Foros de matemática

Matemática => Álgebra Lineal (Espacios Vectoriales) => Mensaje iniciado por: Fernando Revilla en 11/02/2009, 06:07:15 pm

Título: **Raíz cuadrada, inversa,..., por matrices componentes.**
Publicado por: **Fernando Revilla** en **11/02/2009, 06:07:15 pm**

Este tema lo abro como consecuencia de la inquietud de Leviatan por la teoría de las funciones de matrices.

Vease: http://rinconmatematico.com/foros/index.php?topic=18863.msg78117;topicseen#msg78117

La primera justificación de la teoría es obvia, dado que por ejemplo $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ parece natural definir para una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen} A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n A^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \cos A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n A^{2n}}{(2n)!}$$

en el supuesto de que las serie sean convergentes. Se puede demostrar que las series son convergentes para toda $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y además $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 = I$ (matriz identidad). Esto supone una excelente generalización en esos casos particulares de variable unidimensional a matricial.

Esta teoría se ha desarrollado de tal manera que íncluso se puede prescindir de los desarrollos en serie de estas funciones, si bien la idea inicial no se debe perder de vista. El teorema fundamental es el siguiente que ya enunciamos en el hilo reseñado:

Teorema Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ de polinomio mínimo $\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$. Entonces existen matrices A_{ik} con $i = 1, 2 \dots, s, \ k = 0, 1, \dots, m_i - 1$ tales que para toda función $f : \Omega \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ tal que existe $f(A)$ (i.e. $\exists f^{(k)}(\lambda_i)$ con $i = 1, 2 \dots, s, \ k = 0, 1, \dots, m_i - 1$) se verifica $f(A) = \sum_{i=0}^{s} \sum_{k=0}^{m_i - 1} f^{(k)}(\lambda_i) A_{ik}$. A las matrices A_{ik} se las llama *matrices componentes* de A.

<u>Ejemplo</u>. Dada $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcular $\sqrt{A}$ y A^{-1}.

<u>Resolución</u> El polinomio mínimo de la matriz A es $\mu(\lambda) = (\lambda - 4)^2$. Es decir $\lambda_1 = 4$ es el único valor propio de A, las matrices componentes de A son A_{10}, A_{11} y para toda función f para la cual exista $f(A)$ (es decir, existen $f(4)$ y $f'(4)$) se verifica:

$$f(A) = f(4)A_{10} + f'(4)A_{11} \ \ (*)$$

Para hallar las matrices componentes elegimos las funciones polinómicas (siempre están definidas) $f(\lambda)=1$ y $f(\lambda)=\lambda$ y aplicamos la fórmula $(*)$ lo cual nos conduce al sistema matricial: $\begin{cases} I=A_{10} \\ A=4A_{10}+A_{11} \end{cases}$, que resuelto proporciona $A_{10}=I$ y $A_{11}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

Aplicando $(*)$ a la función $f(\lambda)=\sqrt{\lambda}$ y usando $f'(\lambda)=\dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}$ obtenemos:

$$f(A)=\sqrt{A}=2A_{10}+\frac{1}{4}A_{11}=\ldots=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}9 & -1\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$

Aplicando $(*)$ a la función $f(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}$ y usando $f'(\lambda)=-\dfrac{1}{\lambda^2}$ obtenemos:

$$f(A)=\frac{1}{A}=A^{-1}=\frac{1}{4}A_{10}-\frac{1}{16}A_{11}=\ldots=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -11 & 5\end{bmatrix}$$

Análogo procedimiento para calcular cualquier $f(A)$.

Saludos.

Título: **Re: Raíz cuadrada, inversa,..., por matrices componentes.**
Publicado por: **leviatan** en **11/02/2009, 09:15:12 pm**

Phidias...¡¡¡ Bastante interesante !!!...

Sin embargo, sería fenomenal conocer la DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA (de la existencia de matrices componentes). Mis dudas son:

1) ¿Cómo se resuelve el problema de la ANALITICIDAD?

2) No estoy muy seguro, pero me parece haber visto un ejemplo en que la raiz cuadrada de una cierta matriz (¿simétrica?) no existe. (Si tengo razón te lo comunicaré en mi próxima sesión) para que resuelvas la cuestión (si te parece hacerlo).

Gracias por tus respuestas,

(Leviatan)

Título: **Re: Raíz cuadrada, inversa,..., por matrices componentes.**
Publicado por: **Fernando Revilla** en **12/02/2009, 06:00:40 pm**

Cita de: leviatan en 11/02/2009, 09:15:12 pm

> Sin embargo, sería fenomenal conocer la DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA (de la existencia de matrices componentes).

El libro estrella es *The Theory of Matrices* de F.R. Gantmacher, aunque tal vez esto te pueda servir:

http://ma1.eii.us.es/miembros/cobos/articulo/VITORIA/MAT_COMP.pdf

Cita
> 1) ¿Cómo se resuelve el problema de la ANALITICIDAD?

No sé a qué te refieres.

Cita
> 2) No estoy muy seguro, pero me parece haber visto un ejemplo en que la raiz cuadrada de una cierta matriz (¿simétrica?) no existe. (Si tengo razón te lo comunicaré en mi próxima sesión) para que resuelvas la cuestión (si te parece hacerlo).

Para valores propios negativos no existiría $\sqrt{A}$ en $\mathbb{R}$, pero existe en $\mathbb{C}$ eligiendo una rama adecuada para f. Si encuentras la matriz, la analizamos.

Saludos.

Título: **Re: Raíz cuadrada, inversa,..., por matrices componentes.**
Publicado por: **leviatan** en **12/02/2009, 09:01:51 pm**

Hola Phidias...

1) Comenzaré con mi segunda duda...(que más bien resultó ser una pequeña confusión) Pero, no obstante te la hago conocer (dejando a tu elección leerla o no, porque ahora me interesa más el asunto de la analiticidad... punto (2)).

Está relacionado con la definición de cierta matriz llamada MATRIZ HERMITIANA Q...

Como se sabe,Qes simétrica con elementos reales y que sus valores propios siempre deben ser positivos.

Ahora, para hallar la raiz cuadrada R debo calcular primero las raíces cuadradas de los valores propios de Q. Supongamos que uno de los valores propios de Qes $\alpha = 9$. Entonces, sus raíces cuadradas serán: +3 y -3, ...

Entonces, me pregunté ¿Por qué debo elegir +3 (arbitrariamente, es decir sin justificación) como el valor propio de R? Es decir, supongamos que A_{xy} es la matriz componente asociada al valor propio (+3)... Entonces tendríamos: $R = ... + (+3)A_{xy} + ...$. Pero, y si hubiera elegido (-3) tendría: $R = ... + (-3)A_{x'y'} + ...$...

De este modo...$A_{xy} = -A_{x'y'}$. En consecuencia, el hecho de que ambas matrices componentes varíen en signo sería una CONTRADICCIÓN a la existencia de las mismas, porque una MATRIZ COMPONENTE, si existe, DEBERÍA SER ÚNICA. Sin embargo, como comprendí más tarde esto resultó ser una confusión!!!

2) Se sabe que en el campo de los números complejos una función $f(z)$es analítica si se cumplen las condiciones dadas por las ecuaciones de Cauchy-Riemman. Otro modo de conocer que una función es analítica es que sus desarrollos de Taylor o de Laurent sean convergentes.

Consideremos el siguiente **ejemplo**:

Sea: $f(\alpha)=\dfrac{1}{1-\alpha}$ una función escalar con desarrollos:

$f(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n$, para /α/<1

$f(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\alpha^{n+1}}$, para /α/>1

Luego, debería existir $f(A)$por matrices componentes...

Ahora, supongamos que descubrimos que un valor propio de A es $\alpha=1$. Sin embargo, comprobaremos, ¡con horror!, que $f(1)\to\infty$. Por lo que no se puede expresar $f(A)$ por matrices componentes. ¡¡¡ Una fea contradición !!!

Es decir, $f(\alpha)=\dfrac{1}{1-\alpha}$ no es analítica... ¡Este es el problema de la analiticidad! (que por cierto, en el enunciado del teorema de matrices componentes no esta explícito)...

Agradeceré tu respuesta aclarando este asunto...

(Leviatan)

Título: **Re: Raíz cuadrada, inversa,..., por matrices componentes.**
Publicado por: **Fernando Revilla** en **13/02/2009, 10:24:49 am**

> Cita de: leviatan en 12/02/2009, 09:01:51 pm
>
> Entonces, me pregunté ¿Por qué debo elegir +3 (arbitrariamente, es decir sin justificación) como el valor propio de R? Es decir, supongamos que A_{xy} es la matriz componente asociada al valor propio (+3)... Entonces tendríamos: $R=...+(+3)A_{xy}+...$. Pero, y si hubiera elegido (-3) tendría:$R=...+(-3)A_{x^{\square}y^{\square}}+...$...

La respuesta a la aparente contradicción es sencilla. Cuando escribimos $f(x)=\sqrt{x}$ por convenio estamos definiendo la función derivable en $(0,+\infty)$ $f(x)=|\sqrt{x}|$ y cuando escribimos $g(x)=-\sqrt{x}$ estamos definiendo la función derivable en $(0,+\infty)$ $g(x)=-|\sqrt{x}|$. El problema te tiene que decir con qué función trabajamos, si con f o con g.

Por tanto no hay ninguna sorpresa, las matrices componentes son únicas para cada función, entonces en el ejemplo que mencionas en el primer caso hallas $f(Q)=\sqrt{Q}$ y en el segundo $g(Q)=-\sqrt{Q}$.

Saludos.

Título: **Re: Raíz cuadrada, inversa,..., por matrices componentes.**
Publicado por: **Fernando Revilla** en **13/02/2009, 10:50:38 am**

> Cita de: leviatan en 12/02/2009, 09:01:51 pm
>
> Luego, debería existir $f(A)$ por matrices componentes.... Ahora, supongamos que descubrimos que un valor propio de A es $\alpha = 1$. Sin embargo, comprobaremos, ¡con horror!, que $f(1) \longrightarrow \infty$. Por lo que no se puede expresar $f(A)$ por matrices componentes. ¡¡¡ Una fea contradición !!!

Jeje, no existe tal contradicción (ni fea ni bonita). Una condición necesaria para que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ sea convergente es que el radio espectral de A (es decir el máximo de los módulos de los valores propios de A) sea menor que 1. Es decir, no puedes encontrar tal matriz con valor propio 1. Análogas consideraciones para la otra serie.

Saludos.

Título: **Re: Raíz cuadrada, inversa,..., por matrices componentes.**
Publicado por: **leviatan** en **13/02/2009, 07:36:06 pm**

Gracias por todo...!!!

Ahora comprendo muy bien en que consiste el desarrollo de funciones matriciales por el método de matrices componentes...

Y, habiendo hecho algunos análisis propios veo que las mismas tienen propiedades interesantes (en semejanza a la busqueda de "residuos" en el analisis complejo).

Por lo tanto, no voy a polemizar más el asunto...

Por lo que comprendo que el supuesto problema de la analiticidad se resuelve fácilmente...

Hasta luego,

(Leviatan)