_1, \dots, f_n) = f_1 \cdot \dots \cdot f_n$ es multilinear según el apartado 4. Pero $\phi = \text{Int} \circ \phi_1$ que según el apartado 5 es multilinear.

183. Espacio vectorial de las aplicaciones multilineales

Recordamos que si $X \neq \emptyset$ es un conjunto, V un espacio vectorial sobre el cuerpo K y V^X , el conjunto de las aplicaciones de X en V entonces, V^X es espacio vectorial sobre K con las operaciones habituales $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (suma) y $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ (producto por un escalar). Para $V_1, \dots, V_n, V$ espacios vectoriales sobre el cuerpo K denotamos por $\text{Mul}_K(V_1 \times \dots \times V_n, V)$ al conjunto de todas las aplicaciones multilineales de $V_1 \times \dots \times V_n$ en V . Si E y F son dos espacios vectoriales sobre el cuerpo K , se designa por $\text{Lin}_K(E, F)$ al espacio vectorial de las aplicaciones lineales $f : E \rightarrow F$.

- 1) Demostrar que $\text{Mul}_K(V_1 \times \dots \times V_n, V)$ es subespacio vectorial de $V^{V_1 \times \dots \times V_n}$.
- 2) Demostrar que si $n \geq 2$ se verifica

$$\text{Mul}_K(V_1 \times \dots \times V_n, V) \cap \text{Lin}_K(V_1 \times \dots \times V_n, V) = \{0\}.$$

Solución. 1) La aplicación nula es claramente multilineal. Si $\lambda, \mu \in K$ y $\phi, \varphi \in \text{Mul}_K(V_1 \times \dots \times V_n, V)$, entonces,

$$\begin{aligned} (\lambda\phi + \mu\varphi)(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) &= (\lambda\phi)(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) \\ &\quad + (\mu\varphi)(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) = \lambda\phi(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) \\ &\quad + \mu\varphi(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) = \lambda[\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \phi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)] \\ &\quad + \mu[\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \varphi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)] \\ &= [\lambda\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \mu\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)] \\ &\quad + [\lambda\phi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n) + \mu\varphi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)] \\ &= (\lambda\phi)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + (\mu\varphi)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) \\ &\quad + (\lambda\phi)(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n) + (\mu\varphi)(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n) \\ &= (\lambda\phi + \mu\varphi)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + (\lambda\phi + \mu\varphi)(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n), \end{aligned}$$

y se satisface la primera condición de aplicación multilineal. Ahora, y para todo $\alpha \in K$,

$$\begin{aligned} (\lambda\phi + \mu\varphi)(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) &= (\lambda\phi)(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) \\ &\quad + (\mu\varphi)(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) = \lambda\phi(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) \\ &\quad + \mu\varphi(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) = \alpha\lambda\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \alpha\mu\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) \\ &= \alpha[\lambda\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \mu\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha[(\lambda\phi)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + (\mu\varphi)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)] \\
&= \alpha(\lambda\phi + \mu\varphi)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n).
\end{aligned}$$

La aplicación $\lambda\phi + \mu\varphi$ es por tanto multilinear. Concluimos que $\text{Mul}_K(V_1 \times \dots \times V_n, V)$ es subespacio vectorial de $V^{V_1 \times \dots \times V_n}$.

2) Fijemos $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y sea $\phi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow V$ multilinear y lineal. Por ser multilinear se verifica

$$\phi(v_1, \dots, v_i + v_i, \dots, v_n) = \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

Por ser lineal, se verifica

$$\phi(v_1, \dots, v_i + v_i, \dots, v_n) = \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \phi(0, \dots, v_i, \dots, 0).$$

De las dos relaciones anteriores, $\phi(v_1, \dots, v_n) = \phi(0, \dots, v_i, \dots, 0)$. De nuevo, por ser ϕ lineal,

$$\phi(v_1, \dots, v_n) = \phi\left(\sum_{i=1}^n (0, \dots, v_i, \dots, 0)\right) = \sum_{i=1}^n \phi(0, \dots, v_i, \dots, 0)$$

Restando a la última igualdad la $\phi(v_1, \dots, v_n) = \phi(0, \dots, v_i, \dots, 0)$, obtenemos $\phi(v_1, \dots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \dots, v_n) = 0$. Ahora para $n \geq 2$, al ser v_i arbitrario también lo es el subíndice i por tanto para todo $(v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \dots \times V_n$ tenemos $\phi(v_1, \dots, v_n) = \phi(0, v_2, \dots, v_n) + \phi(v_1, 0, \dots, 0) = 0 + 0 = 0$.

184. Problema de la aplicación universal

Vimos que una manera de construir aplicaciones multilineales sobre $V_1 \times \dots \times V_n$ es elegir una aplicación multilinear fija de $V_1 \times \dots \times V_n$ sobre V y luego componerla con varias aplicaciones lineales de V en otro espacio vectorial. Se plantea la siguiente pregunta: ¿podemos con una adecuada elección de V construir todas las aplicaciones multilineales sobre $V_1 \times \dots \times V_n$ de esta manera?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y nos llevará a construir el producto tensorial de los espacios $V_1, \dots, V_n$. De forma más precisa, planteamos el siguiente problema, llamado *problema de la aplicación universal para aplicaciones multilineales*.

Problema. Sean $V_1, \dots, V_n$ espacios vectoriales sobre K , ¿existe un espacio vectorial V sobre K y una aplicación multilinear $\phi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow V$ tal que para cada aplicación multilinear $\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ existe una única $T \in \text{Lin}_K(V, W)$ tal que $\varphi = T \circ \phi$?

En términos de diagrama conmutativo: ¿podemos construir una aplicación multilinear $\phi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow V$ con la propiedad de que para toda

$\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ multilinear existe una única $T \in \text{Lin}_K(V, W)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo?

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_n & \xrightarrow{\phi} & V \\ & \searrow \varphi & \swarrow T \\ & W & \end{array}$$

Nótese que cualquier solución al problema planteado consiste en un par (V, ϕ) con $\phi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow V$ multilinear. Antes de construir una solución al problema, demostremos que la solución es esencialmente única salvo isomorfismos.

Sean (V, ϕ) y (V', ϕ') dos soluciones al problema de la aplicación universal. Demostrar que existen dos isomorfismos $T_1 \in \text{Lin}_K(V, V')$ y $T_2 \in \text{Lin}_K(V', V)$ tales que

(a) $T_1 \circ T_2 = I_V$, $T_2 \circ T_1 = I_{V'}$.

(b) Los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_n & \xrightarrow{\phi} & V \\ & \searrow \phi' & \swarrow T_1 \\ & V' & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_n & \xrightarrow{\phi'} & V' \\ & \searrow \phi & \swarrow T_2 \\ & V & \end{array}$$

Solución. Como (V, ϕ) es solución al problema de la aplicación universal, existe un único $T_1 \in \text{Lin}_K(V, V')$ tal que $T_1 \circ \phi = \phi'$. Como (V', ϕ') también lo es, existe un único $T_2 \in \text{Lin}_K(V', V)$ tal que $T_2 \circ \phi' = \phi$. Esto demuestra que los dos diagramas dados son conmutativos. Por otra parte,

$$(T_2 \circ T_1) \circ \phi = T_2 \circ (T_1 \circ \phi) = T_2 \circ \phi' = \phi,$$

lo cual implica que el siguiente diagrama también es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_n & \xrightarrow{\phi} & V \\ & \searrow \phi & \swarrow T_2 \circ T_1 \\ & V & \end{array}$$

Si sustituimos $T_2 \circ T_1$ por I_V , el anterior diagrama también es conmutativo. Pero al ser (V, ϕ) es solución al problema, sólo hay una aplicación lineal tal que dicho diagrama es conmutativo lo cual implica que $T_2 \circ T_1 = I_V$. De manera análoga se demuestra que $T_1 \circ T_2 = I_{V'}$.

185. Espacio vectorial producto

Vamos a construir el espacio vectorial producto de una colección cualquiera de espacios vectoriales. Sea Δ un conjunto no vacío de índices y $\{V_i : i \in \Delta\}$ una colección de espacios vectoriales sobre el cuerpo K . El conjunto producto cartesiano de los V_i se define según sabemos como

$$V = \prod_{i \in \Delta} V_i = \{f : \Delta \rightarrow \bigcup_{i \in \Delta} V_i : f \text{ es aplicación con } f(i) \in V_i \forall i \in \Delta\}.$$

Demostrar que V es espacio vectorial con las operaciones:

Suma. Para todo $f, g \in V$, $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$

Ley externa. Para todo $\alpha \in K$ y para todo $f \in V$, $(\alpha f)(i) = \alpha f(i)$.

Solución. 1) Veamos que $(V, +)$ es grupo abeliano.

Interna. Si $f, g \in V$, para todo $i \in \Delta$ se verifica $f(i) \in V_i$ y $g(i) \in V_i$ con lo cual $(f + g)(i) = f(i) + g(i) \in V_i$ luego $f + g \in V$.

Asociativa. Para todo $f, g, h \in V$ y para todo $i \in \Delta$,

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(i) &= (f + g)(i) + h(i) = (f(i) + g(i)) + h(i) \\ &= f(i) + (g(i) + h(i)) = f(i) + (g + h)(i) = (f + (g + h))(i) \\ &\Rightarrow (f + g) + h = f + (g + h). \end{aligned}$$

Conmutativa. Para todo $f, g \in V$ y para todo $i \in \Delta$,

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i) = g(i) + f(i) = (g + f)(i) \Rightarrow f + g = g + f.$$

Existencia de elemento neutro. Sea la aplicación $f_0(i) = 0$ para todo $i \in \Delta$. Claramente $f_0 \in V$ y para toda $f \in V$ y para todo $i \in \Delta$,

$$(f + f_0)(i) = f(i) + f_0(i) = f(i) + 0 = f(i) \Rightarrow f + f_0 = f,$$

con lo cual f_0 es elemento neutro para la suma.

Existencia de elemento simétrico. Sea la aplicación $f \in V$ y definimos la aplicación $-f$ como $(-f)(i) = -f(i)$ para todo $i \in \Delta$. Claramente $-f \in V$ y además

$$(f + (-f))(i) = f(i) + (-f)(i) = f(i) - f(i) = 0 \forall i \in \Delta \Rightarrow f + (-f) = f_0,$$

con lo cual $-f$ es elemento simétrico de f para la suma.

2) Veamos que se cumplen los cuatro axiomas de ley externa.

(a) Para todo $f, g \in V$ para todo $\alpha \in K$ y para todo $i \in \Delta$,

$$\begin{aligned} [\alpha(f+g)](i) &= \alpha(f+g)(i) = \alpha(f(i) + g(i)) = \alpha f(i) + \alpha g(i) \\ &= (\alpha f)(i) + (\alpha g)(i) = (\alpha f + \alpha g)(i) \Rightarrow \alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g. \end{aligned}$$

(b) Para todo $f \in V$ para todo $\alpha, \beta \in K$ y para todo $i \in \Delta$,

$$\begin{aligned} [(\alpha + \beta)f](i) &= (\alpha + \beta)f(i) = \alpha f(i) + \beta f(i) = (\alpha f)(i) + (\beta f)(i) \\ &= (\alpha f + \beta f)(i) \Rightarrow (\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f. \end{aligned}$$

(c) Para todo $f \in V$ para todo $\alpha, \beta \in K$ y para todo $i \in \Delta$,

$$\begin{aligned} [(\alpha\beta)f](i) &= (\alpha\beta)f(i) = \alpha[\beta f(i)] = \alpha[(\beta f)(i)] \\ &= [\alpha(\beta f)](i) \Rightarrow (\alpha\beta)f = \alpha(\beta f). \end{aligned}$$

(d) Para todo $f \in V$ y para todo $i \in \Delta$,

$$(1f)(i) = 1f(i) = f(i) \Rightarrow 1f = f.$$

186. Espacio suma directa externa

Sea Δ un conjunto no vacío de índices, $\{V_i : i \in \Delta\}$ una colección de espacios vectoriales sobre el cuerpo K y $V = \prod_{i \in \Delta} V_i$ el correspondiente espacio vectorial producto. Se define la *suma directa externa* de los espacios V_i como

$$\bigoplus_{i \in \Delta} V_i = \{f \in V : f(i) = 0 \text{ salvo un número finito de índices } i \in \Delta\}.$$

Demostrar que la suma directa externa de los espacios V_i es subespacio de V .

Solución. El vector nulo de f_0 de V cumple $f_0(i) = 0$ para todo $i \in \Delta$ luego lo cumple salvo el número finito nulo de subíndices de Δ , es decir $f_0 \in \bigoplus_{i \in \Delta} V_i$. Si $f, g \in \bigoplus_{i \in \Delta} V_i$, entonces existen subconjuntos finitos Δ_1 y Δ_2 de Δ tales que

$$\begin{aligned} f(i) &= 0 \text{ si } i \in \Delta - \Delta_1, & f(i) &\neq 0 \text{ si } i \in \Delta_1, \\ g(i) &= 0 \text{ si } i \in \Delta - \Delta_2, & g(i) &\neq 0 \text{ si } i \in \Delta_2. \end{aligned}$$

Entonces, si $\alpha, \beta \in K$ se verifica

$$i \in (\Delta - \Delta_1) \cap (\Delta - \Delta_2) \Rightarrow (\alpha f + \beta g)(i) = \alpha f(i) + \beta g(i) = 0$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}(\Delta - \Delta_1) \cap (\Delta - \Delta_2) &= (\Delta \cap \Delta_1^c) \cap (\Delta \cap \Delta_2^c) \\ &= \Delta \cap \Delta_1^c \cap \Delta_2^c = \Delta_1^c \cap \Delta_2^c = (\Delta_1 \cup \Delta_2)^c.\end{aligned}$$

Entonces, $(\alpha f + \beta g)(i) \neq 0$ a lo sumo en $\Delta_1 \cup \Delta_2$ que es un conjunto finito. Es decir, $\alpha f + \beta g \in \bigoplus_{i \in \Delta} V_i$.

Sea ahora $V_i = K$ para todo $i \in K$ y llamemos $U = \bigoplus_{i \in \Delta} K$, es decir la suma directa externa consta ahora de $|\Delta|$ copias de K . Para todo $i \in \Delta$ definimos el vector $\delta_i \in U$ de la forma $\delta_i(j) = 1$ si $j = i$ y $\delta_i(j) = 0$ si $j \neq i$. Es decir, $\delta_i(j) = \delta_{ij}$ (deltas de Kronecker).

187. Base del espacio suma directa externa

Demostrar que $B = \{\delta_i : i \in \Delta\}$ es base de $U = \bigoplus_{i \in \Delta} K$.

Solución. Veamos que B es sistema libre. Elijamos $S = \{\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_m}\} \subset B$ y sea

$$\alpha_1 \delta_{i_1} + \dots + \alpha_m \delta_{i_m} = 0 \quad \text{con} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K.$$

Para todo $i = i_k$ con $k = 1, \dots, m$ tenemos

$$(\alpha_1 \delta_{i_1} + \dots + \alpha_m \delta_{i_m})(i_k) = 0(i_k) \Rightarrow \alpha_k \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0.$$

Veamos que B es sistema generador. Si $f \in U$, existe un subconjunto finito $\Delta' = \{i_1, \dots, i_n\}$ de Δ tal que $f(i) = 0$ si $i \in \Delta - \Delta'$ y $f(i) = 1$ si $i \in \Delta_1$. Veamos que se verifica

$$f = f(i_1)\delta_{i_1} + \dots + f(i_n)\delta_{i_n}. \quad (*)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}i \in \Delta - \Delta' &\Rightarrow (f(i_1)\delta_{i_1} + \dots + f(i_n)\delta_{i_n})(i) = f(i_1)\delta_{i_1}(i) + \dots + f(i_n)\delta_{i_n}(i) \\ &= f(i_1) \cdot 0 + \dots + f(i_n) \cdot 0 = 0 = f(i).\end{aligned}$$

$$i \in \Delta' \Rightarrow (f(i_1)\delta_{i_1} + \dots + f(i_n)\delta_{i_n})(i) = f(i)\delta_i(i) = f(i) \cdot 1 = f(i).$$

en consecuencia, se verifica la igualdad (*).

188. Solución al problema de la aplicación universal

Supongamos que el conjunto de índices Δ es un espacio vectorial. Entonces, tiene sentido en el espacio suma directa externa $U = \bigoplus_{i \in \Delta} K$ considerar vectores de la forma

$$\delta_{(i_1+\dots+i_n)} - \delta_{i_1} - \dots - \delta_{(i_1+\dots+i_n)}, \quad \delta_{\alpha i} - \alpha \delta_i.$$

Sean ahora $V_1, \dots, V_n$ espacios vectoriales sobre el cuerpo K y por simplicidad de notación, llamemos $Z = V_1 \times \dots \times V_n$. Consideremos

$$U = \bigoplus_{(v_1, \dots, v_n) \in Z} K$$

es decir, U es la suma directa externa de $|Z|$ copias de K . Consideremos el subespacio U_0 de U generado por vectores de la forma

$$\begin{aligned} &\delta_{(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n)} - \delta_{(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)} - \delta_{(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)}, \\ &\delta_{(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n)} - \alpha \delta_{(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)}. \end{aligned} \quad (188.0.1)$$

en donde i varía de 1 a n , y α recorre K . Por último, Consideremos el espacio vectorial cociente $V = U/U_0$ y la aplicación

$$\phi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow V, \quad \phi(v_1, \dots, v_n) = \delta_{(v_1, \dots, v_n)} + U_0.$$

Demostrar que el par (V, ϕ) es solución al problema de la aplicación universal.

Solución. Veamos que la aplicación ϕ es multilineal. Dado que

$$\begin{aligned} &\delta_{(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n)} - \delta_{(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)} - \delta_{(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)} \in U_0, \\ &\delta_{(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n)} - \alpha \delta_{(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)} \in U_0, \end{aligned}$$

y por definición de espacio cociente, podemos escribir

$$\begin{aligned} \phi(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) &= \delta_{(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n)} + U_0 \\ &= \left(\delta_{(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)} + \delta_{(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)} \right) + U_0 \\ &= \left(\delta_{(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)} + U_0 \right) + \left(\delta_{(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)} + U_0 \right) \\ &= \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \phi(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n). \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}\phi(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) &= \delta_{(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n)} + U_0 \\ &= \alpha \delta_{(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)} + U_0 \\ &= \alpha (\delta_{(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)} + U_0) \\ &= \alpha \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n),\end{aligned}$$

y por tanto ϕ es multilinear.

Sea $\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ una aplicación multilinear. Tenemos que demostrar que existe una única aplicación lineal $T : V \rightarrow W$ tal que $T \circ \phi = \varphi$. Sabemos que $B = \{\delta_{(v_1, \dots, v_n)} : (v_1, \dots, v_n) \in Z\}$ es base de U y por tanto, existe una única aplicación lineal $T_0 : U \rightarrow W$ tal que $T_0(\delta_{(v_1, \dots, v_n)}) = \varphi(v_1, \dots, v_n)$ para todo $(v_1, \dots, v_n) \in Z$. Como φ es multilinear, anula a los generadores 188.0.1 de U_0 y por tanto $U_0 \subset \ker T_0$. Por un conocido teorema de isomorfía, T_0 induce una aplicación lineal $T : U/U_0 \rightarrow W$ tal que

$$T(\delta_{(v_1, \dots, v_n)} + U_0) = T_0(\delta_{(v_1, \dots, v_n)}) = \varphi(v_1, \dots, v_n),$$

para todo $(v_1, \dots, v_n) \in Z$. Dado que $\phi(v_1, \dots, v_n) = \delta_{(v_1, \dots, v_n)} + U_0$, se verifica $T \circ \phi = \varphi$.

Por último, supongamos que $T' : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal que verifica $T' \circ \phi = \varphi$. Tenemos que demostrar que $T' = T$. Dado que $T' \circ \phi = \phi$, se verifica $T' = T$ sobre $\text{Im } \phi$. Pero de la construcción de V y ϕ es $\text{Im } \phi = V$ y por tanto $T' = T$.

189. Concepto de espacio topológico (I)

1) *Definición.* Si X es un conjunto no vacío, se llama *topología* en X a cualquier colección T de subconjuntos de X que satisface los axiomas:

- (1) $\emptyset, X \in T$.
- (2) Si A y B son elementos de T , entonces $A \cap B \in T$.
- (3) Si $\{A_i : i \in I\}$ es una familia de elementos de T , entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$.

A los elementos de T se les llama *conjuntos abiertos* y al par (X, T) , *espacio topológico*. Si no ha lugar a confusiones, al espacio topológico (X, T) se le designará simplemente por X .

Se considera el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Demostrar que T es topología en X , siendo $T = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$.

2) Se considera el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Demostrar que T no es topología en X , siendo $T = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$.

3) Se considera el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Demostrar que T no es topología en X , siendo $T = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}\}$.

- 4) Sea $X \neq \emptyset$ y $T = P(X)$ (conjunto de las partes de X). Demostrar que T es topología en X . Se la llama *topología discreta*.
- 5) Sea $X \neq \emptyset$ y $T = \{\emptyset, X\}$ Demostrar que T es topología en X . Se la llama *topología indiscreta*.
- 6) Sea $X \neq \emptyset$ y $T = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : A^c \text{ es finito}\}$. Demostrar que T es topología en X . Se la llama *topología de los complementos finitos*.

Solución. 1) Los conjuntos $\emptyset$ y X pertenecen a T y es fácil comprobar que se verifican las otras dos condiciones de topología.

2) $\{1, 3, 4\}$ y $\{2, 3, 4\}$ pertenecen a T , sin embargo $\{1, 3, 4\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \notin T$.

3) $\{1, 3, 4\}$ y $\{1, 2, 4, 5\}$ pertenecen a T , sin embargo $\{1, 3, 4\} \cap \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 4\} \notin T$.

4) $\emptyset$ y X pertenecen a $P(X)$. Por otra parte sabemos $P(X)$ es cerrado con respecto a uniones e intersecciones arbitrarias, en consecuencia $T = P(X)$ es topología en X .

5) $\emptyset$ y X pertenecen a T . Por otra parte es inmediato verificar las otras dos condiciones de topología.

6) $\emptyset \in T$ por definición de T y $X^c = \emptyset$ que es finito, luego $X \in T$. Si $A, B \in T$ entonces, si uno de ellos es vacío, $A \cap B = \emptyset \in T$. Si ninguno de ellos es vacío, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ y al ser A^c y B^c finitos $A^c \cup B^c$ también lo es, luego $A \cap B \in T$. Sea ahora una familia $\{A_i : i \in I\}$ de elementos de T . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que todos son no vacíos pues si algunos lo fueran, se pueden suprimir y la unión $\bigcup_{i \in I} A_i$ no varía. Tenemos $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$ y este conjunto es finito al estar contenido en cada A_i^c que es finito. Por tanto, $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$.

190. Concepto de espacio topológico (II)

- 1) Sea X un conjunto y $p \in X$ fijo. Demostrar que $T = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X : p \in A\}$ es una topología en X . Se la llama *topología del punto particular*.
- 2) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se define $S_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$. Demostrar que $T = \{\emptyset\} \cup \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una topología en $\mathbb{N}$. Determinar todos los abiertos que contienen al número natural n_0 .
- 3) Demostrar que $T = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{I_q : q \in \mathbb{Q}\}$ con $I_q = (0, +\infty)$ no es una topología en $\mathbb{R}$.
- 4) Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto e (Y, T') un espacio topológico. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación. Demostrar que $T = \{f^{-1}(G) : G \in T'\}$ es topología en X .
- 5) Sea (X, T) un espacio topológico tal que para todo $x \in X$ el conjunto unitario $\{x\}$ es abierto. Demostrar que T es la topología discreta.
- 6) Sea X un conjunto infinito y T una topología sobre X en la cual todos los

subconjuntos infinitos de X son abiertos. Demostrar que T es la topología discreta.

Solución. 1) $\emptyset \in T$ por definición de T y $p \in X$ por tanto, $X \in T$. Si A y B son abiertos y alguno de ellos es vacío, $A \cap B = \emptyset$, que es abierto. Si ambos son no vacíos, ambos contienen a p y por tanto, $A \cap B$ también lo contiene, es decir $A \cap B$ es abierto. De la misma forma si $\{A_i\}$ es familia de abiertos, podemos suponer sin pérdida de generalidad que todos son no vacíos pues si algunos lo fueran, se pueden suprimir y la unión $\bigcup_i A_i$ no varía. Entonces $p \in A_i$ para todo i con lo cual $p \in \bigcup_i A_i$ y por tanto $\bigcup_i A_i$ es abierto.

2) $\emptyset \in T$ por definición de T y $\mathbb{N} = S_0 \in T$. Si $A, B \in T$ entonces, si uno de ellos es vacío, $A \cap B = \emptyset \in T$. Si ninguno de ellos es vacío, entonces $A = S_m$ y $B = S_k$ para ciertos m, k números naturales y $S_m \cap S_k = S_{\max\{m, k\}} \in T$. Sea una familia $\{A_i : i \in I\}$ de elementos de T . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que todos son no vacíos pues si algunos lo fueran, se pueden suprimir y la unión de los A_i no varía. Entonces, la unión de los A_i es de la forma $\bigcup_{i \in I \subset \mathbb{N}} S_i = S_{\min\{i : i \in I\}} \in T$. Es claro que los abiertos que contienen a n_0 son $S_0, S_1 S_2, \dots, S_{n_0}$.

3) Consideremos la familia de elementos de T dada por $\{I_q : q > \sqrt{2}\}$. Es claro que su unión es $\bigcup_{q > \sqrt{2}} I_q = (\sqrt{2}, +\infty)$ y por tanto no pertenece a T pues $\sqrt{2}$ es irracional.

4) $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ y $X = f^{-1}(Y)$ con lo cual $\emptyset, X \in T$. Si $A, B \in T$ existen $G_1, G_2 \in T'$ tales que $A = f^{-1}(G_1)$ y $B = f^{-1}(G_2)$. Entonces, $A \cap B = f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2) = f^{-1}(G_1 \cap G_2)$. Pero $G_1 \cap G_2 \in T'$ por ser T' topología, luego $A \cap B \in T$. Si $\{A_i : i \in I\}$ es una familia de elementos de T , existen $G_i \in T'$ tales que $A_i = f^{-1}(G_i)$. Entonces, $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} G_i)$. Pero $\bigcup_{i \in I} G_i \in T'$ por ser T' topología, luego $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$.

5) Si $A \subset X$ entonces, $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ que es unión de abiertos y por tanto abierto. Nótese que también es válido para $A = \emptyset$ pues sabemos que la unión de una familia vacía de conjuntos es el conjunto vacío.

6) Al ser X infinito, contiene a un subconjunto numerable, conjunto que será de la forma $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Llamemos $A = \{x_1, x_3, x_5, \dots\}$. Entonces, A y A^c son infinitos y para todo $x \in X$ se verifica $\{x\} = (A \cup \{x\}) \cap (A^c \cup \{x\})$. Pero $A \cup \{x\}$ y $A^c \cup \{x\}$ son infinitos y por tanto abiertos, con lo cual todo subconjunto unitario $\{x\}$ de X es abierto. Por el problema anterior concluimos que T es la topología discreta.

191. Concepto de espacio topológico (III)

1) Demostrar el siguiente teorema:

Teorema. Sea $\{T_i : i \in I\}$ una familia de topologías en un conjunto X . Entonces, la intersección $T = \bigcap_i T_i$ es también una topología en X .

2) Demostrar la unión de dos topologías en X no tiene por qué ser topología en X .

3) *Definición.* Sean T y T' dos topologías en X . Se dice que T es *menos fina* que T' o bien que T' es *más fina* que T , si $T \subset T'$. Dado un conjunto X no vacío, determinar la topología más fina y la menos fina que se pueden definir en X .

4) Demostrar el siguiente teorema:

Teorema. Sea X un conjunto no vacío y sea

$$\mathcal{T}(X) = \{T : T \text{ es topología en } X\} \subset P(P(X)).$$

Entonces, $(\mathcal{T}(X), \subset)$ es un conjunto ordenado con primer y último elemento. Si X es un conjunto con más de un elemento, $(\mathcal{T}(X), \subset)$ no está totalmente ordenado.

5) Sea X un conjunto no vacío y T una colección de subconjuntos de X . Demostrar que T es una topología en X si y sólo si se verifican los axiomas:

[1] $\emptyset, X \in T$.

(2) Si A y B son elementos de T , entonces $A \cap B \in T$.

(3') Si $\{A_i : i \in I\}$ es una familia de elementos de $T - \{\emptyset, X\}$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$.

6) Para cada entero positivo n se considera el intervalo abierto de la recta real $I_n = (-n, n)$. Demostrar que $(\mathbb{R}, T)$ es espacio topológico, en donde $T = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{I_n : n = 1, 2, \dots\}$.

Solución. 1) (1) Al ser T_i topología para todo i , $\emptyset$ y $X \in T_i$ para todo i , por tanto $\emptyset, X \in \bigcap_i T_i$.

(2) Si $A, B \in \bigcap_i T_i$, entonces, $A, B \in T_i$ para todo i y al ser T_i topología, $A \cap B \in T_i$ para todo i luego $A \cap B \in \bigcap_i T_i$.

(3) Si $\{A_j : j \in J\}$ es familia de elementos de $\bigcap_i T_i$, entonces para todo j , $A_j \in T_i$ para todo i . Al ser T_i topología, $\bigcup_j A_j \in T_i$ para todo i , luego $\bigcup_j A_j \in \bigcap_i T_i$.

2) Sea $X = \{a, b, c\}$. Es inmediato comprobar que $T_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ y $T_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ son topologías en X . Sin embargo $T_1 \cup T_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ no es topología pues $\{a\}$ y $\{b\}$ pertenecen a $T_1 \cup T_2$ sin embargo, $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin T_1 \cup T_2$.

3) Claramente la menos fina es la indiscreta y la más fina, la discreta.

4) $\mathcal{T}(X)$ es un conjunto ordenado por la inclusión $\subset$ por ser subconjunto de $P(P(X))$ que está ordenado por $\subset$. Claramente la topología indiscreta T_I es el primer elemento de $\mathcal{T}(X)$ y la discreta T_D es el último elemento. Si X contiene a los elementos distintos x_1 y x_2 , entonces $T_1 = \{\emptyset, X, \{x_1\}\}$ y $T_2 = \{\emptyset, X, \{x_2\}\}$ son topologías en X no comparables.

5) Si T es topología se verifican trivialmente los axiomas (1), (2) y (3'). Si se verifican los axiomas (1), (2) y (3'), trivialmente se verifican los axiomas (1) y (2) de topología. Falta pues demostrar que se verifica el (3). En efecto, sea $\{A : A \in \mathcal{A}\}$ una familia de elementos de T . Si $X \in \mathcal{A}$ entonces, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$ que pertenece a T por (1). Si $X \notin \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A} - \{X\}} A$. Dado que el conjunto vacío no añade ningún elemento a la unión, podemos expresar

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A} - \{X\}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A} - \{X, \emptyset\}} A,$$

y por (3'), $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in T$.

6) Por hipótesis. $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ pertenecen a T . Sean $A, B \in T$. Los elementos de T están totalmente ordenados por inclusión: $\emptyset \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset \mathbb{R}$ y por tanto, la intersección de dos elementos de T pertenece a T . Usamos el apartado anterior. Sea $\{A_i : i \in I\}$ una familia de elementos de $T - \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Cada i es de la forma $A_i = I_{n_i}$ con n_i entero positivo. Pero en este caso, si el conjunto $\{n_i : i \in I\}$ está acotado superiormente, $\bigcup_{n_i \in I} I_{n_i} = I_{\max\{n_i : i \in I\}} \in T$ y si no está acotado, $\bigcup_{n_i \in I} I_{n_i} = \mathbb{R} \in T$.

192. Punto de acumulación (I)

Sea X un espacio topológico. Un punto $x \in X$ se dice que es *punto de acumulación* o *punto límite* de un subconjunto A de X si para todo abierto G que contiene a x se verifica $(G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto de los puntos de acumulación de A se le denota por A' y se le llama *conjunto derivado* de A .

1) Se considera el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con la topología

$$T = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}\}.$$

Determinar el conjunto derivado de $A = \{1, 2, 3\}$.

2) Sea X el espacio topológico indiscreto, es decir con la topología indiscreta T_I . Determinar el conjunto derivado de cualquier subconjunto A de X .

3) Sea X el espacio topológico discreto, es decir con la topología discreta T_D . Determinar el conjunto derivado de cualquier subconjunto A de X .

4) Sean A y B dos subconjuntos de un espacio topológico X . Demostrar que $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$.

Solución. 1) Analicemos cada elemento de X :

(a) Punto $x = 1$. $G = \{1\}$ es abierto que contiene a 1, pero $(G - \{1\}) \cap A = \emptyset$, luego 1 no es punto de acumulación de A .

(b) Punto $x = 2$. Los abiertos G que contienen a 2 son X y $\{2, 3, 4, 5\}$ y en ambos casos $(G - \{2\}) \cap A \neq \emptyset$, luego 2 es punto de acumulación de A .

(c) Punto $x = 3$. $G = \{3, 4\}$ es abierto que contiene a 3 pero $(G - \{3\}) \cap A = \emptyset$, luego 3 no es punto de acumulación de A .

(d) Punto $x = 4$. Los abiertos G que contienen a 4 son X , $\{3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, y $\{2, 3, 4, 5\}$ y en todos los casos $(G - \{4\}) \cap A \neq \emptyset$, luego 4 es punto de acumulación de A .

(e) Punto $x = 5$. Los abiertos G que contienen a 5 son X y $\{2, 3, 4, 5\}$ y en ambos casos $(G - \{5\}) \cap A \neq \emptyset$, luego 5 es punto de acumulación de A . Concluimos que el conjunto derivado de A es $A' = \{2, 4, 5\}$.

2) El único abierto que contiene a algún punto es $G = X$. Si $A = \emptyset$, entonces para todo $x \in X$ se verifica $(G - \{x\}) \cap A = \emptyset$, luego $A = \emptyset$ no tiene puntos de acumulación. Si $A = \{a\}$ consta de un único elemento se verifica $(G - \{a\}) \cap A = \emptyset$ y $(G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ si $x \neq a$, luego los puntos de acumulación son todos los $x \in X$ distintos de a . Si $A = \{a, b, \dots\}$ consta de más de un punto, entonces $(G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ y los puntos de A son todos los de X . En consecuencia,

$$A' = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset \\ X - \{a\} & \text{si } A = \{a\} \\ X & \text{si } A \text{ contiene más de un punto.} \end{cases}$$

3) Sea $A \subset X$. Para todo $x \in X$ el conjunto $G = \{x\}$ es abierto que contiene a x y se verifica $(G - \{x\}) \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset$ luego A no tiene puntos de acumulación. Concluimos que $A' = \emptyset$ para todo $A \subset X$.

4) Si $x \in A'$, para todo abierto G que contiene a x se verifica $(G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Pero al cumplirse $A \subset B$, también $(G - \{x\}) \cap B \neq \emptyset$ lo cual implica que $x \in B'$. Es decir, $A' \subset B'$.

193. Punto de acumulación (II)

1) Sea A un subconjunto de un espacio topológico X . Demostrar que $x \in X$ no es punto de acumulación de A si y sólo si existe un abierto G tal que $x \in G$ y $G \cap A \subset \{x\}$.

2) Sean A y B dos subconjuntos de un espacio topológico X . Demostrar que $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

3) Sean A y B dos subconjuntos de un espacio topológico X . Demostrar que

$$(A \cap B)' \subset A' \cap B'.$$

4) Encontrar un caso en el que no se verifique la igualdad $(A \cap B)' = A' \cap B'$.

5) Sean T y T' dos topologías en X con T' más fina que T y sea $A \subset X$. Demostrar que si x es punto de acumulación de A con respecto a T' , también lo es con respecto a T . Construir un contraejemplo que demuestre que el recíproco es falso.

Solución. 1) Tenemos las siguientes equivalencias:

x no es punto de acumulación de A

$$\Leftrightarrow \exists G \text{ abierto con } x \in G \text{ y } (G - \{x\}) \cap A = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \exists G \text{ abierto con } x \in G \text{ y o bien } G \cap A = \emptyset \text{ o bien } G \cap A = \{x\}$$

$$\Leftrightarrow \exists G \text{ abierto con } x \in G \text{ y } G \cap A \subset \{x\}.$$

2) Veamos que $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. Se verifica $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$ y por apartado 4) del problema anterior, $A' \subset (A \cup B)'$ y $B' \subset (A \cup B)'$ por tanto, $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. Veamos ahora que $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$. Si $x \notin A' \cup B'$, entonces $x \notin A'$ y $x \notin B'$. Por el apartado anterior, existen abiertos G, H tales que $x \in G$, $G \cap A \subset \{x\}$, $x \in H$, $H \cap B \subset \{x\}$. El conjunto $G \cap H$ es abierto y $x \in G \cap H$. Además,

$$(G \cap H) \cap (A \cup B) = (G \cap H \cap A) \cup (G \cap H \cap B) \subset \{x\} \cup \{x\} = \{x\},$$

lo cual implica que $x \notin (A \cup B)'$. Es decir, $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$.

3) Si $x \in (A \cap B)'$ entonces, para todo abierto G que contiene a x se verifica $(G - \{x\}) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Ahora bien, tanto $(G - \{x\}) \cap A$ como $(G - \{x\}) \cap B$ contienen a $(G - \{x\}) \cap (A \cap B)$ y por tanto, son no vacíos con lo cual $x \in A'$ y $x \in B'$, esto es, $x \in A' \cap B'$.

4) Consideremos en el conjunto con tres elementos $X = \{a, b, c\}$ la topología indiscreta. Elijamos $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$. Según el apartado 2) del problema anterior, $A' = \{b, c\}$ y $B' = \{a, c\}$. Entonces, $(A \cap B)' = \emptyset' = \emptyset$ y $A' \cap B' = \{c\}$. Es decir, no se verifica la igualdad.

5) Si x es punto de acumulación de A con respecto a T' entonces, para todo $G \in T'$ tal que $x \in G$ se verifica $(G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Por hipótesis $T \subset T'$, luego la relación $(G - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ también se verifica para todo $G \in T$ con $x \in G$ y por tanto, x es punto de acumulación de A con respecto a T . Para demostrar que el recíproco no es en general cierto, elijamos $X = \{a, b\}$, la topología indiscreta T y la discreta T' , con lo cual T' es más fina que T . Si $A = \{a\}$, es inmediato verificar que b es punto de acumulación de A con respecto a T pero no con respecto a T' .

194. Los grupos $\mathbb{R}^\times$ y $\mathbb{C}^\times$ no son isomorfos

Demostrar que los grupos multiplicativos $\mathbb{R}^\times$ y $\mathbb{C}^\times$ no son isomorfos.

Solución. Supongamos que existe un isomorfismo $f : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{R}^\times$. Tenemos $f(i^2) = f(-1)$. Ahora bien,

$$1 = f(1) = f[(-1)(-1)] = f(-1)f(-1) = f(-1)^2 \Rightarrow f(-1) = \pm 1.$$

Al ser f inyectiva y $f(1) = 1$, ha de ser necesariamente $f(-1) = -1$. Es decir, $f(i^2) = -1$. Pero al ser f homomorfismo, $f(i^2) = f(i)^2$, con lo cual queda $f(i)^2 = -1$. Esto es absurdo al ser $f(i)$ real. Concluimos que $\mathbb{R}^\times$ y $\mathbb{C}^\times$ no son isomorfos.

195. Extensión finita y algebraica

Sea K/k una extensión de cuerpos. Se dice que K es *extensión finita* de k si $[K : k]$ es finito. Se dice que K es *extensión infinita* de k si $[K : k] = \infty$. Se dice que K es *extensión algebraica* de k si todo $\alpha \in K$ es algebraico sobre k .

- 1) Demostrar que toda extensión finita K de k es algebraica.
- 2) Sea K/k una extensión de cuerpos. Demostrar que el conjunto A de los elementos $a \in K$ que son algebraicos sobre k es un cuerpo tal que $k \subset A \subset K$. Al cuerpo A se le llama *clausura algebraica* de k en K .
- 3) Sea la extensión $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ y sea A la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que $[A : \mathbb{Q}] = \infty$ (esto prueba que no toda extensión algebraica es finita).

Solución. 1) Si $[K : k] = \nu$ y $\alpha \in K$. Los $\nu + 1$ elementos $e = \alpha^0, \alpha, \dots, \alpha^\nu$ de K son linealmente dependientes sobre k y por tanto existen elementos $a_0, a_1, \dots, a_n$ de k no todos nulos tales que $a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0$ es decir, α es algebraico sobre k .

2) Sean $a, b \in A$. Por ser a algebraico sobre k la dimensión $[k(a) : k]$ es finita. Por ser b algebraico sobre k lo es sobre $k(a)$ y por tanto, la dimensión $[k(a)(b) : k(a)]$ es finita. En consecuencia $k(a, b) = k(a)(b)$ tiene dimensión finita sobre k , luego $k(a, b)$ es extensión algebraica de k . Al ser $a, b \in k(a, b)$ y $k(a, b)$ cuerpo, se verifica que $a + b$, ab y a^{-1} (si $a \neq 0$) son elementos de $k(a, b)$ y por tanto algebraicos sobre k . En consecuencia, $a, b \in A$ implica que $a + b$, ab y a^{-1} (si $a \neq 0$) son elementos de A , luego A es cuerpo y trivialmente se verifica $k \subset A \subset K$.

3) En efecto, los números $\sqrt[n]{2}$ son algebraicos para todo entero $n \geq 1$. El polinomio $f_n(x) = x^n - 2$ es mónico y anula a $\sqrt[n]{2}$. También es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ como inmediatamente se comprueba aplicando el criterio de Eisenstein con $p = 2$. Es decir, f_n es polinomio mínimo de $\sqrt[n]{2}$ sobre $\mathbb{Q}$ con lo cual $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) : \mathbb{Q}] = n$. Al ser n arbitrario, la extensión $A/\mathbb{Q}$ no puede ser finita.

196. Unicidad del cuerpo de ruptura

Sean $k(\alpha)$ y $k(\beta)$ cuerpos de ruptura de $f(x) \in k[x]$. Demostrar que $k(\alpha)$ y $k(\beta)$ son isomorfos.

Solución. Si $f(x) = a_mx^m + \dots + a_1x + a_0$, el polinomio $p(x) = (1/a_m)f(x)$ es irreducible en $k(x)$, mónico y $p(\alpha) = 0$ por tanto $p(x)$ es polinomio mínimo de α en la extensión $k(\alpha)/k$. Esto implica que $[k(\alpha) : k] = m$ y los elementos de $k(\alpha)$ son de la forma $c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{m-1}\alpha^{m-1}$ con los c_i en k determinados de manera única. De manera análoga, los elementos de $k(\beta)$ son de la forma $c_0 + c_1\beta + \dots + c_{m-1}\beta^{m-1}$ con los c_i en k determinados de manera única. Entonces, es inmediato comprobar que la aplicación $\Phi : k(\alpha) \rightarrow k(\beta)$ dada por $\Phi(c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{m-1}\alpha^{m-1}) = c_0 + c_1\beta + \dots + c_{m-1}\beta^{m-1}$ es un isomorfismo de cuerpos.

197. Un cuerpo de matrices isomorfo al de los complejos

- 1) Demostrar que el conjunto $\mathcal{A} = \{A_{(x,y)} = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\}$ es un cuerpo con las operaciones suma y producto habituales de matrices.
- 2) Demostrar que la aplicación $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$ dada por $f(x + iy) = A_{(x,y)}$ es un isomorfismo de cuerpos.

Solución. 1) Veamos que $\mathcal{A}$ es subanillo de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. En efecto, claramente $0 = A_{(0,0)} \in \mathcal{A}$. Para todo par de matrices $A_{(x,y)}$ y $A_{(x',y')}$ se verifica

$$A_{(x,y)} - A_{(x',y')} = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x' & y - y' \\ -(y - y') & x - x' \end{bmatrix}$$

y por tanto, $A_{(x,y)} - A_{(x',y')} = A_{(x-x', y-y')} \in \mathcal{A}$. Por otra parte,

$$A_{(x,y)}A_{(x',y')} = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx' - yy' & xy' + yx' \\ -(yx' + xy') & xx' - yy' \end{bmatrix}$$

y por tanto, $A_{(x,y)}A_{(x',y')} = A_{(xx'-yy', xy'+yx')}$ $\in \mathcal{A}$. Hemos demostrado que $\mathcal{A}$ es anillo. Es unitario pues $I = A_{(1,0)} \in \mathcal{A}$ y también conmutativo pues

$$A_{(x',y')}A_{(x,y)} = \begin{bmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'x - y'y & x'y + y'x \\ -(x'y + y'x) & x'x - y'y \end{bmatrix},$$

es decir $A_{(x',y')}A_{(x,y)} = A_{(x,y)}A_{(x',y')}$. Falta demostrar que todo $A_{(x,y)} \in \mathcal{A}$ con $(x, y) \neq (0, 0)$ tiene inverso en $\mathcal{A}$. En efecto, $\det A_{(x,y)} = x^2 + y^2 \neq 0$ y

por tanto $A_{(x,y)}$ es invertible siendo su inversa

$$(A_{(x,y)})^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} = A_{\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)} \in \mathcal{A}.$$

2) Para cualquier par de números complejos $x + iy$, $x' + iy'$:

$$\begin{aligned} f[(x + iy) + (x' + iy')] &= f[(x + x') + (y + y')i] = \begin{bmatrix} x + x' & y + y' \\ -(y + y') & x + x' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{bmatrix} = f(x + iy) + f(x' + iy'). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} f[(x + iy)(x' + iy')] &= f[(xx' - yy') + (xy' + yx')i] = \\ &= \begin{bmatrix} xx' - yy' & xy' + yx' \\ -(xy' + yx') & xx' - yy' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{bmatrix} = f(x + iy)f(x' + iy'). \end{aligned}$$

Al ser la imagen de f no trivial, f es homomorfismo entre los cuerpos $\mathbb{C}$ y $\mathcal{A}$. Su núcleo es:

$$\ker f = \{x + iy \in \mathbb{C} : f(x + iy) = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\} = \{0 + 0i\} = \{0\},$$

por tanto f es inyectiva. Por último, cualquier elemento de $\mathcal{A}$ se puede expresar en la forma:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = f(x + iy),$$

es decir f es sobreyectiva. Hemos demostrado pues que f es un isomorfismo entre los cuerpos $\mathbb{C}$ y $\mathcal{A}$.

198. Inverso en un cuerpo de ruptura

- 1) Sea $k(\xi)$ cuerpo de ruptura de un polinomio $f(x) \in k[x]$. Si $0 \neq \beta \in k(\xi)$, dar una fórmula para calcular β^{-1} en términos de una igualdad de Bezout.
 2) *Aplicación.* Sea $f(x) = x^3 - 3x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{Q}(\xi)$ cuerpo de ruptura de $f(x)$. Determinar el inverso en $\mathbb{Q}(\xi)$ de $\beta = \xi^4 + 2\xi^3 + 3$.

Solución. 1) Podemos expresar β en la forma $\beta = g(\xi)$ con $g(x) \in k[x]$ y $\text{grad } g(x) < \text{grad } f(x)$. Por la igualdad de Bezout, existen $A(x), B(x) \in k[x]$ tales que

$$A(x)f(x) + B(x)g(x) = D(x), \quad D(x) = \text{mcd } \{f(x), g(x)\}.$$

Pero $f(x)$ es irreducible y $\text{grad } g(x) < \text{grad } f(x)$, por tanto $D(x) = 1$. Sustituyendo x por ξ y teniendo en cuenta que $f(\xi) = 0$ queda $B(\xi)g(\xi) = 1$. Es decir, $\beta^{-1} = B(\xi)$.

2) Las únicas posibles raíces racionales de $f(x)$ son ± 1 pero $f(1) \neq 0$ y $f(-1) \neq 0$ y al ser de tercer grado, es irreducible en $\mathbb{Q}$. Dividiendo $x^4 + 2x^3 + 3$ entre $f(x)$ obtenemos como resto $g(x) = 3x^2 + 7x + 5$ con lo cual $\beta = 3\xi^2 + 7\xi + 5$. Tenemos $\text{mcd} \{f(x), g(x)\} = 1$ y aplicando el algoritmo de Euclides, obtenemos la igualdad de Bezout

$$\left(-\frac{7}{37}x + \frac{29}{111}\right)f(x) + \left(\frac{7}{111}x^2 - \frac{26}{111}x + \frac{28}{111}\right)g(x) = 1,$$

por tanto $\beta^{-1} = (7/111)\xi^2 - (26/111)\xi + 28/111$.

199. El conjunto de los números algebraicos es contable

Trabajamos en la extensión de cuerpos $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

- 1) Demostrar que el conjunto de los números algebraicos es contable.
- 2) Demostrar que el conjunto de los números trascendentes no es contable.

Solución. 1) El conjunto A de los números algebraicos se puede expresar en la forma: $A = \bigcup_{p \in P} R(p)$ en donde P representa el conjunto de los polinomios mónicos de $\mathbb{Q}[x]$ y $R(p)$ el conjunto de las raíces de p . Dado que para cada p el conjunto $R(p)$ es finito, bastará demostrar que P es contable. Pero $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ en donde P_n es el conjunto de los polinomios mónicos de grado n con coeficientes racionales. La aplicación

$$\mathbb{Q}^n \rightarrow P_n, \quad (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \mapsto x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

es claramente biyectiva y al ser $\mathbb{Q}^n$ contable, lo es P_n . Entonces P es unión contable de conjuntos contables y por tanto es contable.

2) Si T es el conjunto de los números trascendentes, tenemos $\mathbb{R} = A \cup T$. Si T fuera contable, al ser A contable también lo sería $\mathbb{R}$ lo cual es una contradicción.

200. Anillos $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

Sea $d \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$ y libre de cuadrados, es decir no es divisible por el cuadrado de ningún entero salvo el 1. Se define

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

- 1) Demostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es subanillo de $\mathbb{C}$.
- 2) Demostrar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es dominio de integridad.
- 3) Para todo $\alpha = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ se define el *conjugado* de α como $\bar{\alpha} = a - b\sqrt{d}$. Demostrar que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ se verifica $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$.
- 4) Para todo $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ se define la *norma* de α como $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$. Demostrar que N es función con valores enteros y multiplicativa.
- 5) Sea $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Demostrar que: $N(\alpha) = \pm 1 \Leftrightarrow \alpha$ es unidad en $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Solución. 1) Claramente $\emptyset \neq \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \subset \mathbb{C}$. Si $a + b\sqrt{d}, a' + b'\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, se verifica

$$(a + b\sqrt{d}) - (a' + b'\sqrt{d}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{d}$$

y al ser $a - a'$ y $b - b'$ enteros, $(a + b\sqrt{d}) - (a' + b'\sqrt{d}) \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Por otra parte

$$(a + b\sqrt{d})(a' + b'\sqrt{d}) = aa' + dbb' + (ab' + ba')\sqrt{d}$$

y al ser $aa' + dbb'$ y $ab' + ba'$ enteros, $(a + b\sqrt{d})(a' + b'\sqrt{d}) \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Concluimos pues que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es subanillo de $\mathbb{C}$.

2) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es conmutativo por serlo $\mathbb{C}$, es unitario pues $1 = 1 + 0\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ y es anillo de integridad por serlo $\mathbb{C}$, en consecuencia $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es dominio de integridad.

3) En efecto, si $\alpha = a + b\sqrt{d}$ y $\beta = a' + b'\sqrt{d}$,

$$\bar{\alpha}\bar{\beta} = (a - b\sqrt{d})(a' - b'\sqrt{d}) = aa' + dbb' - (ab' + ba')\sqrt{d},$$

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{aa' + dbb' + (ab' + ba')\sqrt{d}} = aa' + dbb' + (ab' - ba')\sqrt{d}.$$

4) Para todo $\alpha = a + b\sqrt{d}$, su norma es $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ tenemos

$$N(\alpha\beta) = (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = \alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta} = \alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} = N(\alpha)N(\beta).$$

5) $\Rightarrow$) Si $N(\alpha) = 1$, entonces $\alpha\bar{\alpha} = 1$ y por tanto α es unidad en $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Si $N(\alpha) = -1$, entonces $\alpha(-\bar{\alpha}) = 1$ y por tanto α es unidad en $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

$\Leftarrow$) Si $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es unidad, existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ tal que $\alpha\alpha^{-1} = 1$. Tomando normas, y usando que la norma es multiplicativa, $1 = N(1) = N(\alpha\alpha^{-1}) = N(\alpha)N(\alpha^{-1})$. Ahora bien, la norma es un número entero y por tanto $N(\alpha)$ ha de ser 1 o -1.

Fascículo 9

Monografías 201-225

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $\mathbb{K}^{n \times n}$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n con entradas en $\mathbb{K}$ y $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ fijas. Demostrar que

$$\det(A + X) = \det(B + X) \quad \forall X \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow A = B.$$

Solución. Sea $\mathcal{M} \subset \mathbb{K}^{n \times n}$ el conjunto de las matrices cuya primera fila es la opuesta de la primera fila de A . Entonces, para todo $X \in \mathcal{M}$ se verifica $\det(A + X) = 0$ y por tanto, también $\det(B + X) = 0$ para todo $X \in \mathcal{M}$. Veamos que necesariamente la primera fila de A es igual a la primera fila de B . En efecto, supongamos que no fueran iguales. Tendríamos entonces

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

con los $x_{ij} \in \mathbb{K}$ variables. Entonces,

$$B + X = \begin{bmatrix} b_{11} - a_{11} & \dots & b_{1n} - a_{1n} \\ b_{21} + x_{21} & \dots & b_{2n} + x_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} + x_{n1} & \dots & b_{nn} + x_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{con } b_{1k} - a_{1k} \neq 0 \text{ para algún } k$$

y las filas $F_2, \dots, F_n$ de $B + X$ podemos conseguir que sean las que queramos sin más que elegir convenientemente los elementos x_{ij} . Hemos supuesto que la primera fila de $B + X$ es no nula, con lo cual podemos encontrar $X \in \mathcal{M}$ tal que $\det(B + X) \neq 0$, lo cual es una contradicción. Podemos reproducir el mismo argumento para cualquier otra fila, de lo cual deducimos que $A = B$.

201. Teorema de la base de Hilbert

(a) Sea A anillo conmutativo y unitario. Demostrar que: A es noetheriano $\Rightarrow A[x]$ es noetheriano.

(b) Demostrar que para todo cuerpo k , el anillo de polinomios $k[x_1, \dots, x_n]$ es noetheriano.

Solución. (a) Por reducción al absurdo. Supongamos que existe un ideal $I \subset A[X]$ que no sea finitamente generado. Entonces, $I \neq \{0\}$. Sea $f_1(x) \in I$ de grado mínimo y sea $I_1 = \langle f_1(x) \rangle$. Entonces, $I_1 \subset I$ con $I_1 \neq I$. Elijamos $f_2(x) \in I - I_1$ de grado mínimo. Entonces, $I_2 = \langle f_1(x), f_2(x) \rangle \subset I$ con $I_2 \neq I$. Obtenemos así una sucesión de polinomios $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots$ y si el grado de $f_i(x)$ es d_i , entonces $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots$. Sea b_i el coeficiente principal de $f_i(x)$. Entonces, $\langle b_1 \rangle \subset \langle b_1, b_2 \rangle \subset \langle b_1, b_2, b_3 \rangle \subset \dots$ es cadena ascendente de ideales de A , y al ser A noetheriano la cadena se estabiliza es decir, existe un número natural m tal que $b_{m+1} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m$ para ciertos $a_1, \dots, a_m \in A$. Sea ahora

$$g_{m+1}(x) = f_{m+1}(x) - \sum_{i=1}^m a_i x^{d_{m+1}-d_i} f_i(x). \quad (*)$$

Desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} g_{m+1}(x) &= b_{m+1}x^{d_{m+1}} + \dots - \sum_{i=1}^m a_i x^{d_{m+1}-d_i} (b_i x^{d_i} + \dots) \\ &= \left(\sum_{i=1}^m a_i b_i \right) x^{d_{m+1}} + \dots - \left(\sum_{i=1}^m a_i b_i \right) x^{d_{m+1}} - \dots \end{aligned}$$

y por tanto el coeficiente de $x^{d_{m+1}}$ es nulo. Es decir, $g_{m+1}(x)$ tiene grado estrictamente menor que d_{m+1} . Por otra parte, $g_{m+1}(x) \notin I_m$ pues en caso contrario, y debido a la igualdad (*) tendríamos $f_{m+1}(x) \in I_m$ lo cual es una contradicción. Es decir, tenemos $g_{m+1}(x) \in I - I_m$ con grado $\deg g_{m+1}(x) < d_{m+1}$ lo cual contradice la minimalidad del grado de $f_{m+1}(x)$.

(b) Por inducción sobre n . Los únicos ideales de k son $\{0\}$ y k , por tanto k es noetheriano. Por el teorema anterior, $k[x_1]$ es noetheriano. Si $k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ es noetheriano entonces, por el teorema anterior $k[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$ es noetheriano. Pero $k[x_1, \dots, x_n]$ también es noetheriano pues es isomorfo al anillo $k[x_1, \dots, x_{n-1}][x_n]$.

202. Separación de puntos y espacio de Hausdorff

Sea $\mathcal{F} = \{f_i : X \rightarrow Y : i \in I\}$ una familia de aplicaciones entre los conjuntos X e Y . Se dice que $\mathcal{F}$ *separa puntos* si para todo par de puntos distintos x e y de X existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

(a) Demostrar que la familia $\mathcal{F} = \{f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sin nx : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ no separa puntos.

(b) Sea X un espacio topológico y $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ la clase de todas las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$. Demostrar que

$$\mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \text{ separa puntos} \Rightarrow X \text{ es espacio de Hausdorff.}$$

Solución. (a) Se verifica $f_n(0) = f_n(\pi) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, luego la familia no separa puntos.

(b) Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Por hipótesis $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ separa puntos, luego existe una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Como $\mathbb{R}$ es espacio de Hausdorff, existen abiertos disjuntos G y H de $\mathbb{R}$ tales que $f(x) \in G$, $f(y) \in H$. Por ser f continua, $f^{-1}(G)$ y $f^{-1}(H)$ son abiertos de X y además $x \in G$, $y \in H$. Por otra parte,

$$f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset,$$

lo cual implica que X es espacio de Hausdorff.

203. Caracterización de conjuntos algebraicos irreducibles

Sea k un cuerpo y $V \subset k^n$ un conjunto algebraico. Se dice que V es *reducible* si existen V_1, V_2 conjuntos algebraicos de k^n tales que $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \neq V$ y $V_2 \neq V$. En caso contrario se dice que V es *irreducible*.

(a) Demostrar que el conjunto algebraico $V = V(y^2 - xy - x^2y + x^3) \subset \mathbb{R}^2$ es reducible.

(b) Sea $V \subset k^n$ un conjunto algebraico. Demostrar que V es irreducible $\Leftrightarrow I(V)$ es ideal primo.

(c) Si k es un cuerpo infinito, demostrar que k^n es irreducible.

(d) Si $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ demostrar que $V = \{a\}$ es irreducible.

Solución. (a) En efecto, el polinomio $f(x, y) = y^2 - xy - x^2y + x^3$ se anula para $y = x$, y aplicando la regla de Ruffini como polinomio en y ,

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -x - x^2 & x^3 \\ x & & x & -x^3 \\ \hline & 1 & -x^2 & 0 \end{array}$$

es decir $f(x, y) = (y - x)(y - x^2)$. Entonces,

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x = 0 \vee y - x^2 = 0\} = V_1 \cup V_2$$

con $V_1 = V(y - x)$ (recta), $V_2 = V(y - x^2)$ (parábola) y claramente $V_1 \neq V$ y $V_2 \neq V$.

(b) Por reducción al absurdo. Si $I(V)$ no es primo existen f_1, f_2 polinomios tales que $f_1 f_2 \in I(V)$, $f_1 \notin I(V)$, $f_2 \notin I(V)$. Como $f_1 f_2 \in I(V)$ se verifica $V(f_1 f_2) \supset V(I(V)) = V$ por tanto,

$$V = V \cap V(f_1 f_2) = V \cap [V(f_1) \cup V(f_2)] = [V \cap V(f_1)] \cup [V \cap V(f_2)] = V_1 \cup V_2.$$

Los conjuntos $V_1 = V \cap V(f_1)$ y $V_2 = V \cap V(f_2)$ son algebraicos y están contenidos en V . Como $f_1 \notin I(V)$, existe $a \in V$ tal que $f_1(a) \neq 0$, es decir $a \notin V(f_1)$ y por tanto $V_1 \subsetneq V$. Análogamente, $V_2 \subsetneq V$, luego V es reducible.

$\Leftarrow$) Por reducción al absurdo. Si V es reducible, existen conjuntos algebraicos V_1, V_2 de k^n con $V_1 \subsetneq V$, $V_2 \subsetneq V$ y $V = V_1 \cup V_2$. Se verifica $I(V_i) \supsetneq I(V)$ para $i = 1, 2$. En efecto, si fuera $I(V_i) = I(V)$, tomando V en ambos miembros quedaría $V_i = V$ lo cual es absurdo. Sean $f_i \in I(V_i)$ con $f_i \notin I(V)$. Entonces, para todo $a \in V$ se verifica $(f_1 f_2)(a) = f_1(a) f_2(a) = 0$. Es decir, $f_1 f_2 \in I(V)$ lo cual implica que $I(V)$ no es primo.

(c) Si k es un cuerpo infinito, sabemos que $I(k^n) = \{0\}$ y $\{0\}$ es ideal primo, por tanto k^n es un conjunto algebraico irreducible.

(d) Si $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ sabemos que $I(\{a\}) = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ y que $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ es ideal maximal (por tanto primo). Es decir, $V = \{a\}$ es conjunto algebraico irreducible.

204. Descomposición de un conjunto algebraico en unión de irreducibles

(1) Sea A un anillo noetheriano y $\mathcal{S}$ una colección no vacía de ideales de A . Demostrar que $\mathcal{S}$ tiene un elemento maximal, es decir existe un ideal I de $\mathcal{S}$ que no está contenido en ningún otro ideal de $\mathcal{S}$.

(2) Sea $\mathcal{V} = \{V_k\}$ una familia no vacía de conjuntos algebraicos del espacio afín k^n . Demostrar que $\mathcal{V}$ posee un elemento minimal.

(3) Sea V un conjunto algebraico del espacio afín k^n . Demostrar que existen conjuntos algebraicos irreducibles $V_1, \dots, V_n$ de k^n tales que $V = V_1 \cup \dots \cup V_n$.

(4) Sea V un conjunto algebraico irreducible del espacio afín k^n . Si $V \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$ con $V_1, \dots, V_n$ algebraicos de k^n . Demostrar que $V \subset V_i$ para

algún i .

(5) Sea V un conjunto algebraico del espacio afín k^n y $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ una descomposición de V en donde los V_j son conjuntos algebraicos irreducibles. Entonces cada V_k está contenido en $V_1 \cup \dots \cup V_m$, y por el apartado anterior $V_k \subset V_i$ para algún i con lo cual podemos descartar sucesivamente los V_k que están contenidos en algún otro V_i , llegando así a una descomposición de la forma

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_n \text{ con } V_i \not\subset V_j \text{ si } i \neq j.$$

Demostrar el siguiente teorema de unicidad de descomposición:

Sea V un conjunto algebraico del espacio afín k^n . Entonces, existen conjuntos algebraicos irreducibles de k^n , $V_1, \dots, V_n$ unívocamente determinados tales que

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_n \text{ con } V_i \not\subset V_j \text{ si } i \neq j.$$

Solución. (1) Elijamos un ideal en cada subconjunto no vacío de $\mathcal{S}$. Sea I_0 el ideal elegido en $\mathcal{S}$. Sea $\mathcal{S}_1 = \{I \in \mathcal{S} : I \supsetneq I_0\}$ y sea I_1 el ideal elegido en $\mathcal{S}_1$. Sea $\mathcal{S}_2 = \{I \in \mathcal{S} : I \supsetneq I_1\}$ e I_2 el ideal elegido en $\mathcal{S}_2$ etc. Es suficiente demostrar que existe un $\mathcal{S}_m = \emptyset$. Si no existiera tal $\mathcal{S}_m$ entonces, $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ es ideal de A pues $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$. Como A es noetheriano, existen $f_1, \dots, f_r$ unos generadores de I . Para n suficientemente grande ocurre que $f_i \in I_n$ para todo $i = 1, \dots, r$. Entonces, $I_{n+1} = I$ lo cual es absurdo.

(2) Consideremos el conjunto de ideales $\mathcal{S} = \{I(V_k)\}$ del anillo noetheriano $k[x_1, \dots, x_n]$. Por el lema anterior, $\mathcal{S}$ posee un elemento maximal $I(V_n)$. Pero

$$V_k \subset V_n \Rightarrow I(V_n) \subset I(V_k) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{I(V_n) \text{ maximal}} \quad I(V_n) = I(V_k)$$

$$\Rightarrow V_n = V(I(V_n)) = V(I(V_k)) = V_k$$

y por tanto V_n es minimal en $\mathcal{V}$.

(3) Sea $\mathcal{V}$ el conjunto de los conjuntos algebraicos $V \subset k^n$ tales que V no es unión de conjuntos algebraicos irreducibles. Tenemos que demostrar que $\mathcal{V}$ es vacío. Si $\mathcal{V} \neq \emptyset$, por el apartado anterior, sea V un elemento minimal de $\mathcal{V}$. Como $V \in \mathcal{V}$, V no es irreducible y por tanto $V = V_1 \cup V_2$ con $V = V_1 \cup V_2$ con V_i algebraicos y $V_i \subsetneq V$ para $i = 1, 2$. Como los V_i no pertenecen a $\mathcal{V}$ por ser V maximal en $\mathcal{V}$, podemos escribir $V_i = V_{i1} \cup \dots \cup V_{im_i}$ con los V_{ij} irreducibles, luego $V = \bigcup_{i,j} V_{ij}$ lo cual es absurdo pues de partida, V no es unión de conjuntos algebraicos irreducibles.

(4) Como $V \subset \bigcup_{j=1}^n V_j$, $V = (\bigcup_{j=1}^n V_j) \cap V = \bigcup_{j=1}^n V \cap V_j$. Al ser V irreducible, $V = V \cap V_i$ para algún i , y por tanto, $V \subset V_i$.

(5) Sea V un conjunto algebraico del espacio afín k^n y sea $V = V_1 \cup \dots \cup V_n$ una descomposición de V en unión de conjuntos algebraicos irreducibles tales que $V_i \not\subset V_j$ si $i \neq j$. Sea $V = W_1 \cup \dots \cup W_m$ una descomposición del mismo tipo. Entonces,

$$V_i = V \cap V_i = \left(\bigcup_{j=1}^m W_j \right) \cap V_i = \bigcup_{j=1}^m (W_j \cap V_i),$$

y por el apartado anterior, $V_i \subset W_{j(i)} \cap V_i$ para algún $j(i)$ y por tanto $V_i \subset W_{j(i)}$ para algún $j(i)$. Análogamente, $W_{j(i)} \subset V_k$ para algún k . Pero $V_i \subset V_k$ implica $V_i = V_k$ luego $V_i = W_{j(i)}$. De la misma manera, cada W_j es igual a un $V_{i(j)}$.

205. Matrices idempotentes sobre un cuerpo

Para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, determinar todas las matrices idempotentes de $\mathbb{K}^{2 \times 2}$.

Solución. Sabemos que todo endomorfismo idempotente $f : E \rightarrow E$ en un espacio vectorial de dimensión finita E es diagonalizable con valores propios a lo sumo 0 y 1. Por tanto, si $A \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ es idempotente, es diagonalizable con matriz diagonal de alguna de las formas

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si $A \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ es idempotente existe una matriz $P \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ invertible tal que $A = PD_i P^{-1}$ para algún $i = 1, 2, 3, 4$. Recíprocamente, si una matriz es de la forma $PD_i P^{-1}$ satisface

$$(PD_i P^{-1})^2 = PD_i P^{-1} PD_i P^{-1} = PD_i^2 P^{-1} = PD_i P^{-1}$$

y por tanto es idempotente. Toda matriz invertible de $\mathbb{K}^{2 \times 2}$ es de la forma

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad ad - bc \neq 0$$

y su inversa es

$$P^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, todas las matrices idempotentes de $\mathbb{K}^{2 \times 2}$ son de alguna de las formas

$$\begin{aligned} PD_1 P^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ PD_2 P^{-1} &= \dots = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} -bc & ab \\ -cd & ad \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{K}, \quad ad-bc \neq 0, \\ PD_3 P^{-1} &= \dots = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad & -ab \\ cd & -bc \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{K}, \quad ad-bc \neq 0, \\ PD_4 P^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

206. Permutación de raíces y automorfismos de cuerpos

(a) Sea K/k una extensión de cuerpos y $\alpha \in K$ algebraico sobre k . Demostrar que si $\sigma \in \text{Aut}(K/k)$ y α es raíz de $p(x) \in k[x]$ entonces $\sigma(\alpha)$ también es raíz de $p(x)$. Es decir, σ permuta las raíces de $p(x)$.

(b) Determinar $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$.

(c) Determinar $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$.

Solución. (a) Sea α raíz de $p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in k[x]$ con $a_m \neq 0$. Entonces, $a_m \alpha^m + a_{m-1} \alpha^{m-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0$. Aplicando σ a ambos miembros obtenemos $\sigma(a_m) \sigma(\alpha)^m + \sigma(a_{m-1}) \sigma(\alpha)^{m-1} + \dots + \sigma(a_1) \sigma(\alpha) + \sigma(a_0) = 0$. Como $a_i \in k$ para todo $i = 0, 1, \dots, m$ se verifica $\sigma(a_i) = a_i$ por tanto,

$$a_m \sigma(\alpha)^m + a_{m-1} \sigma(\alpha)^{m-1} + \dots + a_1 \sigma(\alpha) + a_0 = 0,$$

con lo cual $\sigma(\alpha)$ es raíz de $p(x)$.

(b) Sabemos que si k es el subcuerpo primo de K entonces, $\text{Aut}(K) = \text{Aut}(K/k)$ por tanto al ser $\mathbb{Q}$ el subcuerpo primo de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ tenemos que $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) = \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q})$. Las únicas raíces de $f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ en $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ son $\pm\sqrt{2}$ y por el apartado 1, si $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) = \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q})$ entonces $\tau(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ o $\tau(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Como $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ y τ deja fijo todo elemento de $\mathbb{Q}$ los únicos posibles elementos de $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ son

$$\text{id}(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}, \quad \sigma(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2} \quad .$$

El primero es la identidad y el segundo σ , es inmediato comprobar que pertenece a $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$, en consecuencia $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) = \{id, \sigma\}$.

(c) De manera análoga al apartado anterior, $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) = \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$. La única raíz de $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ en $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ es $\sqrt[3]{2}$ y por el apartado (a), si $\tau \in \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) = \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q})$ entonces $\tau(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$. Como

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 : a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

y τ deja fijo todo elemento de $\mathbb{Q}$, necesariamente

$$\tau(a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2) = a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2$$

y por tanto $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) = \{id\}$.

207. Cuerpo fijo

(1) Sea K un cuerpo y H un subconjunto de $\text{Aut}(K)$. Demostrar que el conjunto formado por los elementos de K que quedan invariantes por todos los elementos de H es un subcuerpo de K .

(2) Si $K_1 \subset K_2 \subset K$ son subcuerpos de K , demostrar que $\text{Aut}(K/K_2) \subset \text{Aut}(K/K_1)$.

(3) Sea K un cuerpo y H un subgrupo de $\text{Aut}(K)$. Al subcuerpo de F formado por los elementos que quedan fijos por todos los elementos de H se llama *subcuerpo fijo* de H .

Si $H_1 \leq H_2 \leq \text{Aut}(K)$ son dos subgrupos de automorfismos con subcuerpos fijos asociados F_1 y F_2 respectivamente, demostrar que $F_2 \subset F_1$.

(4) Determinar el cuerpo fijo de $H = \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$.

(5) Determinar el cuerpo fijo de $H = \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$.

Solución. (1) Sea $F = \{x \in K : \tau(x) = x \ \forall \tau \in H\}$. Veamos que F es subcuerpo de K . Tenemos $\tau(0) = 0$ para todo $\tau \in H$ es decir, $0 \in F$. Para todo $x, y \in F$ y para todo $\tau \in H$ tenemos $\tau(x - y) = \tau(x) - \tau(y) = x - y$ luego $x - y \in F$. Hemos demostrado que $(F, +)$ es subgrupo de $(K, +)$. Por otra parte tenemos $\tau(1) = 1$ para todo $\tau \in H$ es decir, $1 \in F$. Para todo $x, y \in F - \{0\}$ y para todo $\tau \in H$ tenemos $\tau(xy^{-1}) = \tau(x)\tau(y)^{-1} = xy^{-1}$ luego $xy^{-1} \in F - \{0\}$. Hemos demostrado que $(F - \{0\}, \cdot)$ es subgrupo de $(K - \{0\}, \cdot)$. Concluimos que F es subcuerpo de K .

(2) Si $\tau \in \text{Aut}(K/K_2)$, entonces $\tau(x) = x$ para todo $x \in K_2$ y como $K_1 \subset K_2$, también $\tau(x) = x$ para todo $x \in K_1$. Es decir, $\tau \in \text{Aut}(K/K_1)$.

(3) Si $x \in F_2$, entonces es anulado por todo automorfismo de H_2 y como $H_1 \subset H_2$, también es anulado por todo automorfismo de H_1 . Es decir, $x \in F_1$.

(4) En este caso, $H = \text{Aut}(K)$ y según vimos en el problema 206, $H = \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) = \{id, \sigma\}$ con $\sigma(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$. El cuerpo fijo K de H está formado por los elementos $a + b\sqrt{2}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ que quedan fijos por id y σ , es decir

$$\begin{aligned} id(a + b\sqrt{2}) &= a + b\sqrt{2}, \\ \sigma(a + b\sqrt{2}) &= a - b\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}, \end{aligned}$$

que ocurre para $b = 0$. Por tanto, el cuerpo fijo de $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ es $\mathbb{Q}$.

(5) En este caso, $H = \text{Aut}(K)$ y según vimos en el problema 206 $H = \text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})) = \{id\}$. La identidad deja fijo todo elemento de $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ por tanto, el cuerpo fijo de $\text{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$ es $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

208. Isomorfismo $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Sean $\mathbb{C}^*$ el grupo multiplicativo de los números complejos, $\mathbb{R}_{>0}$ el grupo multiplicativo de los números reales positivos y el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Demostrar que $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Solución. Veamos previamente que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es isomorfo al grupo multiplicativo $D = \{e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ de los números complejos de módulo 1. En efecto, la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow D$ dada por $f(t) = e^{2\pi it}$ es homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y $(D, \cdot)$ pues para todo $t, s \in \mathbb{R}$:

$$f(t + s) = e^{2\pi i(t+s)} = e^{2\pi it} e^{2\pi is} = f(t)f(s).$$

El núcleo de f es $\ker f = \mathbb{Z}$ y por un conocido teorema de isomorfía, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \text{Im } f = D$. El problema se reduce pues a demostrar que $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}_{>0} \times D$. Para todo $z \in \mathbb{C}^*$ definimos

$$\Phi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times D, \quad \Phi(z) = \left(|z|, \frac{z}{|z|} \right).$$

Esta aplicación es homomorfismo de grupos. En efecto, para todo $z, \omega \in \mathbb{C}^*$:

$$\Phi(z\omega) = \left(|z\omega|, \frac{z\omega}{|z\omega|} \right) = \left(|z|, \frac{z}{|z|} \right) \cdot \left(|\omega|, \frac{\omega}{|\omega|} \right) = \Phi(z) \cdot \Phi(\omega).$$

Su núcleo es $\ker \Phi = \{z \in \mathbb{C}^* : \Phi(z) = (1, 1)\} = \{1\}$ y por tanto es inyectiva. Todo elemento de $\mathbb{R}_{>0} \times D$ es de la forma (r, e^{it}) con $r > 0$ y se verifica $(r, e^{it}) = \Phi(re^{it})$. El homomorfismo Φ es biyectivo, y por tanto $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

209. Regiones determinadas por n rectas del plano

Demostrar por inducción que n rectas del plano dos a dos no paralelas y tales que ninguna terna pasa por un punto común divide al plano en $R_n = (n^2 + n + 2)/2$ regiones.

Solución. *Paso base.* La fórmula es cierta para $n = 1$ pues obtenemos $R_1 = (1^2 + 1 + 2)/2 = 2$ regiones.

Paso de inducción. Sea la fórmula cierta para n . Cada vez que se añade una recta a las n existentes obtenemos n intersecciones y añadimos $n + 1$ regiones. En consecuencia,

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n^2 + 3n + 4}{2} = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 2}{2} \end{aligned}$$

y por tanto la fórmula es cierta para $n + 1$.

Nota. A partir del razonamiento de inducción podríamos haber deducido la fórmula que da el enunciado. En efecto, de un sencillo análisis gráfico deducimos que $R_1 = 2$, $R_2 = 2 + 2$, $R_3 = 2 + 2 + 3$, $R_4 = 2 + 2 + 3 + 4, \dots$ y por tanto,

$$\begin{aligned} R_n &= 2 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = 1 + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}. \end{aligned}$$

210. Subespacios invariantes (I)

A un endomorfismo de un espacio vectorial V también se le llama *operador*. Si V un espacio vectorial, $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo y W un subespacio de V se dice que W es *invariante por T* o que W es *T -invariante* si $T(W) \subset W$ es decir, si para todo $x \in W$ se verifica $T(x) \in W$. Es claro que todo subespacio W que sea T -invariante induce un endomorfismo $\hat{T} : W \rightarrow W$ dado por $\hat{T}(w) = T(w)$.

1. Se considera el endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Demostrar el subespacio W de ecuación cartesiana $3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$ es T -invariante.

2. Demostrar que la intersección de cualquier colección de subespacios de V que son T -invariantes, también es T -invariante.
3. Demostrar que todo subespacio de V es invariante por los operadores I y $\mathbf{0}$ (operadores identidad y nulo).
4. Sea W subespacio de V invariante por los operadores $T_1, T_2 : V \rightarrow V$. Demostrar que también es invariante por los operadores $T_1 + T_2$ y $T_1 \circ T_2$.
5. Sea V un espacio vectorial y $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Demostrar que los siguientes subespacios son invariantes por T :

$$(a) \{0\}. \quad (b) V. \quad (c) \ker T. \quad (d) \operatorname{Im} T.$$

Solución. 1. En efecto, cualquier vector $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ de W satisface $3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0$ y su transformado es

$$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 3\alpha_1 - 5\alpha_2 + 2\alpha_3 \end{bmatrix}.$$

El vector $T(x)$ pertenece a W pues satisface la ecuación de W :

$$3\alpha_1 - 5\alpha_2 + (3\alpha_1 - 5\alpha_2 + 2\alpha_3) = 2(3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3) = 2 \cdot 0 = 0.$$

2. Sea $\{W_i : i \in I\}$ una colección de subespacios de V que son T -invariantes. Si $x \in \bigcap_{i \in I} W_i$ entonces $x \in W_i$ para todo $i \in I$. Como W_i es T -invariante, se verifica $T(x) \in W_i$ para todo $i \in I$, por tanto $T(x) \in \bigcap_{i \in I} W_i$ luego $\bigcap_{i \in I} W_i$ es T -invariante.

3. Si W es subespacio de V entonces, si $x \in W$ se verifica $I(x) = x \in W$ y $\mathbf{0}(x) = 0 \in W$ y por tanto W es invariante por I y $\mathbf{0}$.

4. Tenemos

$$x \in W \quad \underbrace{\Rightarrow}_{W \text{ es } T_1, T_2 \text{ inv.}} \quad T_1(x) \in W \wedge T_2(x) \in W$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{W \text{ es subesp.}} \quad (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \in W$$

y por tanto W es invariante por $T_1 + T_2$. Por otra parte,

$$x \in W \quad \underbrace{\Rightarrow}_{W \text{ es } T_2 \text{ inv.}} \quad T_2(x) \in W \quad \underbrace{\Rightarrow}_{W \text{ es } T_1 \text{ inv.}} \quad (T_1 \circ T_2)(x) = T_1[T_2(x)] \in W$$

y por tanto W es invariante por $T_1 \circ T_2$.

5. (a) Se verifica $T(0) = 0 \in \{0\}$ por tanto, $\{0\}$ es invariante por T .
 (b) Para todo $x \in V$ tenemos $T(x) \in V$, luego V es invariante por T .
 (c) Si $x \in \ker T$ entonces $T(x) = 0$. Pero $0 \in \ker T$ pues $\ker T$ es subespacio de V . Es decir, $\ker T$ es invariante por T .
 (d) Para todo $x \in \operatorname{Im} T$ se verifica $T(x) \in \operatorname{Im} T$ por la definición de imagen por tanto, $\operatorname{Im} T$ es invariante por T .

211. Subespacios invariantes (II)

1. Sea V espacio vectorial sobre el cuerpo K . Demostrar que
 (i) Si $v \in V$ es vector propio no nulo de T entonces, el subespacio $L[v]$ generado por v es T -invariante.
 (ii) Recíprocamente, supongamos que W es un subespacio de dimensión 1 generado por el vector no nulo v , es decir $W = L[v]$. Entonces, v es vector propio de T
2. Determinar los subespacios invariantes del endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

3. Determinar los subespacios invariantes de

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

visto como (a) Un operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. (b) Un operador $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$.

4. Demostrar que todo subespacio propio V_λ de V es invariante por T .
 5. Sea V un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de dimensión $n > 1$ e impar. Demostrar que cualquier operador sobre V tiene un subespacio invariante distinto de $\{0\}$ y de V .

Solución. 1. (i) Por ser v vector propio de T , existe $\lambda \in K$ tal que $T(v) = \lambda v$. Entonces,

$$\begin{aligned} x \in L[v] &\Rightarrow \exists \alpha \in K : x = \alpha v \Rightarrow T(x) = T(\alpha v) \\ &= \alpha T(v) = \alpha(\lambda v) = (\alpha\lambda)v \Rightarrow T(x) \in L[v] \end{aligned}$$

es decir, $L[v]$ es T -invariante.

(ii) Como $L[v]$ es invariante y $v \in L[v]$ se verifica $T(v) \in L[v]$ y por tanto existe $\lambda \in K$ tal que $T(v) = \lambda v$. Es decir, v es vector propio de T .

2. El único subespacio invariante de dimensión 0 es el $\{0\}$ y el único de dimensión 2 es $\mathbb{R}^2$. Valores propios de T :

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4 \vee \lambda = 1 \text{ (simples).}$$

Subespacios propios:

$$V_4 \equiv \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}, \quad V_1 \equiv \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Al ser $\lambda = 4$ valor propio simple, $\dim V_4 = 1$ y una base de V_4 es $\{(1, 1)^t\}$. Análogamente la dimensión de V_1 es 1 y una base de V_1 es $\{(-2, 1)^t\}$. Los subespacios T - invariantes de dimensión 1 son exactamente $L[(1, 1)^t]$ y $L[(-2, 1)^t]$.

3. (a) El único subespacio invariante de dimensión 0 es el $\{0\}$ y el único de dimensión 2 es $\mathbb{R}^2$. Valores propios de T :

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -4 \\ 5 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 4i \notin \mathbb{R}.$$

No existen vectores propios no nulos por tanto, no hay subespacios invariantes de dimensión 1.

(b) El único subespacio invariante de dimensión 0 es el $\{0\}$ y el único de dimensión 2 es $\mathbb{C}^2$. Subespacios propios:

$$V_{4i} \equiv \begin{cases} (2 - 4i)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (-2 - 4i)x_2 = 0 \end{cases}, \quad V_{-4i} \equiv \begin{cases} (2 + 4i)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (-2 + 4i)x_2 = 0. \end{cases}$$

Al ser $\lambda = 4i$ valor propio simple, $\dim V_{4i} = 1$ y una base de V_{4i} es $\{(2, 1 - 2i)^t\}$. Análogamente la dimensión de V_{-4i} es 1 y una base de V_{-4i} es $\{(2, 1 + 2i)^t\}$. Los subespacios T - invariantes de dimensión 1 son exactamente $L[(2, 1 - 2i)^t]$ y $L[(2, 1 + 2i)^t]$.

4. Si $x \in V_\lambda$ entonces $T(x) = \lambda x$. Pero $\lambda x \in V_\lambda$ por ser V_λ subespacio. Es decir $T(x) \in V_\lambda$ luego V_λ es T - invariante.

5. El polinomio característico $\chi(t) \in \mathbb{R}[t]$ de T es de grado n impar, en consecuencia tiene al menos una raíz real λ . Si V_λ es el subespacio propio asociado al valor propio λ se verifica $1 \leq \dim V_\lambda \leq n$. Si $\dim V_\lambda < n$, V_λ es subespacio T - invariante distinto de $\{0\}$ y de V , y la propiedad ya está demostrada. Si $\dim V_\lambda = n$ entonces, T es diagonalizable con matriz diagonal $D = \lambda I$ y por tanto $T = \lambda I$. Pero en este caso cualquier subespacio W de V es invariante. En efecto, si $w \in W$ se verifica

$$T(w) = (\lambda I)(w) = \lambda I(w) = \lambda w \in W,$$

lo cual también demuestra la propiedad

212. Subespacios invariantes (III)

(1) Sean V espacio vectorial sobre el cuerpo K , $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo y $f(t) \in K[t]$. Demostrar que $\ker f(T)$ es un subespacio T -invariante.

(2) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W es un subespacio invariante por un operador $T : V \rightarrow V$. Demostrar que T tiene una representación matricial por bloques $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ en donde A es una representación matricial de la restricción $\hat{T}$ de T a W .

(3) Se considera el endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

(a) Demostrar que el subespacio $W = L[(1, 1, 2)^t]$ es T -invariante.

(b) Encontrar a partir de W una representación matricial de T de la forma

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

(4) Sea $T : V \rightarrow V$ un endomorfismo con $\dim V$ finita y W un subespacio T -invariante. Demostrar que el polinomio mínimo de la restricción $\hat{T}$ de T a W divide al polinomio mínimo de T .

Solución. (1) Sea $x \in \ker f(T)$, es decir $f(T)(x) = 0$. Tenemos que demostrar que $T(x) \in \ker f(T)$ es decir, que $f(T)(T(x)) = (f(T) \circ T)(x) = 0$. Pero al ser $f(t)t = tf(t)$, se verifica $f(T) \circ T = T \circ f(T)$. Entonces,

$$(f(T) \circ T)(x) = (T \circ f(T))(x) = T(f(T)(x)) = T(0) = 0.$$

(2) Sea W un subespacio T -invariante y $B_W = \{e_1, \dots, e_r\}$ una de sus bases. Por el teorema de la base incompleta, podemos encontrar una base de V de la forma $B_V = \{e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n\}$. Dado que W es T -invariante, se verifica

$$T(e_1) = a_{11}e_1 + \dots + a_{1r}e_r$$

...

$$T(e_r) = a_{r1}e_1 + \dots + a_{rr}e_r$$

$$T(e_{r+1}) = a_{r+1,1}e_1 + \dots + a_{r+1,r}e_r + \dots + a_{r+1,n}e_n$$

...

$$T(e_n) = a_{n,1}e_1 + \dots + a_{n,r}e_r + \dots + a_{n,n}e_n.$$

con los a_{ij} escalares. Transponiendo coeficientes, obtenemos que la matriz de T en B_V es de la forma $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ en donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{r1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1r} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

es la matriz de $\hat{T} : W \rightarrow W$.

(3) (a) Todo vector de W es de la forma $(\alpha, \alpha, 2\alpha)^t$ y

$$T \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\alpha \\ 4\alpha \\ 8\alpha \end{bmatrix} = 4\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in L[(1, 1, 2)^t]$$

por tanto, W es un subespacio T -invariante. (b) Una base de W es $B_W = \{(1, 2, 2)^t\}$ y una de $\mathbb{R}^3$ es

$$B_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 2, 2)^t, (0, 1, 0)^t, (0, 0, 1)^t\}.$$

Los transformados por T de los elementos de $B_{\mathbb{R}^3}$ son:

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Trasponiendo coeficientes obtenemos la matriz de T en la base $B_{\mathbb{R}^3}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

$$\text{con } A = [4], 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B = [-3, 3], C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(4) Es claro que si K es el cuerpo de los escalares y $f(t) \in K[t]$, se verifica $f(\hat{T})(w) = f(T)(w)$ para todo $w \in W$. Si $\mu(t)$ es el polinomio mínimo de T , entonces

$$\mu(\hat{T})(w) = \mu(T)(w) = \mathbf{0}(w) = 0 \quad \forall w \in W.$$

Es decir, $\hat{T}$ es un cero de $\mu(t)$. El polinomio mínimo de un operador divide a todo polinomio que anula al operador, por tanto el polinomio mínimo de $\hat{T}$ divide a $\mu(t)$.

213. Todo grupo de orden primo es cíclico

- (a) Sea G un grupo tal que $|G| = p$ primo. Demostrar que G es cíclico.
 (b) Determinar todos los grupos de órdenes $n = 1, 2, 3, 5, 7$.

Solución. (a) Como $|G| = p \geq 2$, el grupo tiene más de un elemento. Sea $g \in G$ con $g \neq e$ (e elemento neutro de G). Entonces, el subgrupo $\langle g \rangle$ de G contiene más de un elemento, y por el teorema de Lagrange $|\langle g \rangle|$ divide a p . Como p es primo, ha de ser necesariamente $|\langle g \rangle| = p = |G|$ lo cual implica que $G = \langle g \rangle$. De esta manera, G está generado por g , lo cual implica que G es grupo cíclico.

(b) Trivialmente, sólo existe un grupo de un elemento: $\{e\}$ (el formado por el elemento neutro). Por el apartado anterior, si $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ entonces todos los grupos de orden p son isomorfos al ser cíclicos. En consecuencia, los únicos grupos de órdenes 1, 2, 3, 5, 7 son respectivamente $\{e\}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$.

214. Grupos de orden 4

En este problema se demuestra que sólo existen dos grupos de orden 4 : $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (grupo de Klein).

1. Demostrar que en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ el simétrico de cada elemento coincide con el propio elemento.

2. Demostrar que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no es cíclico.

3. Demostrar que $\mathbb{Z}_4$ no es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Nota. Esto garantiza que existen al menos dos grupos de orden 4.

4. Demostrar que todo grupo de orden 4 es o bien isomorfo a $\mathbb{Z}_4$, o bien a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Concluir.

Solución. 1. Tenemos $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ y se cumple

$$(0, 0) + (0, 0) = (0, 0), \quad (1, 0) + (1, 0) = (0, 0),$$

$$(0, 1) + (0, 1) = (0, 0), \quad (1, 1) + (1, 1) = (0, 0),$$

lo cual implica que

$$-(0,0) = (0,0), \quad -(1,0) = (1,0), \quad -(0,1) = (0,1), \quad -(1,1) = (1,1),$$

es decir el simétrico de cada elemento coincide con el propio elemento.

2. El elemento neutro es de orden 1 y se cumple

$$(1,0) + (1,0) = (0,0), \quad (0,1) + (0,1) = (0,0), \quad (1,1) + (1,1) = (0,0)$$

es decir, los restantes elementos son de orden 2, por tanto $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no es cíclico.

3. Trivialmente el grupo $\mathbb{Z}_4$ es cíclico y por el apartado anterior $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no lo es, en consecuencia no pueden ser isomorfos.

4. Sea G un grupo de orden 4. Analizaremos dos casos.

Caso 1: G tiene un elemento de orden 4. En este caso, G es cíclico y por tanto isomorfo a $\mathbb{Z}_4$.

Caso 2: G no tiene elementos de orden 4. Veamos que en este caso, G es isomorfo al grupo de Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Sea $G = \{e, a, b, c\}$ con e el elemento neutro de G . Como el orden de todo elemento divide al orden del grupo, se verifica necesariamente

$$\text{ord}(e) = 1, \quad \text{ord}(a) = \text{ord}(b) = \text{ord}(c) = 2.$$

Se verifica $ab = c$. En efecto, si fuera $ab = e$ entonces $a = b^{-1}$. Pero al ser $b^2 = e$ tenemos $b = b^{-1}$ lo cual implicaría $a = b$ (absurdo). Si fuera $ab = a$ entonces, $b = e$ (absurdo). Análogamente $ab = b$ implicaría $a = e$ (absurdo). Cambiando los papeles de a , b , y c , el razonamiento anterior demuestra que el producto de cualquier par de elementos distintos de $\{a, b, c\}$ es el tercero. En consecuencia, las tabla de Cayley de G y de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ son

$\cdot$	e	a	b	c	$+$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
e	e	a	b	c	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
a	a	e	c	b	$(1,0)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(0,1)$
b	b	c	e	a	$(0,1)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(1,0)$
c	c	b	a	e	$(1,1)$	$(1,1)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(0,0)$

La aplicación $f : G \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ dada por

$$f(e) = (0,0), \quad f(a) = (1,0), \quad f(b) = (0,1), \quad f(c) = (1,1)$$

es claramente un isomorfismo. Concluimos que sólo existen dos grupos de orden 4 : $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

215. Grupos de orden $n = 6$

En esta monografía, demostramos que sólo existen dos grupos de orden 6 : $\mathbb{Z}_6$ y S_3 .

1. Lema. Todo grupo de orden par tiene algún elemento de orden 2.

Demostración. Sea G el grupo dado y para cada elemento de G consideremos el conjunto $\{g, g^{-1}\}$. Este conjunto tiene dos elementos si $g \neq g^{-1}$ y un único elemento si $g = g^{-1}$. Entonces,

$$|G| = 2 \left| \{ \{g, g^{-1}\} : g \neq g^{-1} \} \right| + \left| \{g \in G : g = g^{-1}\} \right|.$$

Como $|G|$ es par y el primer sumando del segundo miembro también, el cardinal de $\{g \in G : g = g^{-1}\}$ ha de ser también par. Como el neutro $e \in \{g \in G : g = g^{-1}\}$, ha de existir un $e \neq g \in G$ tal que $g = g^{-1}$, es decir $g^2 = e$ y por tanto tal elemento g es de orden 2. $\square$

2. Teorema. Sea G un grupo abeliano de orden 6. Entonces, G es isomorfo a $\mathbb{Z}_6$.

Demostración. Supongamos que todos los elemento de G distintos del neutro e fueran de orden 2. Elijamos dos elementos distintos $x, y \in G$ y ambos distintos de e . Es inmediato comprobar que $\{e, x, y, xy\}$ es subgrupo de G de orden 4, lo cual es absurdo por el teorema de Lagrange. En consecuencia, algún elemento de G tiene orden 3 o 6.

Si algún elemento tiene orden 6 entonces G es cíclico, luego $G \cong \mathbb{Z}_6$. Si G tiene un elemento x de orden 3, también tiene otro y de orden 2 (por el lema 1). Entonces,

$$\begin{aligned} (xy)^6 &= x^6 y^6 = ee = e, \\ (xy)^2 &= x^2 y^2 = x^2 e = x^2 \neq e, \\ (xy)^3 &= x^3 y^3 = ey = y \neq e. \end{aligned}$$

Es decir, G es de nuevo cíclico con lo cual $G \cong \mathbb{Z}_6$. $\square$

3. Lema. Sea G un grupo finito en el que todo elemento distinto del neutro tiene orden 2. Entonces, G es conmutativo.

Demostración. Sean $x, y \in G$. Entonces, $x^2 = e$, $y^2 = e$, $(xy)^2 = e$. Por tanto, $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$. $\square$

4. Teorema. Sea G un grupo de orden 6 no conmutativo. Entonces, G es isomorfo al grupo simétrico S_3 .

Demostración. Primeramente veamos que G tiene algún elemento de orden 2 y alguno de orden 3. Efectivamente, al ser G no conmutativo, no es cíclico y por tanto no existen elementos de orden 6. Por el lema 1, existe algún elemento de orden 2. Si todos los elementos distintos del neutro tuvieran orden 2 entonces, por el lema 3, G sería conmutativo (absurdo). Existe pues en G algún elemento de orden 3.

Sea x un elemento de G de orden 2 e y uno de orden 3. Sea el subgrupo de G dado por $H = \langle x \rangle = \{e, x\}$. Existen por tanto tres clases adjuntas por la izquierda y se verifica

$$ye^{-1} = y \notin H, \quad y^2e^{-1} = y^2 \notin H, \quad y^2y^{-1} = y \notin H,$$

luego dichas clases adjuntas son H, yH, y^2H . Para cada $g \in G$ definamos la aplicación

$$f_g : \{H, yH, y^2H\} \rightarrow \{H, yH, y^2H\}, \quad f_g(zH) = gzH.$$

Se verifica $(f_{g^{-1}} \circ f_g)(zH) = f_{g^{-1}}(f_g(zH)) = f_{g^{-1}}(gzH) = g^{-1}gzH = zH = id(zH)$, por tanto $f_{g^{-1}} \circ f_g = id$, lo cual implica que cada f_g es biyectiva, es decir una permutación de $\{H, yH, y^2H\}$. Denotando a H, yH, y^2H por 1, 2, 3 respectivamente podemos ver cada f_g como un elemento de S_3 y tenemos definida la aplicación

$$F : G \rightarrow S_3, \quad F(g) = f_g.$$

La aplicación F es un homomorfismo de grupos. En efecto,

$$\begin{aligned} (f_{g_1} \circ f_{g_2})(zH) &= f_{g_1}(f_{g_2}(zH)) = f_{g_1}(g_2zH) \\ &= g_1g_2zH = (g_1g_2)zH = f_{g_1g_2}(zH), \end{aligned}$$

luego $f_{g_1g_2} = f_{g_1} \circ f_{g_2}$ o de forma equivalente $F(g_1g_2) = F(g_1) \circ F(g_2)$. Dado que G y S_3 son grupos finitos y del mismo orden, para demostrar que F es biyectiva bastará demostrar que es inyectiva o sobreyectiva. Veamos que es sobreyectiva.

Consideremos $F(y) = f_y$. Tenemos

$$f_y(H) = yH, \quad f_y(yH) = y^2H, \quad f_y(y^2H) = y^3H = eH = H.$$

Es decir, la permutación f_y permuta H, yH, y^2H en yH, y^2H, H , o bien en la notación usada es la permutación $(2\ 3\ 1)$. Inmediatamente comprobamos que $(2\ 3\ 1)^2 = (3\ 1\ 2)$ y $(2\ 3\ 1)^3 = (1\ 2\ 3)$ lo cual implica que la imagen de F contiene un elemento de orden 3.

Veamos que la permutación $F(x) = f_x$ es una transposición es decir, un elemento de la imagen de F orden 2. Como $x \in H$ se verifica $f_x(H) =$

xH . Al ser f_x una permutación, si demostramos que $f_x(yH) = y^2H$ ya estará demostrado que f_x es una transposición. Por reducción al absurdo, veamos que no puede ocurrir $f_x(yH) = yH$. En efecto,

$$f_x(yH) = yH \Leftrightarrow xyH = xH \Leftrightarrow \{xy, xyx\} = \{y, yx\}.$$

La última igualdad sólo puede ocurrir si $xy = y$ o si $xy = yx$. Si $xy = y$ entonces $x = e$ (absurdo). Si $xy = yx$, entonces x e y conmutan y al ser 2 y 3 coprimos, por una conocida propiedad xy tendría orden $2 \cdot 3 = 6$. El grupo G sería cíclico (absurdo pues G no es abeliano). Entonces, $\text{Im } G$ es subgrupo de G y contiene un elemento de orden 3 y otro de orden 2. Por el teorema de Lagrange, $\text{Im } G$ ha de tener orden 6 y por tanto $\text{Im } G = S_3$. Hemos demostrado pues que $G \cong S_3$. $\square$

5. Corolario. Sólo existen dos grupos G de orden 6 : $\mathbb{Z}_6$ (si G es conmutativo) y S_3 (si G no es conmutativo).

216. Derivada de un campo escalar respecto de uno vectorial

Definimos el concepto de derivada de un campo escalar respecto de uno vectorial y demostramos algunas de sus propiedades.

1. Definición. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase ≥ 2 en M y $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase ≥ 1 en M . Se llama *derivada del campo escalar F respecto del campo vectorial v* y se representa por $L_v F$, al campo escalar

$$L_v F : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad L_v F(x) = \langle \nabla F(x), v(x) \rangle.$$

Es decir, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $v = (v_1, \dots, v_n)$, entonces,

$$L_v F(x) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x)v_1(x) + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)v_n(x).$$

Es claro que la derivada de un campo escalar respecto de uno vectorial es una función al menos de clase 1.

2. Teorema. Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $F, G : M \rightarrow \mathbb{R}$ dos campos escalares de clase al menos 2 y $v, w : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos campos vectoriales de clase al menos 1. La derivada de un campo escalar respecto de uno vectorial satisface las propiedades:

- (1) $L_v(F + G) = L_v F + L_v G$.
- (2) $L_v(F \cdot G) = L_v F \cdot G + F \cdot L_v G$.
- (3) $L_{v+w} F = L_v F + L_w F$.
- (4) $(L_{F \cdot v})(G) = (F \cdot L_v)(G)$.

Demostración. (1) Para todo $x \in M$ tenemos:

$$\begin{aligned}
 L_v(F + G)(x) &= \langle \nabla(F + G)(x), v(x) \rangle \\
 &= \langle \nabla F(x) + \nabla G(x), v(x) \rangle \\
 &= \langle \nabla F(x), v(x) \rangle + \langle \nabla G(x), v(x) \rangle \\
 &= L_v F(x) + L_v G(x) \\
 &= (L_v F + L_v G)(x)
 \end{aligned}$$

es decir, $L_v(F + G) = L_v F + L_v G$.

(2) Para todo $x \in M$ tenemos:

$$\begin{aligned}
 L_v(F \cdot G)(x) &= \langle \nabla(F \cdot G)(x), v(x) \rangle \\
 &= \langle \nabla F(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot \nabla G(x), v(x) \rangle \\
 &= \langle \nabla F(x) \cdot G(x), v(x) \rangle + \langle F(x) \cdot \nabla G(x), v(x) \rangle \\
 &= \langle \nabla F(x), v(x) \rangle \cdot G(x) + F(x) \cdot \langle \nabla G(x), v(x) \rangle \\
 &= L_v F(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot L_v G(x) \\
 &= (L_v F \cdot G + F \cdot L_v G)(x)
 \end{aligned}$$

y por tanto, $L_v F \cdot G + F \cdot L_v G$.

(3) Para todo $x \in M$ tenemos:

$$\begin{aligned}
 L_{v+w}F(x) &= \langle \nabla F(x), (v + w)(x) \rangle \\
 &= \langle \nabla F(x), v(x) + w(x) \rangle \\
 &= \langle \nabla F(x), v(x) \rangle + \langle \nabla F(x), w(x) \rangle \\
 &= L_v F(x) + L_w F(x) \\
 &= (L_v F + L_w F)(x)
 \end{aligned}$$

en consecuencia, $L_v F + L_w F$.

Para todo $x \in M$ se verifica

$$\begin{aligned}
 L_{F \cdot v}(G)(x) &= \langle \nabla G(x), (F \cdot v)(x) \rangle \\
 &= \langle \nabla G(x), F(x) \cdot v(x) \rangle \\
 &= F(x) \cdot \langle \nabla G(x), v(x) \rangle \\
 &= F(x) \cdot L_v G(x) \\
 &= (F \cdot L_v G)(x)
 \end{aligned}$$

es decir, $(L_{F \cdot v})(G) = (F \cdot L_v)(G)$. □

217. Conjunto ordenado de las cortaduras de Dedekind

Definimos las cortaduras de Dedekind y establecemos entre ellas un orden total que extiende al usual de los racionales y en el que se verifica el axioma del supremo.

1. Definición. Sea $\mathbf{r}$ un subconjunto de $\mathbb{Q}$. Se dice que $\mathbf{r}$ es una *cortadura de Dedekind* si se verifican las condiciones

$$(D1) \quad \emptyset \neq \mathbf{r} \neq \mathbb{Q}.$$

$$(D2) \quad p \in \mathbf{r} \wedge q \in \mathbb{Q} \wedge q < p \Rightarrow q \in \mathbf{r}.$$

$$(D3) \quad \forall p \in \mathbf{r} \exists q \in \mathbf{r} : p < q.$$

Es decir, una cortadura de Dedekind es cualquier subconjunto de números racionales que contiene algún número racional pero no todos, que cada número racional que está en el conjunto es menor que cualquiera que no está en el conjunto y que no contiene máximo.

2. Observación. Nótese que si $\mathbf{r}$ es cortadura de Dedekind, entonces $p \in \mathbf{r} \wedge q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbf{r} \Rightarrow p < q$.

3. Definición. A cualquier cortadura de Dedekind la llamamos número real y al conjunto de todos los números reales lo denotamos por $\mathbb{R}$. Es decir,

$$\mathbb{R} = \{\mathbf{r} : \mathbf{r} \text{ es cortadura de Dedekind}\}.$$

4. Notación. Si $q \in \mathbb{Q}$ es claro que $\mathbf{q}^* = \{x \in \mathbb{Q} : x < q\}$ es una cortadura de Dedekind y denotamos $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$ al conjunto $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}} = \{\mathbf{q}^* : q \in \mathbb{Q}\}$.

5. Teorema. La aplicación $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$ dada por $f(q) = \mathbf{q}^*$ es biyectiva.

Demostración. Si $f(p) = f(q)$, entonces $\mathbf{p}^* = \mathbf{q}^*$. Esto implica que $p = q$. En efecto, si fuera $p < q$ eligiendo el racional $r = (p + q)/2$ tendríamos $p < r < q$ con lo cual $r \in \mathbf{q}^*$ y $r \notin \mathbf{p}^*$ lo cual contradice $\mathbf{p}^* = \mathbf{q}^*$. Análogo razonamiento si $q < p$. Concluimos que f es inyectiva. La aplicación f es trivialmente sobreyectiva por construcción. $\square$

Podemos por tanto considerar $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$ como una copia natural de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

6. Teorema. La relación binaria en $\mathbb{R}$ dada por $\mathbf{r} \leq_{\mathbb{R}} \mathbf{s} \Leftrightarrow \mathbf{r} \subset \mathbf{s}$ es de orden.

Demostración. Para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$ se verifica $\mathbf{r} \subset \mathbf{r}$, por tanto $\mathbf{r} \leq_{\mathbb{R}} \mathbf{r}$. Si $\mathbf{r} \leq_{\mathbb{R}} \mathbf{s}$ y $\mathbf{s} \leq_{\mathbb{R}} \mathbf{r}$ entonces $\mathbf{r} \subset \mathbf{s}$ y $\mathbf{s} \subset \mathbf{r}$ con lo cual $\mathbf{r} = \mathbf{s}$. Si $\mathbf{r} \leq_{\mathbb{R}} \mathbf{s}$ y $\mathbf{s} \leq_{\mathbb{R}} \mathbf{t}$ entonces $\mathbf{r} \subset \mathbf{s}$ y $\mathbf{s} \subset \mathbf{t}$ con lo cual $\mathbf{r} \subset \mathbf{t}$ y por tanto $\mathbf{r} \leq_{\mathbb{R}} \mathbf{t}$. $\square$

7. Teorema. Para cada par $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}$ se verifica una y sólo una de las relaciones: $\mathbf{r} = \mathbf{s}$, $\mathbf{r} <_{\mathbb{R}} \mathbf{s}$, $\mathbf{s} <_{\mathbb{R}} \mathbf{r}$. Es decir, la relación $\leq_{\mathbb{R}}$ es de orden total en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$. Entonces, o bien existe $q \in \mathbf{r}$ tal que $q \notin \mathbf{s}$ o bien existe $q \in \mathbf{s}$ tal que $q \notin \mathbf{r}$. Supongamos que ocurre lo primero. Como $q \in \mathbf{r}$, todos los racionales menores que q están contenidos en $\mathbf{r}$. Como $q \notin \mathbf{s}$, todos los racionales en $\mathbf{s}$ son menores que q lo cual implica que $\mathbf{s} \subsetneq \mathbf{r}$. Es decir, $\mathbf{s} <_{\mathbb{R}} \mathbf{r}$. De manera análoga se demuestra que si existe $q \in \mathbf{s}$ tal que $q \notin \mathbf{r}$ entonces $\mathbf{r} <_{\mathbb{R}} \mathbf{s}$. $\square$

Si $p, q \in \mathbb{Q}$ es claro que $p < q$ es equivalente a $\mathbf{p}^* <_{\mathbb{R}} \mathbf{q}^*$ lo cual implica que el orden en $\mathbb{Q}$ es el mismo que en su copia $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$.

8. Conclusión. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales (o cortaduras de Dedekind) es un conjunto totalmente ordenado por la relación $\mathbf{r} \leq_{\mathbb{R}} \mathbf{s} \Leftrightarrow \mathbf{r} \subset \mathbf{s}$ y la restricción de éste orden a la copia $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ es el mismo que el orden natural en $\mathbb{Q}$.

9. Teorema (Axioma del supremo). Todo subconjunto no vacío de números reales y acotado superiormente, tiene supremo.

Demostración. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y $\mathbf{s}$ una cota superior de A . Definimos $\mathbf{t} = \bigcup_{\mathbf{r} \in A} \mathbf{r}$. Veamos que $\mathbf{t}$ es una cortadura de Dedekind.

(D1) Como $A \neq \emptyset$, existe $\mathbf{r}_0 \in A$. Al ser $\mathbf{r}_0 \neq \emptyset$ y $\mathbf{r}_0 \subset \mathbf{t}$, se verifica $\mathbf{t} \neq \emptyset$. Por otra parte, como $\mathbf{s} \neq \mathbb{Q}$ y $\mathbf{s}$ es cota superior de A , tenemos $\mathbf{r} \subset \mathbf{s}$ para todo $\mathbf{r} \in A$ y por tanto $\mathbf{t} = \bigcup_{\mathbf{r} \in A} \mathbf{r} \subset \mathbf{s}$ con lo cual $\mathbf{t} \neq \mathbb{Q}$.

(D2) Sea $p \in \mathbf{t}$. Entonces, $p \in \mathbf{r}_1$ para alguna $\mathbf{r}_1 \in A$. Si $q < p$, entonces $q \in \mathbf{r}_1$, con lo cual $q \in \mathbf{t}$.

(D3) Sea $p \in \mathbf{t}$ y elijamos $r \in \mathbf{r}_1$ tal que $r > p$. Como $\mathbf{r}_1 \subset \mathbf{t}$, se verifica $r \in \mathbf{t}$.

Veamos que $\mathbf{t}$ es extremo superior de A . En efecto, es claro que $\mathbf{r} <_{\mathbb{R}} \mathbf{t}$ para toda $\mathbf{r} \in A$, por tanto, $\mathbf{t}$ es cota superior de A . Supongamos que una cortadura $\mathbf{u}$ satisface $\mathbf{u} <_{\mathbb{R}} \mathbf{t}$. Entonces, existe $q \in \mathbf{t}$ con $q \notin \mathbf{u}$. Como $q \in \mathbf{t}$, ha de cumplirse $q \in \mathbf{r}$ para alguna $\mathbf{r} \in A$. Entonces, $\mathbf{u} <_{\mathbb{R}} \mathbf{r}$ con lo cual, $\mathbf{u}$ no es cota de A . Concluimos que $\mathbf{t} = \sup A$. $\square$

218. Suma de cortaduras de Dedekind

Vamos a definir una operación suma en el conjunto de las cortaduras de Dedekind que le dotan de estructura de grupo abeliano y que contiene como subgrupo al grupo aditivo de los racionales.

1. Definición. Sean $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}$. Se define la suma $+\mathbb{R}$ de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$ como

$$\mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s} = \{p + q : p \in \mathbf{r}, q \in \mathbf{s}\}.$$

2. Teorema. La operación $+\mathbb{R}$ es cerrada en $\mathbb{R}$, es decir $\mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s}$ es una cortadura de Dedekind.

Demostración. (D1) Por ser $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ cortaduras existe $p \in \mathbf{r}$ y existe $q \in \mathbf{s}$ con lo cual $p + q \in \mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s}$ es decir, $\mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s} \neq \emptyset$. Por ser $\mathbf{r}, \mathbf{s}$ cortaduras existen a, b racionales tales que $a > p$ para todo $p \in \mathbf{r}$ y $b > q$ para todo $q \in \mathbf{s}$. Entonces, $a + b > p + q$ para todo $p \in \mathbf{r}$ y para todo $q \in \mathbf{s}$ luego $a + b \notin \mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s}$. Por tanto, $\mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s} \neq \mathbb{Q}$.

(D2) Sea $p \in \mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s}$. Entonces, $p = r + s$ con $r \in \mathbf{r}$ y $s \in \mathbf{s}$. Si $q < p$ entonces $q - s < r$ y por tanto $q - s \in \mathbf{r}$. Tenemos $q = (q - s) + s$ con lo cual $q \in \mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s}$.

(D3) Sea $p + q$ es un elemento de $\mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s}$ con $p \in \mathbf{r}$ y $q \in \mathbf{s}$. Existen $u \in \mathbf{r}$ y $v \in \mathbf{s}$ tales que $p < u$ y $q < v$. Entonces, $p + v < u + v \in \mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s}$. $\square$

3. Teorema. La operación $+\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es asociativa.

Demostración. Sean $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}$. Si $a \in (\mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s}) + \mathbb{R} \mathbf{t}$ entonces $a = p + q$ con $p \in \mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s}$ y $q \in \mathbf{t}$. Pero $p = p_1 + p_2$ con $p_1 \in \mathbf{r}$ y $p_2 \in \mathbf{s}$. Por la propiedad asociativa de la suma en $\mathbb{Q}$,

$$a = (p_1 + p_2) + q = p_1 + (p_2 + q) \in \mathbf{r} + \mathbb{R} (\mathbf{s} + \mathbb{R} \mathbf{t})$$

es decir, $(\mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s}) + \mathbb{R} \mathbf{t} \subset \mathbf{r} + \mathbb{R} (\mathbf{s} + \mathbb{R} \mathbf{t})$. De manera análoga se demuestra que $\mathbf{r} + \mathbb{R} (\mathbf{s} + \mathbb{R} \mathbf{t}) \subset (\mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s}) + \mathbb{R} \mathbf{t}$ lo cual prueba la propiedad asociativa de $+\mathbb{R}$. $\square$

4. Teorema. La operación $+\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es conmutativa.

Demostración. Para todo $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}$ y al ser la suma en $\mathbb{Q}$ es conmutativa, $\mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{s} = \{p + q : p \in \mathbf{r}, q \in \mathbf{s}\} = \{q + p : q \in \mathbf{s}, p \in \mathbf{r}\} = \mathbf{s} + \mathbb{R} \mathbf{r}$. $\square$

5. Teorema. La cortadura $\mathbf{0}^* = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ satisface $\mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{0}^* = \mathbf{r}$ para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si $a \in \mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{0}^*$, entonces $a = p + x$ con $p \in \mathbf{r}$ y $x < 0$ es decir, $a < p$ y por tanto $a \in \mathbf{r}$. Si $a \in \mathbf{r}$ existe $q \in \mathbf{r}$ tal que $a < q$. Entonces, $a = q + (a - q)$ y al ser $a - q < 0$ se verifica que $a \in \mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{0}^*$. Concluimos que $\mathbf{r} + \mathbb{R} \mathbf{0}^* = \mathbf{r}$. $\square$

6. Definición. Si $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$, se define $-\mathbf{r} := \{q \in \mathbb{Q} : \exists p > q \text{ con } -p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbf{r}\}$.

De forma equivalente, $-\mathbf{r} = \{q \in \mathbb{Q} : \exists x \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ con } -q - x \notin \mathbf{r}\}$. Es decir, algún número racional más pequeño que $-q$ no está en $\mathbf{r}$.

7. Teorema. Si $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$, entonces $-\mathbf{r}$ es una cortadura de Dedekind.

Demostración. (D1) Sea $q \in \mathbf{r}$ y $s \in \mathbb{Q}$ tal que $s > -q$. Entonces, $-s < q$ con lo cual $-s \in \mathbf{r}$ y por tanto $-q \notin -\mathbf{r}$. Es decir, $-\mathbf{r} \neq \mathbb{Q}$. Sea ahora $u \in \mathbb{Q} \setminus \mathbf{r}$. Dado que $-u > -u - 1$ y $-(-u) = u \in \mathbb{Q} \setminus \mathbf{r}$, se verifica $-u - 1 \in -\mathbf{r}$. Es decir, $-\mathbf{r} \neq \emptyset$.

(D2) Si $q \in -\mathbf{r}$, entonces existe p racional con $p > q$ y $-p \notin \mathbf{r}$. Si q' es racional con $q' < q$, entonces $p > q'$ con $-p \notin \mathbf{r}$, luego $q' \in -\mathbf{r}$.

(D3) Sea $q \in -\mathbf{r}$ y $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ tal que $-q - x \notin \mathbf{r}$. Sea $t = q + (x/2)$. Entonces, $t > q$ y $-t - (x/2) = -q - x \notin \mathbf{r}$ con lo cual, $t \in -\mathbf{r}$. $\square$

8. Teorema. Para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$ se verifica $\mathbf{r} +_{\mathbb{R}} (-\mathbf{r}) = \mathbf{0}^*$.

Demostración. Sean $q_1 \in \mathbf{r}$ y $q_2 \in -\mathbf{r}$. Existe $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ tal que $-q_2 - x \notin \mathbf{r}$. Entonces, $-q_2 > -q_2 - x$ lo cual implica que $-q_2 \notin \mathbf{r}$, con lo cual $-q_2 > q_1$ o bien $q_1 + q_2 < 0$. Es decir, $q_1 + q_2 \in \mathbf{0}^*$. Hemos demostrado que $\mathbf{r} +_{\mathbb{R}} (-\mathbf{r}) \subset \mathbf{0}^*$. Sea ahora $a \in \mathbf{0}^*$. Entonces, $b = -a/2 > 0$. Por la propiedad arquimediana de $\mathbb{Q}$, existe un entero n tal que $nb \in \mathbf{r}$ y $(n+1)b \notin \mathbf{r}$. Si $c = -(n+2)b$ entonces, $c \in -\mathbf{r}$ pues $-c - b = (n+1)b \notin \mathbf{r}$. Podemos por tanto escribir,

$$\underbrace{nb}_{\in \mathbf{r}} + \underbrace{c}_{\in -\mathbf{r}} = nb - (n+2)b = -2b = a$$

en consecuencia, $\mathbf{0}^* \subset \mathbf{r} +_{\mathbb{R}} (-\mathbf{r})$. $\square$

De los teoremas anteriores deducimos el siguiente corolario:

9. Corolario. $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}})$ es un grupo abeliano.

10. Teorema. La aplicación $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(q) = \mathbf{q}^* = \{x \in \mathbb{Q} : x < q\}$$

es homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}})$.

Demostración. Para todo $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tenemos que demostrar que $\varphi(q_1 + q_2) = \varphi(q_1) + \varphi(q_2)$. Si $x \in \varphi(q_1 + q_2)$, entonces $x < q_1 + q_2$. Elijamos t tal que $2t = q_1 + q_2 - x$, con lo cual $t > 0$. Sean $q'_1 = q_1 - t$ y $q'_2 = q_2 - t$. Se verifica $q'_1 \in \varphi(q_1)$ y $q'_2 \in \varphi(q_2)$ y además $x = q'_1 + q'_2$ lo cual implica que $x \in \varphi(q_1) + \varphi(q_2)$.

Sea ahora $x \in \varphi(q_1) + \varphi(q_2)$. Entonces $x = u + v$ con $u < q_1$ y $v < q_2$, luego $x < q_1 + q_2$ lo cual implica que $x \in \varphi(q_1 + q_2)$. $\square$

Según el teorema 5, la aplicación φ es biyectiva. Entonces, $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$ es isomorfismo con lo cual, la estructura del grupo aditivo $\mathbb{Q}$ se traslada da a su copia $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$. Obtenemos el siguiente corolario:

11. Corolario. El grupo aditivo de los racionales es subgrupo del grupo aditivo de los reales.

219. Ecuación cúbica

Estudiamos el método de resolución de la ecuación de tercer grado o cúbica.

1. Definición. Se llama ecuación cúbica o de tercer grado a toda ecuación de la forma

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad (a, b, c \in \mathbb{C}).$$

2. Teorema. La sustitución $x = y - a/3$ transforma la ecuación de tercer grado $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $(a, b, c \in \mathbb{C})$ en una ecuación equivalente de la forma

$$y^3 + py + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{C}.$$

Demostración. Tenemos

$$\begin{aligned} \left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c &= 0 \\ \Leftrightarrow y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3}y + c &= 0. \end{aligned}$$

Los términos de segundo grado se cancelan, en consecuencia la ecuación anterior es de la forma $y^3 + py + q = 0$. $\square$

3. Nota. El teorema anterior reduce el calculo de las soluciones de la ecuación cúbica al cálculo de las soluciones de la ecuación $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{C}$.

4. Teorema. Sea la ecuación

$$(E) : \quad x^3 + px + q = 0 \text{ con } p, q \in \mathbb{C}.$$

Entonces, 1) Las soluciones de esta ecuación son

$$x = \underbrace{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}_{\alpha} + \underbrace{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}_{\beta}$$

siempre y cuando $\alpha\beta = -p/3$.

2) Sean $1, \epsilon, \epsilon^2$ las raíces cúbicas de la unidad, es decir

$$1, \quad \epsilon = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \epsilon^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Supongamos que α_1 y β_1 son valores de α y β respectivamente tales que $\alpha_1\beta_1 = -p/3$. Entonces, las soluciones de la ecuación dada son

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1 \\ x_2 &= \alpha_1\epsilon + \beta_1\epsilon^2 \\ x_3 &= \alpha_1\epsilon^2 + \beta_1\epsilon. \end{aligned}$$

Demostración. 1) Por el teorema fundamental del álgebra, la ecuación (E) tiene tres soluciones complejas (repetidas o no). Sea x_0 una de estas soluciones y consideremos el polinomio $f(u) = u^2 - x_0u - p/3$. Éste polinomio tiene dos raíces complejas α y β (repetidas o no) y usando las relaciones de Cardano-Vieta:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha + \beta = x_0 \\ \alpha\beta = -p/3 \end{cases} &\Rightarrow (\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0 \\ &\Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \underbrace{(3\alpha\beta + p)}_{=0}(\alpha + \beta) + q = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = -q \\ \alpha^3\beta^3 = -p^3/27. \end{cases} \end{aligned}$$

Los números α^3 y β^3 son por tanto soluciones de la ecuación $z^2 + qz - p^3/27 = 0$, en consecuencia

$$\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad \beta^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ con } \alpha\beta = -p/3,$$

lo cual demuestra el aserto 1).

2) Tenemos tres valores para α y otros tres para β . Ahora bien, ha de cumplirse necesariamente $\alpha\beta = -p/3$. Sean α_1 y β_1 dos valores para los cuales $\alpha_1\beta_1 = -p/3$ y sean $1, \epsilon, \epsilon^2$ las tres raíces de la unidad. Los tres valores de α son $\alpha_1, \alpha_1\epsilon$ y $\alpha_1\epsilon^2$ y los tres de β son $\beta_1, \beta_1\epsilon$ y $\beta_1\epsilon^2$. Al ser

$$(\alpha_1\epsilon)(\beta_1\epsilon^2) = \alpha_1\beta_1 = -p/3, \quad (\alpha_1\epsilon^2)(\beta_1\epsilon) = \alpha_1\beta_1 = -p/3,$$

las tres soluciones de (E) son

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1 \\ x_2 &= \alpha_1\epsilon + \beta_1\epsilon^2 \\ x_3 &= \alpha_1\epsilon^2 + \beta_1\epsilon. \end{aligned}$$

□

5. Ejemplo. Resolvamos la ecuación $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$ usando el teorema anterior. Efectuando la sustitución $x = y - 1$:

$$(y - 1)^3 + 3(y - 1)^2 - 3(y - 1) - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 6y - 9 = 0. \quad (*)$$

Tenemos $p = -6$, $q = -9$, por tanto

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8}, \quad \beta = \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{1}$$

Para $\alpha_1 = 2$ y $\beta_1 = 1$ obtenemos $\alpha_1\beta_1 = 2 = -p/3$, luego las soluciones de (*) son

$$y_1 = \alpha_1 + \beta_1 = 3,$$

$$y_2 = \alpha_1\epsilon + \beta_1\epsilon^2 = 2 \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$y_3 = \alpha_1\epsilon^2 + \beta_1\epsilon = 2 \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

En consecuencia, las soluciones de la ecuación dada son

$$x_1 = y_1 - 1 = 2,$$

$$x_2 = y_2 - 1 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$x_3 = y_3 - 1 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

6. Ejemplo. Resolvamos la ecuación $x^3 - 12x + 16 = 0$. Tenemos $p = -12$, $q = 16$, por tanto

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \dots = \sqrt[3]{-8},$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \dots = \sqrt[3]{-8},$$

Para $\alpha_1 = -2$ y $\beta_1 = -2$ obtenemos $\alpha_1\beta_1 = 4 = -p/3$, luego las soluciones de la ecuación dada son

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1 = -4,$$

$$x_2 = \alpha_1\epsilon + \beta_1\epsilon^2 = -2 \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} - 2 \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = 2,$$

$$x_3 = \alpha_1\epsilon^2 + \beta_1\epsilon = -2 \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} - 2 \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = 2.$$

7. Teorema. Sea la ecuación de tercer grado $x^3 + px + q = 0$ con p, q reales. Al número

$$D = -4p^3 - 27q^2 = -108 \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)$$

se le llama *discriminante* de la ecuación.. Entonces,

- (i) Si $D < 0$, la ecuación tiene una solución real y dos imaginarias conjugadas.
- (ii) Si $D = 0$, todas las soluciones son reales siendo dos de ellas iguales entre sí.
- (iii) Si $D > 0$, la ecuación tiene tres soluciones reales distintas.

Demostración. (i) Si $D < 0$ entonces, $q^2/4 + p^3/27 > 0$ y por tanto $-q/2 \pm \sqrt{q^2/4 + p^3/27} \in \mathbb{R}$. Tenemos

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

con lo cual α tiene un valor real y dos imaginarios conjugados (idem para β). Sea α_1 el valor de α . Una solución de la ecuación es $x_1 = \alpha_1 + \beta_1$ y al ser $\alpha_1\beta_1 = -p/3$, β_1 es necesariamente el valor real de β . Obsérvese que si $p = 0$, entonces $q \neq 0$, la ecuación es $x^3 + q = 0$ y ya estaría demostrado. Las otras dos raíces son

$$x_2 = \alpha_1\epsilon + \beta_1\epsilon^2 = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + i\sqrt{3}\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}$$

$$x_2 = \alpha_1\epsilon^2 + \beta_1\epsilon = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - i\sqrt{3}\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}$$

y al ser $\alpha_1 \neq \beta_1$, entonces x_2, x_3 son imaginarias conjugadas.

(ii) Si $D = 0$, entonces $\alpha = \sqrt[3]{-q/2}$ y $\beta = \sqrt[3]{-q/2}$. Si $q = 0$, entonces $p = 0$ y la ecuación es $x^3 = 0$ que tiene a $x = 0$ como solución triple. Si $q \neq 0$, sean α_1 y β_1 los valores reales de α y β . Como $\alpha\beta = -p/3$ (real), necesariamente $\alpha_1\beta_1 = -p/3$. Pero además, $\alpha_1 = \beta_1$. Entonces, las soluciones de la ecuación son

$$x_1 = 2\alpha_1, \quad x_2 = \alpha_1\epsilon + \alpha_1\epsilon^2 = \alpha_1\epsilon^2 + \alpha_1\epsilon = x_3$$

es decir, en cualquier caso la ecuación tiene tres soluciones reales, una de ellas al menos doble.

(iii) Si $D > 0$ entonces entonces, $q^2/4 + p^3/27 < 0$ y por tanto todos los valores de α y β son imaginarios. Al ser la ecuación de tercer grado y con coeficientes reales, ha de tener al menos un solución real $x_1 = \alpha_1 + \beta_1$. Como $\alpha_1\beta_1 = -p/3$ (real), entonces α_1 y β_1 son soluciones de una ecuación

de segundo grado con coeficientes reales, es decir α_1 y β_1 son conjugados entre sí. Pero también lo son $\alpha_1\epsilon$ y $\beta_1\epsilon^2$ pues $\overline{\alpha_1\epsilon} = \overline{\alpha_1}\bar{\epsilon} = \beta_1\epsilon^2$. De la misma forma, también son conjugados $\alpha_1\epsilon^2$ y $\beta_1\epsilon$. Por tanto las tres soluciones de la ecuación $x_1 = \alpha_1 + \beta_1$, $x_2 = \alpha_1\epsilon + \beta_1\epsilon^2$ y $x_3 = \alpha_1\epsilon^2 + \beta_1\epsilon$ son reales. Veamos que son distintas. Denotemos ahora por a, b, c a las tres soluciones reales de la ecuación, entonces son suma de α y β con

$$\alpha = \alpha_1 \text{ ó } \alpha_1\epsilon \text{ ó } \alpha_1\epsilon^2, \quad \beta = \beta_1 \text{ ó } \beta_1\epsilon \text{ ó } \beta_1\epsilon^2.$$

Supongamos que ocurriera $a = b$ y sea $c = \alpha'_1 + \beta'_1$. Entonces, $a = \alpha'_1\epsilon + \beta'_1\epsilon^2$ y $b = \alpha'_1\epsilon^2 + \beta'_1\epsilon$. Esto implicaría $\alpha'_1(\epsilon - \epsilon^2) = \beta'_1(\epsilon - \epsilon^2)$, es decir, $\alpha'_1 = \beta'_1$. Pero esto es absurdo pues α'_1 y β'_1 son imaginarios conjugados. $\square$

8. Ejemplo. Consideremos la ecuación $x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$. Efectuando la sustitución $x = y - 1$ obtenemos $y^3 - 6y - 9 = 0$, es decir $p = -6$, $q = -9$. El discriminante es

$$D = -108 \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right) = -108 \left(\frac{81}{4} - \frac{216}{27} \right) < 0.$$

La ecuación tiene una solución real y dos imaginarias conjugadas.

9. Ejemplo. Consideremos la ecuación $x^3 - 12x + 16 = 0$. Tenemos $p = -12$, $q = 16$, por tanto

$$D = -108 \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right) = -108 \left(\frac{256}{4} - \frac{216}{27} \right) = 0.$$

Todas las soluciones son reales siendo dos de ellas iguales entre sí

10. Ejemplo. Consideremos la ecuación $x^3 - 10x + 30 = 0$. Tenemos $p = -10$, $q = 30$, por tanto

$$D = -108 \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right) = -108 \left(\frac{900}{4} - \frac{1000}{27} \right) > 0.$$

La ecuación tiene tres soluciones reales distintas.

220. Ecuación cuártica

Proporcionamos un método para la resolución de la ecuación de cuarto grado o cuártica (Método de Ferrari).

1. Nota. Es claro que toda ecuación cuártica o de cuarto grado con coeficientes complejos se puede expresar en la forma

$$(E): x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2cx + d = 0, \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}).$$

2. Teorema. La ecuación de cuarto grado $(E) : x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2cx + d = 0$ con coeficientes complejos a, b, c, d se reduce a la resolución de una ecuación cúbica auxiliar y a la de dos cuadráticas (Método de Ferrari).

Demostración. Escribamos la igualdad

$$x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2cx + d = (x^2 + ax + A)^2 - (Bx + C)^2.$$

Desarrollando el segundo miembro obtenemos

$$\begin{aligned} x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2cx + d &= \\ x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2A - B^2)x^2 + 2(aA - BC)x + A^2 - C^2. \end{aligned}$$

Identificando coeficientes,

$$\begin{cases} b = a^2 + 2A - B^2 \\ c = aA - BC \\ d = A^2 - C^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B^2 = a^2 + 2A - b & (1) \\ BC = aA - c & (2) \\ C^2 = A^2 - d. & (3) \end{cases}$$

Entonces, $(1) \times (3)$ proporciona $B^2C^2 = (a^2 + 2A - b)(A^2 - d)$ y $(2)^2$ proporciona $B^2C^2 = (aA - c)^2$. Eliminando B^2C^2 queda

$$(aA - c)^2 = (a^2 + 2A - b)(A^2 - d).$$

Obtenemos así una ecuación de tercer grado en A . Elegida una solución y hallando B y C , podemos expresar la ecuación de cuarto grado en la forma:

$$(x^2 + ax + A)^2 - (Bx + C)^2 = 0$$

o bien de la forma $[x^2 + (a + B)x + C] \cdot [x^2 + (a - B)x - C] = 0$, lo cual equivale a resolver dos ecuaciones cuadráticas. $\square$

3. Ejemplo. Resolvamos la ecuación de cuarto grado $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3 = 0$. En este caso, $a = 1$ por tanto tenemos que hallar A, B, C tales que

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3 = (x^2 + x + A)^2 - (Bx + C)^2.$$

Desarrollando el segundo miembro obtenemos

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + A^2 + 2x^3 + 2Ax^2 + 2Ax - B^2x^2 - C^2 - 2BCx &= \\ = x^4 + 2x^3 + (1 + 2A - B^2)x^2 + 2(A - BC)x + A^2 - C^2. \end{aligned}$$

Identificando coeficientes,

$$\begin{cases} -1 = 1 + 2A - B^2 \\ -1 = A - BC \\ -3 = A^2 - C^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B^2 = 2 + 2A & (1) \\ BC = 1 + A & (2) \\ C^2 = 3 + A^2. & (3) \end{cases}$$

Entonces, $(1) \times (3)$ proporciona $B^2 C^2 = (2 + 2A)(3 + A^2)$ y $(2)^2$ proporciona $B^2 C^2 = (1 + A)^2$. Eliminando $B^2 C^2$ queda

$$(1 + A)^2 = (2 + 2A)(3 + A^2).$$

Una solución de esta ecuación de tercer grado es $A = -1$, y para este valor de A obtenemos $B^2 = 0$, es decir $B = 0$ y $C^2 = 4$ es decir $C = \pm 2$, y elegimos por ejemplo $C = 2$. Podemos por tanto escribir la ecuación dada en la forma:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3 &= (x^2 + x - 1)^2 - 2^2 \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + x + 1 &= 0 \vee x^2 + x - 3 = 0. \end{aligned}$$

Resolviendo estas dos ecuaciones cuadráticas obtenemos las soluciones de la ecuación de cuarto grado dada:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

221. Orden lexicográfico

1. Teorema. Sean $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ dos conjuntos ordenados. Definimos en $A \times B$ la relación

$$(a, b) \leq (a', b') \Leftrightarrow a <_A a' \vee (a = a' \wedge b \leq_B b').$$

Entonces,

- 1) $\leq$ es relación de orden en $A \times B$ (se le llama orden *lexicográfico*).
- 2) Si $\leq_A$ y $\leq_B$ son de orden total. también $\leq$ es de orden total.

Demostración. 1) (a) *Reflexiva.* Para todo $(a, b) \in A \times B$ se verifica $a = a$ y $b \leq_B b$, lo cual implica $(a, b) \leq (a, b)$.

(b) *Antisimétrica.* Sean (a, b) y (a', b') , elementos de $A \times B$ con $(a, b) \leq (a', b')$ y $(a', b') \leq (a, b)$. Si $a = a'$, entonces $b \leq_B b'$ y $b' \leq_B b$. Es decir, $a = a'$ y $b = b'$, luego $(a, b) = (a', b')$. No puede ocurrir $a \neq a'$ pues si así fuera, $a <_A a'$ y $a' <_A a$ (absurdo).

(c) *Transitiva.* Sean (a_1, b_1) , (a_2, b_2) y (a_3, b_3) elementos de $A \times B$ tales que $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ y $(a_2, b_2) \leq (a_3, b_3)$. Tenemos,

$$a_1 = a_2 \Rightarrow b_1 \leq_B b_2 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = a_3 \Rightarrow b_2 \leq_B b_3 \\ a_2 \neq a_3 \Rightarrow a_2 <_A a_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_3 \wedge b_1 \leq_B b_3 \\ a_1 \neq a_3 \wedge a_1 <_A a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1, b_1) \leq (a_3, b_3) \\ (a_1, b_1) \leq (a_3, b_3) \end{cases}.$$

Es decir, si $a_1 = a_2$, en cualquier caso ocurre $(a_1, b_1) \leq (a_3, b_3)$. Analicemos ahora el caso $a_1 \neq a_2$.

$$\begin{aligned} a_1 \neq a_2 \Rightarrow a_1 <_A a_2 &\Rightarrow \begin{cases} a_2 = a_3 \Rightarrow a_1 <_A a_3 \\ a_2 \neq a_3 \Rightarrow a_2 <_A a_3 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a_1 <_A a_3 \\ a_1 <_A a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1, b_1) \leq (a_3, b_3) \\ (a_1, b_1) \leq (a_3, b_3) \end{cases}. \end{aligned}$$

Es decir, si $a_1 \neq a_2$, en cualquier caso ocurre $(a_1, b_1) \leq (a_3, b_3)$. Concluimos pues que $\leq$ es relación de orden en $A \times B$.

2) Sean $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ elementos de $A \times B$. Puede ocurrir $a_1 = a_2$ o $a_1 \neq a_2$. Si $a_1 = a_2$, o bien $b_1 \leq_B b_2$ o bien $b_2 \leq_B b_1$, lo cual implica que o bien $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$, o bien $(a_2, b_2) \leq (a_1, b_1)$. Si $a_1 \neq a_2$, o bien $a_1 <_A a_2$ o bien $a_2 <_A a_1$, lo cual implica que o bien $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$, o bien $(a_2, b_2) \leq (a_1, b_1)$. Hemos demostrado que $\leq$ es relación de orden total en $A \times B$. $\square$

2. Generalización. Habiendo definido el orden lexicográfico para el producto cartesiano de dos conjuntos, podemos extender la definición para el producto de $n > 2$ conjuntos por recursión mediante la identificación $\prod_{k=1}^n A_k := \left(\prod_{k=1}^{n-1} A_k \right) \times A_n$.

3. Ejemplo. Sea $A = \{a, b, c, d, \dots, w, x, y, z\}$ el conjunto de las letras del abecedario español y consideremos el orden del diccionario $a < b, c < d < \dots < w < x < y < z$. Denotemos por $P = \prod_{k=1}^5 A_k$ con $A_i = A$ para todo k y denotemos abreviadamente a $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ por $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$. Tendríamos (por ejemplo) en P y según el orden lexicográfico,

ábaco < abadí < gabán < gacha < ocase < vacas < vacío < vacuo < yaces.

222. Topología del orden

1. Definición. Sea X un conjunto y $\leq$ una relación de orden total en X . Si $a, b \in X$ con $a < b$ se definen los subconjuntos de X :

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in X : a < x < b\}, \\ (a, b] &= \{x \in X : a < x \leq b\}, \\ [a, b) &= \{x \in X : a \leq x < b\}, \\ [a, b] &= \{x \in X : a \leq x \leq b\}, \end{aligned}$$

denominados respectivamente intervalo de extremos a y b , *abierto*, *semi-abierto por la izquierda*, *semi-abierto por la derecha* y *cerrado*.

2. Teorema. Sea X un conjunto totalmente ordenado con al menos dos elementos y $\mathcal{B}$ la colección de subconjuntos de X de los siguientes tipos:

- (1) Todos los intervalos abiertos (a, b) .
- (2) Todos los intervalos de la forma $[a_0, b)$ con a_0 elemento mínimo de X (si tal elemento existe).
- (3) Todos los intervalos de la forma $(a, b_0]$ con b_0 elemento máximo de X (si tal elemento existe).

Entonces, $\mathcal{B}$ es base para una topología en X .

Demostración. Tenemos los siguientes casos,

- (a) Si X no tiene elemento mínimo ni elemento máximo,

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in X, a < b\}.$$

- (b) Si X tiene elemento mínimo a_0 pero no máximo,

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in X, a < b\} \cup \{[a_0, b) : b \in X\}.$$

- (c) Si X tiene elemento máximo b_0 pero no mínimo,

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in X, a < b\} \cup \{(a, b_0] : a \in X\}.$$

- (d) Si X tiene elemento mínimo a_0 y máximo b_0 ,

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in X, a < b\} \cup \{[a_0, b) : b \in X\} \cup \{(a, b_0] : a \in X\}.$$

En cada caso, es claro que $\mathcal{B}$ recubre a X y la intersección no vacía de elementos de $\mathcal{B}$ es de nuevo un elemento de $\mathcal{B}$, por tanto $\mathcal{B}$ es una base para una topología en X . $\square$

3. Definición. A la topología que define $\mathcal{B}$ se la llama *topología del orden* en X .

4. Ejemplos

- 1) Si $X = \mathbb{R}$ con el orden usual, estamos en el caso (a) y la topología del orden es la topología usual de $\mathbb{R}$.
- 2) Si $X = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ con el orden usual, estamos en el caso (d) y la topología del orden es la topología usual de la recta ampliada $\overline{\mathbb{R}}$.
- 3) Si $X = \mathbb{Z}_{>0}$ con el orden usual, estamos en el caso (b) y la topología del orden T_o es la topología discreta. Para demostrarlo basta ver que los subconjuntos unitarios de X son abiertos. Si $n > 1$ entonces $\{n\} = (n-1, n+1) \in T_o$ y por otra parte, $\{1\} = [1, 2) \in T_o$.
- 4) Si $X = \mathbb{Z}_{<0}$ con el orden usual, estamos en el caso (c) y de manera análoga a la del ejemplo anterior se demuestra que la topología del orden T_o es la topología discreta.

5) Sea $X = \{1, 2\} \times \mathbb{Z}_{>0}$. Para evitar el posible problema notacional entre par ordenado e intervalo abierto, a los elementos de X los denotamos por $a \times b$ por tanto, $X = \{m \times n : m \in \{1, 2\}, n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. Consideremos en X el orden lexicográfico es decir, $a \times b \leq c \times d \Leftrightarrow a < c$ o $(a = c \text{ y } b \leq d)$, que según sabemos es un orden total. Denotando $a_1 = 1 \times 1$ y $b_n = 2 \times n$, podemos escribir el orden lexicográfico en X de la forma

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < b_1 < b_2 < b_3 < \dots$$

por tanto, existe elemento mínimo a_1 y no existe elemento máximo. Ahora, la topología del orden en X no es la topología discreta. En efecto, $\{b_1\}$ no es abierto pues cualquier abierto que contenga a b_1 ha de contener un elemento de la base que contiene a b_1 y por tanto ha de contener elementos de la sucesión a_n .

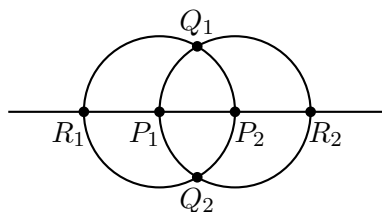
223. Regla y compás

Sea $\mathcal{P}_0$ un subconjunto de puntos del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ y admitamos las siguientes construcciones:

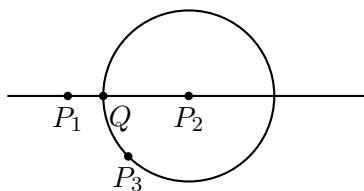
- (a) *Regla*: trazar la recta que pasa por dos puntos distintos de $\mathcal{P}_0$.
- (b) *Compás*: trazar la circunferencia de centro un punto de $\mathcal{P}_0$ y radio la distancia entre dos puntos de $\mathcal{P}_0$.

1. Definición. Se dice que un punto P del plano es *construible en un sólo paso por regla y compás* a partir de $\mathcal{P}_0$ si y sólo si, P es la intersección de una recta con una recta, una recta con un círculo o un círculo con círculo, siendo éstas rectas y círculos contruidos con regla y compás a partir de $\mathcal{P}_0$.

2. Ejemplo. Sea $\mathcal{P}_0 = \{P_1, P_2\}$. Los puntos construibles por regla y compás en un un sólo paso a partir de $\mathcal{P}_0$ son Q_1, Q_2, R_1, R_2 .



3. Ejemplo. Sea $\mathcal{P}_0 = \{P_1, P_2, P_3\}$. El punto Q es construible en un sólo paso por regla y compás a partir de $\mathcal{P}_0$.



4. Definición. Sea $\mathcal{P}_0$ un subconjunto de puntos del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ y sea $Q_1, Q_2, \dots, Q_n = Q$ una sucesión finita de puntos del plano. Se dice que Q es *construible por regla y compás* a partir de $\mathcal{P}_0$ si y sólo si para todo $j = 1, \dots, n$ se verifica que Q_j es construible en un sólo paso por regla y compás a partir de $\mathcal{P}_0 \cup \{Q_1, \dots, Q_{j-1}\}$.

5. Ejemplo. Consideremos $\mathcal{P}_0 = \{P_1, P_2\}$ como en el ejemplo 2. El punto medio del segmento P_0P_1 es construible por regla y compás a partir de $\{P_1, P_2\}$, para ello basta usar el método clásico de construcción:

1. Trazamos la recta P_1P_2 (regla).
2. Trazamos la circunferencia de centro P_2 y radio P_1P_2 (compás).
3. Trazamos la circunferencia de centro P_1 y radio P_1P_2 (compás).
4. Sean Q_1, Q_2 las intersecciones de las anteriores circunferencias.
5. Trazamos la recta Q_1Q_2 (regla).
6. Si Q_3 el punto de intersección de las rectas P_1P_2 y Q_1Q_2 , entonces Q_3 es el punto medio del segmento P_1P_2 .

A continuación vamos a usar la teoría de extensiones de cuerpos para dar una condición necesaria para que un punto Q sea construible (por regla y compás) a partir de un conjunto $\mathcal{P}_0$ de puntos del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. Para ello, llamemos K_0 al subcuerpo de $\mathbb{R}$ generado por las abscisas y las ordenadas de todos los puntos de $\mathcal{P}_0$. Dada una sucesión de puntos $Q_1, Q_2, \dots, Q_n = Q$ con $Q_j = (x_j, y_j)$ tal que Q es construible a partir de $\mathcal{P}_0$, definimos inductivamente el cuerpo $K_j = K_{j-1}(x_j, y_j)$ en donde $K_{j-1}(x_j, y_j)$ representa (como en la notación habitual), el menor subcuerpo de $\mathbb{R}$ que contiene a $K_{j-1} \cup \{x_j, y_j\}$. Tenemos así construida una torre de subcuerpos

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \mathbb{R}.$$

6. Lema. Con las notaciones anteriores, x_j e y_j son ceros en K_j de polinomios cuadráticos o de primer grado sobre K_{j-1} .

Demostración. Tenemos que considerar tres casos: recta intersección con circunferencia, circunferencia intersección con circunferencia y recta intersección con recta.

(a) *Recta intersección con circunferencia.* Sean $A(p, q)$, $B(r, s)$, $C(t, u)$ puntos cuyas coordenadas pertenecen a K_{j-1} . La ecuación de la recta que pasa los puntos A y B es

$$\frac{x-p}{r-p} = \frac{y-q}{s-q}. \quad (1)$$

La ecuación de una circunferencia de centro C y radio w es

$$(x-t)^2 + (y-u)^2 = w^2. \quad (2)$$

Como w^2 es la distancia al cuadrado entre dos puntos cuyas coordenadas pertenecen a K_{j-1} se verifica $w^2 \in K_{j-1}$ como consecuencia del teorema de Pitágoras. Eliminando y entre las ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$$(x-t)^2 + \left(\frac{s-q}{r-p}(x-p) + q-u \right)^2 = w^2.$$

De esta forma, las abscisas de los puntos de intersección de (1) y (2) son ceros en K_j de un polinomio cuadrático con coeficientes en K_{j-1} . Análogo razonamiento para las ordenadas.

(b) *Circunferencia intersección con circunferencia.* Sean $C(t, u)$, $C'(t', u')$, puntos cuyas coordenadas pertenecen a K_{j-1} . La ecuación de una circunferencia de centro C y radio w es

$$(x-t)^2 + (y-u)^2 = w^2, \quad (3)$$

y la ecuación de una circunferencia de centro C' y radio w' es

$$(x-t')^2 + (y-u')^2 = w'^2. \quad (4)$$

Como en el caso (b), w^2 y w'^2 pertenecen a K_{j-1} . Restando las igualdades (3) y (4) obtenemos una relación lineal entre x e y . Despejando en esta relación x en función de y (o y en función de x) y sustituyendo en (3) o (4) deducimos que las abscisas y ordenadas de los puntos de intersección de (3) y (4) son ceros en K_j de un polinomio cuadrático con coeficientes en K_{j-1} .

(c) *Recta intersección con recta.* Sean $A(p, q)$, $B(r, s)$, $A'(p', q')$, $B'(r', s')$, puntos cuyas coordenadas pertenecen a K_{j-1} . La ecuación de la recta que pasa los puntos A' y B' es

$$\frac{x-p'}{r'-p'} = \frac{y-q'}{s'-q'}, \quad (5)$$

y la ecuación de la recta que pasa los puntos A y B es

$$\frac{x-p}{r-p} = \frac{y-q}{s-q}. \quad (6)$$

Despejando x en función de y (o y en función de x) en (5) y sustituyendo en (6) deducimos que las abscisas y ordenadas de los puntos de intersección de (5) y (6) son ceros en K_j de un polinomio de primer grado con coeficientes en K_{j-1} . $\square$

7. Teorema. Si el punto $Q(x, y)$ es construible por regla y compas a partir del subconjunto $\mathcal{P}_0$ de $\mathbb{R}^2$ y K_0 es el subuerpo de $\mathbb{R}$ generado por las abscisas y ordenadas de los puntos de $\mathcal{P}_0$, entonces los grados $[K_0(x) : K_0]$ y $[K_0(y) : K_0]$ son potencias de 2.

Demostración. Usamos las mismas notaciones acumuladas. Por el lema anterior, $[K_{j-1}(x_j) : K_{j-1}]$ es igual a 1 o a 2, siendo 2 si el polinomio cuadrático sobre K_{j-1} que anula a x_j es irreducible y 1 en otro caso. Análogamente $[K_{j-1}(y_j) : K_{j-1}]$ es igual a 1 o a 2. Por el teorema de la torre,

$$\begin{aligned} [K_j : K_{j-1}] &= [K_{j-1}(x_j, y_j) : K_{j-1}] \\ &= [K_{j-1}(x_j, y_j) : K_{j-1}(x_j)][K_{j-1}(x_j) : K_{j-1}] \\ &= [K_j : K_{j-1}(x_j)][K_{j-1}(x_j) : K_{j-1}] = 1 \text{ o } 2 \text{ o } 4 \end{aligned}$$

es decir, en cualquier caso $[K_j : K_{j-1}]$ es una potencia de 2 con lo cual, $[K_n : K_0]$ es una potencia de 2. Ahora bien,

$$[K_n : K_0(x)][K_0(x) : K_0] = [K_n : K_0],$$

con lo cual $[K_0(x) : K_0]$ es una potencia de 2. De manera análoga, $[K_0(y) : K_0]$ es una potencia de 2. $\square$

224. Duplicación del cubo

El problema de la duplicación del cubo consiste en dado un cubo, hallar la arista de otro cubo cuyo volumen sea el doble del cubo dado. Las técnicas del álgebra son capaces de resolver este problema de forma trivial. Demostremos sin embargo que el problema no tiene solución por regla y compás.

Teorema. El problema de la duplicación del cubo no tiene solución usando construcciones por regla y compás.

Demostración. Supongamos dado un cubo, y sin pérdida de generalidad podemos suponer que su arista es el intervalo unidad del eje x , es decir $\mathcal{P}_0 = \{(0, 0), (1, 1)\}$, con lo cual $K_0 = \mathbb{Q}$. Las otras distancias entre los vértices del cubo dado son $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, por tanto los vértices del cubo dado son construibles por regla y compás a partir de $\mathcal{P}_0$. Si fuera posible la duplicación del cubo por regla y compás, podríamos construir un punto $(\alpha, 0)$ tal que

$\alpha^3 = 2$. El polinomio $p(x) = x^3 - 2$ es mónico, irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y α es raíz de $p(x)$ en consecuencia $p(x)$ es el polinomio mínimo de α sobre $\mathbb{Q}$ con lo cual $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$ no es potencia de 2 en contradicción con el teorema 7 de la monografía 223. Concluimos que la duplicación del cubo no es posible por regla y compás. $\square$

225. Cuadratura del círculo

Demostramos la imposibilidad de la cuadratura del círculo.

1. Definición. Se denomina cuadratura del círculo al problema que consiste en hallar con sólo regla y compás un cuadrado que posea un área que sea igual a la de un círculo dado.

2. Teorema. El problema de la cuadratura del círculo no tiene solución.

Demostración. Recordemos que un número $x \in \mathbb{R}$ se dice que es construible si se puede construir un segmento de longitud $|x|$ a partir de uno de longitud 1 por medio de regla y compás, y que el conjunto de los números construibles es un subcuerpo de $\mathbb{R}$. Recordemos también que el número π es trascendente.

Si fuera posible la cuadratura del círculo podríamos construir el punto $(0, \sqrt{\pi})$ a partir del conjunto $\mathcal{P}_0 = \{(0, 0), (0, 1)\}$, con lo cual sería construible el punto $(0, \pi)$. Por el teorema 7 de la monografía 223 tendríamos $[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}]$ es una potencia de 2 lo cual implicaría que π es algebraico (absurdo). $\square$

Fascículo 10

Monografías 226-250

226. EDO por cambio de variable independiente

Enunciado

Para $0 < x < 1$ consideremos la ecuación diferencial

$$x(1-x^2)^2 y'' - (1-x^2)^2 y' + 5x^3 y = 0.$$

Resolverla usando el cambio de variable independiente $t = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$.

Solución

Para $0 < x < 1$ se verifica $0 < 1-x^2 < 1$ con lo cual, existe la aplicación

$$t : (0, 1) \rightarrow (0, +\infty), \quad t = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2)$$

y es fácil verificar que es biyectiva. Tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}. \\ y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{x}{1-x^2}. \quad (1) \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{x}{1-x^2} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \right) \cdot \frac{x}{1-x^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x^2} \right) \\ &\stackrel{\text{por (1)}}{=} \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{x}{1-x^2} \cdot \frac{x}{1-x^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$x(1-x^2)^2 \left(\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \right) - (1-x^2)^2 \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{x}{1-x^2} + 5x^3y = 0.$$

Simplificando queda

$$x^3 \frac{d^2y}{dt^2} + 2x^3 \frac{dy}{dt} + 5x^3y = 0$$

y por hipótesis $x \neq 0$ al ser $0 < x < 1$. El cambio de variable independiente dado transforma la ecuación diferencial dada en

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0,$$

que es una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes. La ecuación característica es $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ cuyas raíces son $-1 \pm 2i$. Una base del espacio de las soluciones es $B = \{e^{-t} \cos 2t, e^{-t} \sin 2t\}$ y por tanto la solución general es

$$y = C_1 e^{-t} \cos 2t + C_2 e^{-t} \sin 2t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Deshaciendo el cambio de variable independiente:

$$e^{-t} = e^{\frac{1}{2} \log(1-x^2)} = e^{\ln(1-x^2)^{1/2}} = \sqrt{1-x^2}.$$

La solución general de la ecuación dada es por tanto

$$y = \sqrt{1-x^2} [C_1 \cos(\log(1-x^2)) - C_2 \sin(\log(1-x^2))].$$

227. Topologías de Zariski y usual en k^n

Demostramos que para $k = \mathbb{R}$ o $k = \mathbb{C}$, la topología de Zariski en k^n es estrictamente menos fina que la usual.

1. Teorema. Si $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ entonces $V(F)$ es cerrado en k^n con la topología usual

Demostración. La función $F : k^n \rightarrow k$, es polinómica y por tanto continua con las topologías usuales. Como $\{0\} \subset k$ es cerrado con la topología usual, $V(F) = F^{-1}(\{0\})$ es cerrado en k^n con la topología usual. $\square$

2. Teorema. Si $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ y $V(F)$ contiene a un abierto no vacío de k^n con la topología usual, entonces $F = 0$.

Demostración. Usamos inducción sobre el número de indeterminadas del polinomio. El resultado es válido para un polinomio con una indeterminada. En efecto, si $F \neq 0$ entonces $V(F)$ es finito y por tanto no puede contener a un abierto de k con la topología usual. Supongamos que es cierta la proposición para polinomios con $n-1$ indeterminadas y $n \geq 2$ y escribamos un polinomio F con n indeterminadas en la forma

$$F(X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=0}^d G_j(X_1, \dots, X_{n-1}) X_n^j. \quad (1)$$

Podemos asumir que $d > 0$ pues en caso contrario no aparecería X_n y la proposición se deduce de la hipótesis de inducción. Supongamos que $F = 0$ sobre un abierto $U \neq \emptyset$ con respecto de la topología usual, sea $(a_1, \dots, a_n) \in U$ y elijamos $h > 0$ tal que $\prod_{i=1}^n B(a_i, h) \subset U$ en donde $B(a_i, h)$ representa la bola de centro a_i y radio $h > 0$. Si $(x_1, \dots, x_n) \in U$, tenemos

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^d G_j(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^j.$$

Entonces, para cada $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1} B(a_i, h)$ el polinomio

$$f(X_n) = F(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n) = \sum_{j=0}^d G_j(x_1, \dots, x_{n-1}) X_n^j$$

se anula si $X_n = x_n \in B(a_n, h)$ y al ser la proposición cierta para una indeterminada, $f = 0$. Entonces, $G_j(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$ para todo $j = 0, 1, \dots, d$ y para todo $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1} B(a_i, h)$. Por la hipótesis de inducción, ha de ser $G_j = 0$ para todo $j = 0, 1, \dots, d$ lo cual implica por (1) que $F = 0$. $\square$

3. Teorema. Si $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ es no nulo, entonces $k^n - V(F)$ es abierto y denso en k^n con la topología usual.

Demostración. Por el teorema 1, $k^n - V(F)$ es abierto con la topología usual. Sea $U \neq \emptyset$ abierto con la topología usual. Por el teorema 2, U no está contenido en $V(F)$ y por tanto $U - V(F) = U \cap (k^n - V(F)) \neq \emptyset$ con lo cual $k^n - V(F)$ es denso en k^n con la topología usual. $\square$

4. Teorema. Todo abierto no vacío de k^n con la topología de Zariski es abierto y denso en k^n con la topología usual.

Demostración. Todo abierto no vacío con la topología de Zariski es de la forma $k^n - V$ con $V \neq k^n$ algebraico. El conjunto V es de la forma $V = V(F_1, \dots, F_r) = \cap_j V(F_j)$. Entonces,

$$\begin{aligned} k^n - V &= k^n \cap (\cap_j V(F_j))^c = k^n \cap (\cup_j V(F_j)^c) \\ &= \cup_j (k^n \cap (V(F_j)^c)) = \cup_j (k^n - V(F_j)). \end{aligned}$$

Como $\cap_j V(F_j) \neq k^n$, algún F_j (sea éste F_k) ha de ser no nulo con lo cual, por el teorema 3, su clausura con la topología usual es $\overline{k^n - V(F_k)} = k^n$ y cada $k^n - V(F_j)$ es abierto con la topología usual (vacío si $F_j = 0$) con lo cual $k^n - V$ es abierto con la topología usual (unión de abiertos). También es denso pues,

$$\begin{aligned} \overline{k^n - V} &= \overline{\cup_j (k^n - V(F_j))} = \cup_j \overline{k^n - V(F_j)} \\ &= \underbrace{\overline{k^n - V(F_k)}}_{k^n} \cup \left(\cup_{j \neq k} \overline{k^n - V(F_j)} \right) = k^n. \end{aligned}$$

□

5. Corolario. La topología de Zariski en k^n es estrictamente menos fina que la usual.

Demostración. Por el teorema 4, es más fina y todo abierto Zariski es denso en k^n con la topología usual por tanto, todo abierto no denso en k^n con la topología usual (por ejemplo toda bola abierta) no es abierto Zariski. □

228. Polinomio que se anula en k^n

Demostramos que si un polinomio F se anula en todos los puntos de k^n con k cuerpo infinito, entonces $F = 0$.

Teorema. Sea k un cuerpo conmutativo infinito y $F \in k[X_1, \dots, X_n]$. Si F se anula en todos los puntos de k^n entonces, F es el polinomio nulo.

Demostración. Por inducción sobre n . Si $0 \neq F \in k[X]$ entonces F tiene un número finito de raíces con lo cual F no puede anularse en todos los puntos de k . Es decir, el resultado es cierto para $n = 1$,

Sea cierto el resultado para $n - 1$ ($n \geq 2$) y veamos que es cierto para n . Consideremos $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ con $F \neq 0$ y F no constante. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$F(X_1, \dots, X_n) = G(X_1, \dots, X_{n-1})X_n^r + \dots$$

con $G \neq 0$ y $r \geq 1$. Por hipótesis de inducción existe $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in k^{n-1}$ tal que $G(x_1, \dots, x_{n-1}) \neq 0$. El polinomio de primer grado $F(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n)$ tiene a lo sumo r raíces, por tanto F no se anula en todo k^n . □

Nota. El teorema anterior no es cierto si k es finito. En efecto, sea $k = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ y consideremos $F(x) = X^2 - X \in \mathbb{Z}_2[X]$. Tenemos $F(\bar{0}) = F(\bar{1}) = 0$ y $F \neq 0$. Más general, sea p primo y consideremos $F(X) = X^p - X \in \mathbb{Z}_p[X]$. Según el pequeño teorema de Fermat, para todo entero a se verifica que $a^p - a$ es múltiplo de p . Entonces, para todo $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$, $F(\bar{a}) = \bar{a}^p - \bar{a} = \bar{0}$. Sin embargo, $F \neq 0$.

229. Conjuntos equivalentes

1. Definición. Sean A y B dos conjuntos. Se dice que A es equivalente a B y se escribe $A \sim B$ si existe una aplicación biyectiva $f : A \rightarrow B$.

2. Definición. Un conjunto A se dice que es finito si es equivalente a $\{1, 2, \dots, n\}$ para algún n natural, en otro caso se dice que es infinito.

3. Teorema. En cualquier clase $\mathcal{C}$ de conjuntos, la relación $A \sim B$ es de equivalencia.

Demostración. Para todo $A \in \mathcal{C}$ la aplicación identidad $I_A : A \rightarrow A$ es biyectiva, y por tanto $A \sim A$. Si $A \sim B$ existe $f : A \rightarrow B$ biyectiva. Pero $f^{-1} : B \rightarrow A$ es biyectiva con lo cual $B \sim A$. Si $A \sim B$ y $B \sim C$ existen aplicaciones biyectivas $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$. Pero $g \circ f : A \rightarrow C$ es biyectiva con lo cual $A \sim C$. $\square$

4. Nota. Claramente dos conjuntos finitos son equivalentes si y sólo si contienen el mismo número de elementos.

5. Ejemplo. Los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$ son equivalentes.

6. Ejemplo. Si $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ y $P = \{2, 4, 6, \dots\}$ la aplicación $f : \mathbf{N} \rightarrow P$ dada por $f(n) = 2n$ es biyectiva y por tanto $\mathbf{N} \sim P$.

7. Ejemplo. Demostremos que $(-1, 1)$ es equivalente al conjunto de los números reales $\mathbf{R}$. Para ello consideremos la aplicación

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 - |x|}.$$

La función está bien definida pues si $x \in (-1, 1)$, entonces $|x| < 1$ y el denominador $1 - |x|$ no se anula. Veamos que es inyectiva.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1 - |x_1|} = \frac{x_2}{1 - |x_2|}. \quad (1)$$

Tomando módulos queda

$$\frac{|x_1|}{1 - |x_1|} = \frac{|x_2|}{1 - |x_2|}$$

o bien, $|x_1| - |x_1||x_2| = |x_2| - |x_1||x_2|$ lo cual implica $|x_1| = |x_2|$, y consecuentemente $1 - |x_1| = 1 - |x_2|$. Sustituyendo en (1), queda $x_1 = x_2$. Veamos que f es sobreyectiva. Podemos expresar $f(x)$ en la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } x \in [0, 1) \\ \frac{x}{1+x} & \text{si } x \in (-1, 0). \end{cases}$$

Si $y \geq 0$, entonces igualando $y = \frac{x}{1-x}$ obtenemos $x = \frac{y}{1+y} \in [0, 1)$. Si $y < 0$, entonces igualando $y = \frac{x}{1+x}$ obtenemos $x = \frac{y}{1-y} \in (-1, 0)$. Es decir, para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in (-1, 1)$ tal que $y = f(x)$ y por tanto, f es sobreyectiva.

230. Conjuntos numerables y contables

1. Definición. Sea $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ el conjunto de los números naturales. Un conjunto X se dice que es *numerable* o que tiene cardinalidad $\aleph_0$, si X es equivalente a $\mathbf{N}$. Un conjunto X se dice que es *contable* si es finito o numerable.

2. Ejemplo. Toda sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \dots$ formada por distintos términos dos a dos es numerable pues la aplicación $f : \mathbf{N} \rightarrow \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ dada por $f(n) = a_n$ es biyectiva.

3. Ejemplo. El conjunto $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ es numerable. En efecto, sea $n \geq 1$ un número natural. Por el teorema fundamental de la aritmética existen únicos números naturales $k \geq 1, m \geq 1$ tales que $n = 2^{k-1}(2m-1)$. Definamos la aplicación $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ tal que $f(n) = (m, k)$. Entonces, f es sobreyectiva pues $f(2^{k-1}(2m-1)) = (m, k)$ y f es inyectiva porque si $(m_1, k_1) = (m_2, k_2)$ entonces $2^{k_1-1}(2m_1-1) = 2^{k_2-1}(2m_2-1)$.

4. Teorema. Cada conjunto infinito contiene un conjunto numerable.

Demostración. Sea X un conjunto infinito y sea $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow X$ una función de elección, es decir para cada $\emptyset \neq A \subset X$ se verifica $f(A) \in A$. Construimos la sucesión:

$$\begin{aligned} a_1 &= f(X), \quad a_2 = f(X - \{a_1\}), \quad a_3 = f(X - \{a_1, a_2\}), \\ \dots, \quad a_n &= f(X - \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}), \quad \dots \end{aligned}$$

Como X es infinito, $X - \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ es no vacío para todo n y claramente $a_n \neq a_i$ para todo $i < n$, es decir, los a_n son distintos por tanto, $\{a_1, a_2, \dots\}$ es un subconjunto numerable de X . $\square$

5. Teorema. Cualquier subconjunto de un conjunto contable es contable.

Demostración. Si X es contable entonces X es numerable o contable. Sea $X = \{a_1, a_2, \dots\}$ numerable y $A \subset X$. Si $A = \emptyset$ entonces A es finito. Si $A \neq \emptyset$, sea n_1 el menor entero positivo tal que $a_{n_1} \in A$. Sea n_2 el menor entero positivo tal que $n_2 > n_1$ y $a_{n_2} \in A$, etc. Entonces, $A = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots\}$. Si el conjunto $\{n_1, n_2, \dots\}$ es acotado, A es finito y si no lo es, A es numerable.

Si X es finito cualquiera de sus subconjuntos es finito y por tanto contable. $\square$

6. Teorema. Un conjunto es infinito si y sólo si es equivalente a un subconjunto propio.

Demostración. Si X es finito con n elementos, cualquier subconjunto propio Y tiene m elementos con $m < n$ con lo cual no existe biyección entre X e Y .

Si X es infinito, por el teorema 4 contiene a un conjunto numerable $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$. La aplicación $f : Y \rightarrow Y - \{y_1\}$ dada por $f(y_i) = y_{i+1}$ es biyectiva. La extensión $\bar{f} : X \rightarrow X - \{y_1\}$ de f dada por $\bar{f}(x) = x$ si $x \notin Y$ y $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in Y$ también es biyectiva, con lo cual X es equivalente a su subconjunto propio $X - \{y_1\}$. $\square$

7. Teorema. Sea $\{A_1, A_2, \dots\}$ una familia numerable y disjunta de conjuntos numerables. Entonces, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable.

Demostración. Al ser $A_1, A_2, \dots$ numerables podemos escribir

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\}, \quad A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\}, \\ &\dots, \quad A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots\}, \quad \dots \end{aligned}$$

Entonces, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{ij} : (i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}\}$. La función $f(a_{ij}) = (i, j)$ es trivialmente biyectiva y por el ejemplo 3, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ es numerable con lo cual $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable. $\square$

Si $\{B_i : i \in I\}$ es una familia contable de conjuntos contables la unión, $\cup_{i \in I} B_i$ puede fácilmente considerarse como incluida en una familia $\{A_n : n \in \mathbf{N}\}$ del tipo del teorema anterior, con lo cual obtenemos el siguiente corolario:

8. Corolario. Si $\{B_i : i \in I\}$ es una familia contable de conjuntos contables, la unión, $\cup_{i \in I} B_i$ es contable.

9. Teorema. El conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales es numerable.

Demostración. Sea $\mathbf{Q}^+$ el conjunto de los números reales positivos y $\mathbf{Q}^-$ el de los racionales negativos. Consideremos la aplicación $f : \mathbf{Q}^+ \rightarrow \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ dada por $f(p/q) = (p, q)$. Esta aplicación es inyectiva, por tanto $\mathbf{Q}^+$ es equivalente a un subconjunto de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (que por el ejemplo 3 es numerable) y por el teorema 5, $\mathbf{Q}^+$ es numerable. De la misma manera, $\mathbf{Q}^-$ es numerable con lo cual $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^+$ es numerable por el corolario 8. $\square$

231. Potencia del continuo

1. Teorema. El intervalo $[0, 1]$ no es numerable.

Demostración. Por reducción al absurdo. Si $[0, 1]$ es numerable, podemos escribir $[0, 1] = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Consideremos los tres subintervalos de $[0, 1]$: $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, $[2/3, 1]$. Cada uno de los intervalos tiene longitud $1/3$ y el elemento x_1 no puede estar en los tres intervalos. Sea $I_1 = [a_1, b_1]$ uno de los tres intervalos tales que $x_1 \notin I_1$. Consideramos los tres subintervalos de I_1 : $[a_1, a_1 + 1/9]$, $[a_1 + 1/9, a_1 + 2/9]$, $[a_1 + 2/9, b_1]$ (nótese que $a_1 + 2/9 < a_1 + 1/3 = b_1$). Cada uno de los intervalos anteriores tiene longitud $1/9$. Sea I_2 uno de los tres intervalos anteriores tal que $x_2 \notin I_2$.

Continuando de esta manera, tenemos construida una sucesión de intervalos cerrados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ tales que $x_n \notin I_n$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y la longitud de cada I_n es $l(I_n) = 1/3^n$. Por el principio de los intervalos encajados, existe un número real $y \in [0, 1]$ tal que y pertenece a todos los intervalos I_n (es además único pues $l(I_n) \rightarrow 0$). Pero $y \in [0, 1] = \{x_1, x_2, \dots\}$ implica que $y = x_m$ para algún $m \in \mathbf{N}$ y por construcción $y = x_m \notin I_m$ lo cual es una contradicción. $\square$

2. Definición. Se dice que un conjunto X tiene la *potencia del continuo* o que tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$ si es equivalente al intervalo $[0, 1]$.

3. Lema. Los intervalos $(0, 1)$, $[0, 1)$ y $(0, 1]$ tienen cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Demostración. Si $A = [0, 1] - \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\}$, entonces

$$[0, 1] = \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\} \cup A, \quad (0, 1) = \{1/2, 1/3, 1/4, \dots\} \cup A$$

y la aplicación $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1/(n+2) & \text{si } x = 1/n, (n \in \mathbf{N}) \\ x & \text{si } x \in A \end{cases}$$

es biyectiva, es decir $[0, 1] \sim (0, 1)$. La aplicación $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1)$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1/(n+1) & \text{si } x = 1/n (n \in \mathbf{N}) \\ x & \text{si } x \neq 1/n (n \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

es biyectiva, es decir $[0, 1] \sim [0, 1)$. La aplicación $h : [0, 1) \rightarrow (0, 1]$ dada por $h(x) = 1 - x$ es biyectiva, en consecuencia $(0, 1) \sim [0, 1) \sim (0, 1] \sim [0, 1]$. Concluimos que los intervalos $(0, 1)$, $[0, 1)$ y $(0, 1]$ tienen cardinalidad $\mathfrak{c}$. $\square$

4. Teorema. Sean a, b números reales con $a < b$. Entonces, los intervalos $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ y $(a, b]$ tienen cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Demostración. Cada una de las siguientes funciones dadas por $f(x) = a + (b - a)x$:

$$[0, 1] \xrightarrow{f} [a, b], \quad [0, 1) \xrightarrow{f} [a, b), \quad (0, 1) \xrightarrow{f} (a, b), \quad (0, 1] \xrightarrow{f} (a, b]$$

es biyectiva. Usando el lema anterior y el que la relación $A \sim B$ es de equivalencia concluimos que los intervalos $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ y $(a, b]$ tienen cardinalidad $\mathfrak{c}$. $\square$

5. Teorema. $\mathbf{R}$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Demostración. Por el ejemplo 7, $(-1, 1) \sim \mathbf{R}$ y por el teorema 4, $(-1, 1)$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$, por tanto $\mathbf{R}$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$. $\square$

232. Teorema de Cantor

Teorema (Cantor). Si A es un conjunto, entonces el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de las partes de A tiene cardinalidad mayor que A .

Demostración. La aplicación $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ dada por $f(a) = \{a\}$ es inyectiva y por tanto, $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Demostremos que A no es equivalente a $\mathcal{P}(A)$. En efecto, supongamos que exista una aplicación biyectiva $g : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ y consideremos el subconjunto B de A dado por $B = \{x \in A : x \notin g(x)\}$. Al ser g sobreyectiva, existe $b \in A$ tal que $g(b) = B$. Si $b \in B$ entonces, $b \notin g(b) = B$ lo cual es absurdo. Si $b \notin B$ entonces, $b \in g(b) = B$ que también es una contradicción. Concluimos que A no es equivalente a $\mathcal{P}(A)$ y por tanto $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. $\square$

233. Teorema de Cantor-Bernstein

Teorema (Cantor-Bernstein). Sean A y B dos conjuntos tales que existen aplicaciones inyectivas $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow A$. Entonces, existe una biyección entre A y B .

Demostración. Sea $b_1 \in B$. Vamos a construir una sucesión de elementos $b_1, a_1, b_2, a_2, b_3, a_3, \dots$ de elementos con $b_i \in B$ y $a_i \in A$ de la siguiente manera. Puede existir o no $a_1 \in A$ tal que $f(a_1) = b_1$, pero al ser f inyectiva si tal a_1 existe, es único y ya tendríamos a_1 . De nuevo, puede existir o no $b_2 \in B$ tal que $g(b_2) = a_1$ pero si tal elemento existe es único y ya tendríamos b_2 . De forma similar, elegimos a_2 como el único elemento que cumple $f(a_2) = b_2$ si tal a_2 existe. Se pueden presentar los siguientes casos:

- (1) Llegamos a un a_n y paramos porque no existe $b \in B$ tal que $g(b) = a_n$.

- (2) Llegamos a un b_n y paramos porque no existe $a \in A$ tal que $f(a) = b_n$.
- (3) El proceso continúa indefinidamente.

Entonces, para todo $b \in B$ y eligiéndolo como b_1 estamos en uno y sólo uno de los tres casos anteriores. Podemos por tanto particionar B en tres subconjuntos

$$\begin{aligned} B_A &= \{b \in B : \text{el proceso termina en un } a_n\}, \\ B_B &= \{b \in B : \text{el proceso termina en un } b_n\}, \\ B_\infty &= \{b \in B : \text{el proceso nunca termina}\}. \end{aligned}$$

El mismo proceso se puede aplicar para todo $a \in A$ (y tomándolo como a_1) se puede particionar A en los siguientes subconjuntos:

$$\begin{aligned} A_A &= \{a \in A : \text{el proceso termina en un } a_n\}, \\ A_B &= \{a \in A : \text{el proceso termina en un } b_n\}, \\ A_\infty &= \{a \in A : \text{el proceso nunca termina}\}. \end{aligned}$$

Para demostrar que existe una biyección entre A y B , bastara demostrar que existe una biyección entre A_A y B_A , una entre A_B y B_B y otra entre A_∞ y B_∞ . Veamos que la restricción de f a A_A es una biyección entre A_A y B_A . Para ello y dado que f es inyectiva, bastará demostrar dos cosas:

- (a) $a \in A_A \Rightarrow f(a) \in B_A$.
- (b) $\forall b \in B_A \exists a \in A_A : f(a) = b$.

Si $a \in A_A$ el proceso aplicado a a termina en A . Consideremos el proceso aplicado a $f(a)$. El primer paso del proceso nos devuelve a con lo cual el proceso continúa hasta finalizar en A , es decir $f(a) \in B_A$ y por tanto se verifica (a).

Por otra parte, si $b \in B_A$ el proceso aplicado a b termina en A y por tanto ha de tener una primera etapa pues en caso contrario terminaría en $b \in B$. Es decir, existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$. Pero el proceso aplicado a este a es el mismo que la prolongación del proceso aplicado a b y por tanto termina en A con lo cual $a \in A_A$. En consecuencia, $f : A_A \rightarrow B_A$ es una biyección.

Razonando de manera análoga demostramos que $g : B_B \rightarrow A_B$ es una biyección, y por tanto $g^{-1} : A_B \rightarrow B_B$ es biyección.

Por último, demostremos que $f : A_\infty \rightarrow B_\infty$ es una biyección. Es una inyección pues $f : A \rightarrow B$ lo es por hipótesis. Si $b \in B_\infty$ entonces, $b = f(a)$ para algún $a \in A$ y éste a pertenece a A_∞ pues el proceso que empieza en a es el mismo que el que empieza en b después del primer paso y el proceso nunca termina pues $b \in B_\infty$.

Resumiendo, $F : A \rightarrow B$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A_A \\ f(x) & \text{si } x \in A_\infty \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in A_B. \end{cases}$$

es una biyección pues A_A , A_B y A_∞ forma una partición de A , B_A , B_B y B_∞ forman una partición de B y las aplicaciones $f : A_A \rightarrow B_A$, $f : A_\infty \rightarrow B_\infty$, $g^{-1} : A_B \rightarrow B_B$ son biyecciones. Queda pues demostrado el teorema de Cantor-Bernstein.

- *Fernando Revilla Jiménez:*
Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid.
Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid
(En ambos casos, hasta el curso académico 2008-2009).
- *Dirección E-mail:* frej0002@ficus.pntic.mec.es
- *Página web:* <http://www.fernandorevilla.es>