Nota sobre la integración por partes

Fernando Revilla Jiménez *
Jefe del Departamento de Matemáticas, IES Santa Teresa, Madrid
Profesor de Métodos Matemáticos, Universidad UAX, Madrid
(En ambos casoss, hasta el curso académico 2008-2009)
frej0002@ficus.pntic.mec.es

Resumen

Demostramos y desarrollamos un algoritmo para calcular algunas integrales que se adecuan al método de integración por partes.

La integración por partes es un método para hallar primitivas frecuentemente aplicable cuando la función a integrar es producto de otras dos, una de ellas con derivada sencilla y otra fácil de integrar. Su conocida formulación:

$$\int f(x)\ g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\ g(x)dx$$

procede de la derivada del producto de dos funciones

$$(f(x)\ g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)dx$$

En muchas ocasiones este procedimiento ha de aplicarse repetidamente para obtener la función primitiva deseada. Cuando esto ocurre, presentaremos una disposición de los cálculos en forma de tabla aplicable a cualquier proceso de integración por partes. Escribiremos $I(fg')$ por $\int f(x)g'(x)dx$ para no alargar los símbolos e indicaremos $\int(\int g(x)dx)dx$, por ejemplo, por $I^2(g)$

* En el año 1988, Santiago Calviño y yo (Fernando Revilla), a la sazón profesores del I.B. Emperatriz María de Austria de Madrid, publicamos el presente artículo en el n°19 de la revista de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas. He decidido reescribirlo con mínimos cambios que no afectan en absoluto a la idea original.

para simplificar la notación. Según esto, la aplicación reiterada del método de integración por partes conduce a la serie de igualdades

$$\begin{aligned}
&I\left((fg'\right) = fg - I\left(f'g\right)\\
&I\left(f'g\right) = f'I(g) - I\left(f''I(g)\right)\\
&I\left(f''I(g)\right) = f''I^2(g) - I\left(f'''I^2(g)\right)\\
&\dots\\
&I\left(f^{(n)}I^{n-1}(g)\right) = f^{(n)}I^n(g) - I\left(f^{(n+1)}I^n(g)\right).
\end{aligned}$$

o a la igualdad

$$I(fg') = fg - f'I(g) + f''I^2(g) + \ldots + (-1)^n f^{(n)}I^n(g) + (-1)^{n+1}I(f^{(n+1)}I^n(g)).$$

El segundo miembro puede disponerse como una tabla de dos filas: la primera $f,\ f',\ f'',\ \ldots$ y la segunda $g,\ I(g),\ I^2(g),\ \ldots$, donde cada sumando es el producto de las columnas que aparecen con signos alternos, excepto el último que es la integral del producto de la funciones $I^n(g)$ y f^{n+1} indicado por la flecha, con el signo correspondiente. Por tanto la tabla será:

		1	-1	1	-1	$\ldots$	$(-1)^n$	$(-1)^{n+1}$
Derivación		f	f'	f''	f'''	$\ldots$	$f^{(n)}$	$f^{(n+1)}$
Integración	g'	g	$I(g)$	$I^2(g)$	$I^3(g)$	$\ldots$	$I^n(g) \nearrow$	

En la tabla se pueden presentar los siguientes casos:

Caso 1. Que el proceso se detenga porque una de las derivadas de f se anule, tal como ocurre en las integrales de los tipos:

$$\int p(x)e^{ax}\,dx,\ \int p(x)\,\mathrm{sen}(ax)\,dx,\ \int p(x)\cos(ax)\,dx$$

donde $p(x)$ es un polinomio.

Ejemplo 1.1. Calcular $\int x^3e^{2x}\,dx$. La correspondiente tabla es:

	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
	x^3	$3x^2$	$6x$	6	0
e^{2x}	$e^{2x}/2$	$e^{2x}/4$	$e^{2x}/8$	$e^{2x}/16 \nearrow$	

Entonces

$$\int x^3e^{2x}\,dx = \frac{x^3e^{2x}}{2} - \frac{3x^2e^{2x}}{4} + \frac{6xe^{2x}}{8} - \frac{6e^{2x}}{16} + C$$

$$= \frac{e^{2x}}{8}(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3) + C.$$

Caso 2. Que el proceso se detenga porque la integral del producto $f^{(n+1)}I^n(g)$ sea inmediata.

Ejemplo 2.1. Calcular $\int x^4 \ln x \, dx$. La correspondiente tabla es:

	$+$	$-$
	$\ln x$	$1/x$
x^4	$x^5/5 \nearrow$	

Entonces

$$\int x^4 \ln x \, dx = \frac{x^5 \ln x}{5} - \int \frac{x^4}{5} \, dx = \frac{x^5 \ln x}{5} - \frac{x^5}{25} + C$$

$$= \frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + C.$$

Caso 3. Que el proceso se detenga porque $(-1)^{n+1} f^{(n+1)} I^n(g)$ sea igual a kfg' con $k \neq 1$ constante, como aparece en las integrales del tipo

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx, \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx,$$

o bien por un simple artificio aparece la original, tal como ocurre en:

$$\int \cos^2 x \, dx, \int \operatorname{sen}^2 x \, dx.$$

Ejemplo 3.1. Calcular $\int e^{3x} \cos 2x \, dx$. La correspondiente tabla es:

	$+$	$-$	$+$
	e^{3x}	$3e^{3x}$	$9e^{3x}$
$\cos(2x)$	$\operatorname{sen}(2x)/2$	$-\cos(2x)/4 \nearrow$	

Entonces

$$\int e^{3x} \cos 2x \, dx = \frac{e^{3x} \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{3e^{3x} \cos 2x}{4} - \frac{9}{4} \int e^{3x} \cos 2x \, dx$$
$$\int e^{3x} \cos 2x \, dx = \frac{e^{3x}}{13}(2 \operatorname{sen} 2x + 3 \cos 2x) + C.$$

Ejemplo 3.2. Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$. La correspondiente tabla es:

	$+$	$-$
	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x \nearrow$	

Entonces

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\, dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{2} + C.$$

Caso 4. Que el proceso no tenga fin como contrapartida a los casos anteriores.

Ejemplo 4.1[1]. Calcular $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\, dx$. La correspondiente tabla es:

	$+$	$-$	$+$	$\ldots$	$(-1)^n$	$(-1)^{n+1}$
	$1/x$	$-1/x^2$	$2/x^3$	$\ldots$	$(-1)^n n! x^{-(n+1)}$	$(-1)^{n+1}(n+1)! x^{-(n+2)}$
e^x	e^x	e^x	e^x	$\ldots$	$e^x \nearrow$	

Como era de esperar y dado que $\int (e^x/x)\, dx$ no es expresable por medio de una función elemental, el proceso en general solo puede generar relaciones de la forma $I(fg') = \phi(x) + (-1)^{n+1} I(f^{(n+1)} I^n(g))$. En este caso obtendríamos la relación:

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx = e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{x^{k+1}} + (n+1)! \int \frac{e^x}{x^{n+2}}\, dx.$$

[1] En el artículo original pusimos como ejemplo $\int e^{-x^2} dx$. Lo he cambiado por $\int (e^x/x)\, dx$ por considerarlo más adecuado.