PROBLEMAS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS SUPERIORES (FASCÍCULO 1)

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

RESUMEN. Cada fascículo de estos *Problemas resueltos de matemáticas superiores* consta de 50 problemas resueltos. Pueden considerarse como anexos a mis libros *Problemas resueltos de álgebra* y *Problemas resueltos de análisis matemático*.

ÍNDICE

1. Diferencias de orden k y monomios generalizados

(a) Si $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_m,\ldots$ es una sucesión de números reales, se definen las *diferencias de órdenes* $1,2,3,\ldots,k\ldots$ de la forma

$$\Delta a_m = a_{m+1}-a_m$$
$$\Delta^k a_m = \Delta\left(\Delta^{k-1}a_m\right)\ \text{ si } k>1.$$

Determinar explícitamente $\Delta^2 a_m$ y $\Delta^3 a_m$.

(b) Demostrar que $\displaystyle\Delta^k a_m=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}a_{m+k-j}.$

(c) Calcular explícitamente $\Delta^4 a_m$, y $\Delta^5 a_m$.

(d) Sea $\mathcal{S}$ el espacio vectorial real de las sucesiones reales. Demostrar que la aplicación $\Delta : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ es lineal. ¿Es $\Delta^k : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ lineal?

(e) Se llaman *monomios generalizados* a los polinomios en n :

$$n^{(0)} = 1, \quad n^{(1)} = n, \quad n^{(2)} = n(n-1), \quad n^{(3)} = n(n-1)(n-2),$$
$$\ldots, \quad n^{(k)} = n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

Nótese que $n^{(k)} = V_{n,k}$ es decir, son las variaciones de n elementos tomados de k en k. Demostrar que $B = \ldots\{n^{(0)}, n^{(1)}, n^{(2)}, \ldots, n^{(k)}\}$ es base de $\mathbb{R}_k[n]$.

(f) Se considera el polinomio $p(n) = n^4 - 3n^3 + 7n^2 + n - 5 \in \mathbb{R}_4[n]$. Expresarlo como combinación lineal de la base $B = \{n^{(0)}, n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}, n^{(4)}\}$.

(g) Demostrar que para $k \geq 1$ el operador Δ actúa sobre los monomios generalizados, como el operador derivación. Es decir, demostrar que se verifica $\Delta n^{(k)} = kn^{(k-1)}$.

(h) Supongamos que se verifica $a_k = \Delta A_k$ para $k = 0, 1, \ldots, n+1$. Demostrar que

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = A_{n+1} - A_0.$$

(i) Demostrar que una solución de $n^{(k)} = \Delta A_k$ es $A_k = \dfrac{n^{(k+1)}}{k+1}$.

Nota. Denotamos a A_k por $\operatorname{Int}\left(n^{(k)}\right)$ por analogía con el operador integral. Quedaría por tanto

$$\operatorname{Int}\left(n^{(k)}\right) = \frac{n^{(k+1)}}{k+1}.$$

(j) Usando los dos apartados anteriores, dar un procedimiento para calcular sumas del tipo

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k \quad (k \text{ entero positivo}).$$

(k) Aplicar dicho procedimiento al cálculo de las sumas

a) $S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

b) $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

c) $S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$.

SOLUCIÓN. (a) Tenemos

$$\Delta^2 a_m = \Delta\left(\Delta a_m\right) = \Delta\left(a_{m+1} - a_m\right)$$
$$= a_{m+2} - a_{m+1} - \left(a_{m+1} - a_m\right) = a_{m+2} - 2a_{m+1} + a_m.$$
$$\Delta^3 a_m = \Delta\left(\Delta^2 a_m\right) = \Delta\left(a_{m+2} - 2a_{m+1} + a_m\right)$$
$$= a_{m+3} - 2a_{m+2} + a_{m+1} - \left(a_{m+2} - 2a_{m+1} + a_m\right)$$

$$= a_{m+3} - 3a_{m+2} + 3a_{m+1} - a_m.$$

(b) Veamos (por ejemplo), que la fórmula es cierta para $k = 1$ y $k = 2$. Desarrollando el segundo miembro,

$$\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\binom{1}{j}a_{m+1-j} = (-1)^0\binom{1}{0}a_{m+1}+(-1)^1\binom{1}{1}a_m = a_{m+1}-a_m = \Delta^1 a_m,$$

$$\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\binom{2}{j}a_{m+2-j} = (-1)^0\binom{2}{0}a_{m+2} + (-1)^1\binom{2}{1}a_{m+1} + (-1)^2\binom{2}{2}a_m$$

$$= a_{m+2} - 2a_{m+1} + a_m = \Delta^2 a_m.$$

Suponiendo que la fórmula dada es cierta, veamos que es cierta para $k+1$. Tenemos

$$\Delta^{k+1}a_m = \Delta\left(\Delta^k a_m\right) = \Delta\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}a_{m+k-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}a_{m+k+1-j} - \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}a_{m+k-j} \quad (*)$$

El primer sumando de la línea $(*)$ lo podemos escribir en forma

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}a_{m+k+1-j} = a_{m+k+1} + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}a_{m+k+1-j}$$

$$= \binom{k+1}{0}(-1)^0 a_{m+k+1} + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}a_{m+k+1-j}.$$

El sustraendo de la linea $(*)$ lo podemos escribir en forma

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}a_{m+k-j} = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k}{j}a_{m+k-j} + (-1)^k a_m$$

$$\underbrace{=}_{j=i-1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i-1}a_{m+k+1-i} + \binom{k+1}{k+1}(-1)^k a_m.$$

En consecuencia,

$$\Delta^{k+1}a_m = \binom{k+1}{0}(-1)^0 a_{m+k+1} + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}a_{m+k+1-j}.$$

$$+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k}{j-1}a_{m+k+1-j}+\binom{k+1}{k+1}(-1)^{k+1}a_m = \binom{k+1}{0}(-1)^0 a_{m+k+1}$$

$$+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\left[\binom{k}{j}+\binom{k}{j-1}\right]a_{m+k+1-j} + \binom{k+1}{k+1}(-1)^{k+1}a_m.$$

Usando la conocida fórmula de combinatoria $\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} = \binom{k+1}{j}$ queda

$$\Delta^{k+1} a_m = \binom{k+1}{0}(-1)^0 a_{m+k+1} + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \binom{k+1}{j} a_{m+k+1-j}$$

$$+\binom{k+1}{k+1}(-1)^{k+1} a_m = \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j \binom{k+1}{j} a_{m+(k+1)-j}$$

y la fórmula es por tanto cierta para $k+1$.

(c) Usando la obvia analogía de la fórmula del apartado anterior con la del binomio de Newton,

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$\Rightarrow \Delta^4 a_m = a_{m+4} - 4a_{m+3} + 6a_{m+2} - 4a_{m+1} + a_m.$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$\Rightarrow \Delta^5 a_m = a_{m+5} - 5a_{m+4} + 10a_{m+3} - 10a_{m+2} + 5a_{m+1} - a_m.$$

(d) Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $a_m, b_n \in \mathcal{S}$,

$$\Delta\left(\alpha a_m + \beta b_m\right) = \left(\alpha a_{m+1} + \beta b_{m+1}\right) - \left(\alpha a_m + \beta b_m\right)$$

$$= \alpha\left(a_{m+1} - a_m\right) + \beta\left(b_{m+1} - b_m\right) = \alpha \Delta a_m + \beta \Delta b_m,$$

luego Δ es lineal. Dado que $\Delta^k = \Delta \circ \Delta \circ \ldots \circ \Delta$ (k veces) y que la composición de aplicaciones lineales es lineal, concluimos que Δ^k también es lineal.

(e) Los $k+1$ polinomios de B son de distinto grado y por tanto linealmente independientes. Por otra parte, $\dim \mathbb{R}_k[n] = k+1$ lo cual implica que B es base de $\mathbb{R}_k[n]$.

(f) Expresando $p(n) = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i n^{(i)}$, operando el segundo miembro, identificando coeficientes y resolviendo el sistema lineal en las incógnitas α_i obtenemos

$$\alpha_0 = -5, \quad \alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 5, \quad \alpha_3 = 3, \quad \alpha_4 = 1,$$

es decir $p(n) = -5n^{(0)} + 6n^{(1)} + 5n^{(2)} + 3n^{(3)} + n^{(4)}$.

Nota. Se demuestra que se pueden hallar los coeficientes α_i usando de forma general el siguiente algoritmo:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & 7 & 1 & \boxed{-5} \\ 1 & & 1 & -2 & 5 & \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 6 & \end{array} \qquad \alpha_0 = -5,$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 5 & \boxed{6} \\ 2 & & 2 & 0 & \\ \hline & 1 & 0 & 5 & \end{array} \qquad \alpha_1 = 6,$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & \boxed{5} \\ 3 & & 3 & \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{3} & \end{array} \qquad \alpha_2 = 5,\ \alpha_3 = 3,\ \alpha_4 = 1.$$

(g) Tenemos

$$\begin{aligned} \Delta n^{(k)} &= (n+1)^{(k)} - n^{(k)} = (n+1)n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+2) \\ &\quad -n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+2)(n-k+1) \\ &= [n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+2)]\,(n+1-n+k-1) \\ &= kn(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+2) = k\Delta n^{(k-1)}. \end{aligned}$$

(h) Dado que $a_k = \Delta A_k = A_{k+1} - A_k$ tenemos

$$\begin{aligned} &k = 0, \quad a_0 = A_1 - A_0 \\ &k = 1, \quad a_1 = A_2 - A_1 \\ &k = 2, \quad a_2 = A_3 - A_2 \\ &\ldots \\ &k = n, \quad a_n = A_{n+1} - A_n. \end{aligned}$$

Sumando y cancelando, obtenemos

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = A_{n+1} - A_0.$$

(i) Tenemos

$$\Delta\left(\frac{n^{(k+1)}}{k+1}\right) \underbrace{=}_{\Delta \text{ lineal}} \frac{1}{k+1}\Delta n^{(k+1)} = \frac{1}{k+1}(k+1)n^{(k)} = n^{(k)}.$$

(j) Por el apartado 5, podemos expresar n^k en la forma

$$n^k = \alpha_0 n^{(0)} + \alpha_1 n^{(1)} + \alpha_2 n^{(2)} + \cdots + \alpha_k n^{(k)}.$$

Debido a la linealidad de Δ, y usando el apartado 9,

$$\begin{aligned} \operatorname{Int}\left(n^k\right) &= \alpha_0 \operatorname{Int}\left(n^{(0)}\right) + \alpha_1 \operatorname{Int}\left(n^{(1)}\right) + \alpha_2 \operatorname{Int}\left(n^{(2)}\right) + \cdots + \alpha_k \operatorname{Int}\left(n^{(k)}\right) \\ &= \alpha_0 \frac{n^{(1)}}{1} + \alpha_1 \frac{n^{(2)}}{2} + \alpha_2 \frac{n^{(3)}}{3} + \cdots + \alpha_k \frac{n^{(k+1)}}{k+1}. \end{aligned}$$

Por el apartado 8, y teniendo en cuenta que $\Delta 0 = 0$,

$$S_k = 0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = \operatorname{Int}\left((n+1)^k\right) - 0$$

$$= \alpha_0 \frac{(n+1)^{(1)}}{1} + \alpha_1 \frac{(n+1)^{(2)}}{2} + \alpha_2 \frac{(n+1)^{(3)}}{3} + \cdots + \alpha_k \frac{(n+1)^{(k+1)}}{k+1}.$$

(k) *a*) Expresando n^2 en función de monomios generalizados obtenemos $n^2 = n^{(1)} + n^{(2)}$. Usando el apartado anterior,

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{(n+1)^{(2)}}{2} + \frac{(n+1)^{(3)}}{3} = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3} \\ &= \ldots = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

b) Expresando n^3 en función de monomios generalizados obtenemos $n^3 = n^{(1)} + 3n^{(2)} + n^{(3)}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{(n+1)^{(2)}}{2} + 3\frac{(n+1)^{(3)}}{3} + \frac{(n+1)^{(4)}}{4} \\ &= \frac{(n+1)n}{2} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \\ &= \ldots = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

c) Expresando n^4 en función de monomios generalizados obtenemos $n^4 = n^{(1)} + 7n^{(2)} + 6n^{(3)} + n^{(4)}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{(n+1)^{(2)}}{2} + 7\frac{(n+1)^{(3)}}{3} + 6\frac{(n+1)^{(4)}}{4} + \frac{(n+1)^{(5)}}{5} \\ &= \frac{(n+1)n}{2} + \frac{7(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{3(n+1)n(n-1)(n-2)}{2} \\ &+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5} = \ldots = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}. \end{aligned}$$

□

2. Funciones cumpliendo $f(x) - f(y) \leq k_f \left|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y\right|$

Sea E el conjunto de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando que existe una constante $k_f \leq 0$ tal que

$$f(x) - f(y) \leq k_f \left|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y\right| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Demostrar que si $f \in E$, f es periódica de periodo 2π, continua y acotada.
(b) Sea $f \in E$ tal que f es derivable en $\mathbb{R}$. Estudiar si $f' \in E$.
(c) Demostrar que para todo $f \in E$ se verifica $f'(\pi/2) = 0$.
(d) Estudiar si puede pertenecer E una función h verificando $h(t) = t$ para todo $t \in [0, \pi/2]$.

SOLUCIÓN. (a) Tenemos las siguientes implicaciones para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f(y) \leq k_f \left|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y\right| \Rightarrow f(y) - f(x) \leq k_f \left|\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x\right|$$

$$= k_f \left|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y\right| \Rightarrow \begin{cases} -k_f \left|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y\right| \leq f(x) - f(y) \\ f(x) - f(y) \leq k_f \left|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y\right| \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left|f(x) - f(y)\right| \leq k_f \left|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y\right|. \qquad (1)$$

Sea $y \in \mathbb{R}$ y llamemos $x = y + 2\pi$. De la relación (1), obtenemos

$$0 \leq \left|f(y + 2\pi) - f(y)\right| \leq k_f \left|\operatorname{sen}(y + 2\pi) - \operatorname{sen} y\right| = 0.$$

Es decir, $f(y + 2\pi) - f(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$ luego f es periódica de periodo 2π.

Tomando $x = y + h$,

$$0 \leq \left|f(y + h) - f(y)\right| \leq k_f \left|\operatorname{sen}(y + h) - \operatorname{sen} y\right|.$$

El tercer miembro tiende a 0 cuando $h \to 0$, por tanto $|f(y+h) - f(y)| \to 0$ es decir, $\lim_{h\to 0} f(y+h) = f(y)$, lo cual implica que f es continua para todo $y \in \mathbb{R}$. Veamos que f está acotada. En efecto, tomando $y = 0$,

$$|f(x)| - |f(0)| \leq |f(x) - f(0)| \leq k_f\, |\operatorname{sen} x| \leq k_f.$$

Es decir $|f(x)| \leq |f(0)| + k_f$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego f está acotada en $\mathbb{R}$.

(b) Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} x$. Esta función es derivable en $\mathbb{R}$. Por otra parte, $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y \leq |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y|$ lo cual implica que $f \in E$. Veamos que la función $f'(x) = \cos x$ no pertenece a E. En efecto, haciendo $y = \pi - x$,

$$\cos x - \cos y = \cos x - \cos(\pi - x) = 2\cos x,$$
$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(\pi - x)| = 0.$$

No existe por tanto constante $k_{f'}$ cumpliendo $\cos x - \cos y \leq k_{f'}\, |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, luego $f' \notin E$.

(c) Haciendo $y = \pi/2$, tenemos las implicaciones

$$0 \leq |f(x) - f(\pi/2)| \leq k_f\, |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(\pi/2)|$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{si } \neq \pi/2} 0 \leq \left| \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} \right| \leq k_f \left| \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(\pi/2)}{x - \pi/2} \right|$$

$$= k_f \left| 2\cos\frac{x + \pi/2}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{x - \pi/2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x - \pi/2} \right) \right|.$$

Se verifica

$$\lim_{x\to\pi/2} \cos\frac{x+\pi/2}{2} \cos(\pi/2) = 0, \qquad \lim_{x\to\pi/2} \operatorname{sen}\frac{x-\pi/2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x - \pi/2} \right)$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{x - \pi/2}{2} \cdot \frac{1}{x - \pi/2} = \frac{1}{2}.$$

En consecuencia

$$\left| \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} \right| \to 0 \text{ si } x \to \pi/2,$$

y por tanto

$$f'(\pi/2) = \lim_{x\to\pi/2} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2 = 0}.$$

(d) La derivada por la izquierda de h en $\pi/2$ es

$$h'(\pi/2-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(\pi/2 + h) - f(\pi/2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\pi/2 + h - \pi/2}{h} = \lim_{h\to 0^-} 1 = 1.$$

La función h no puede pertenecer a E pues según el apartado anterior, se debería verificar $h'(\pi/2-) = 0$.

$\square$

3. Distancia $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ en los reales

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente.
(a) Demostrar que $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia en $\mathbb{R}$.
(b) Demostrar que si f no es continua, la distancia d no es equivalente a la distancia usual $d_u(x,y) = |x - y|$.
(c) Demostrar que si f es continua, la distancia d es equivalente a la distancia usual d_u.
(d) Demostrar que si f es lineal, d puede definirse mediante una norma.

solución. (a) Se cumplen los axiomas de distancia. En efecto,
(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Como f es estrictamente creciente, es inyectiva, luego $x = y$. (ii) $d(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d(y,x)$. (iii) $d(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)|$

$$\leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| = d(x,y) + d(y,z).$$

(b) Si f no es continua en algún punto x_0, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe al menos un $y \in \mathbb{R}$ tal que $|x_0 - y| < \delta$ y $|f(x_0) - f(y)| \geq \epsilon$. Consideremos la bola con la distancia d

$$B_d(x_0, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R} : d(x_0, y) = |f(x_0) - f(y)| < \epsilon\}.$$

Entonces, toda bola

$$B_{d_u}(x_0, \delta) = \{y \in \mathbb{R} : d(x_0, y) = |x_0 - y| < \delta\}$$

con la distancia usual no está contenida en $B_d(x_0, \epsilon)$, lo cual implica que d y d_u no son equivalentes de acuerdo con un conocido teorema de caracterización.

(c) Consideremos cualquier bola $B_d(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R} : d(x,y) = |f(x) - f(y)| < \epsilon\}$. Veamos que existe $B_{d_u}(x, \delta)$ tal que $B_{d_u}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$. En efecto, como f es continua en x, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo y que satisface $|x - y| < \delta$ se verifica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Esto prueba que $B_{d_u}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$.

Recíprocamente, veamos que dada cualquier bola $B_{d_u}(x, \epsilon)$ existe una bola $B_d(x, \delta)$ tal que $B_d(x, \delta) \subset B_{d_u}(x, \epsilon)$. En efecto, al ser f estrictamente creciente y continua, existe y es continua la función $f^{-1} : \ f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Por tanto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \delta \Rightarrow \left| f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(y)) \right| = |x - y| < \epsilon,$$

es derir, $d(x,y) < \delta \Rightarrow d_u(x,y) < \epsilon$ lo cual prueba que $B_d(x, \delta) \subset B_{d_u}(x, \epsilon)$. De acuerdo con un conocido teorema de caracterización, concluimos que d y d_u son equivalentes.

(d) Veamos que la aplicación

$$\| \ \| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \|x\| = |f(x)|,$$

es una norma. En efecto,
(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Por ser f lineal y estrictamente creciente, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(ii) $\|\lambda x\| = |f(\lambda x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda|\,|f(x)| = |\lambda|\,\|x\|$.
(iii) $\|x + y\| = |f(x + y)| = |f(x) + f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| = \|x\| + \|y\|$.

(d) Veamos que la aplicación

$$\|\ \| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \|x\| = |f(x)|,$$

es una norma. En efecto,
(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Por ser f lineal y estrictamente creciente, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(ii) $\|\lambda x\| = |f(\lambda x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda|\,|f(x)| = |\lambda|\,\|x\|$.
(iii) $\|x + y\| = |f(x + y)| = |f(x) + f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| = \|x\| + \|y\|$.

La distancia inducida por esta norma es

$$d(x, y) = \|x - y\| = |f(x - y)| = |f(x) - f(y)|,$$

que es la distancia dada. □

4. Curvatura, torsión y ecuaciones intrínsecas

(a) Determínese en $t = 1$ la curvatura y la torsión de la curva

$$x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3.$$

(b) Determínense las ecuaciones intrínsecas de la catenaria de ecuación

$$x = a \cosh \frac{x}{a},\ y = t.$$

(Propuesto en examen, Amp. Mat., ETS de Ing. Industriales, UNED).

Solución. (a) Representamos la curva en forma vectorial $\vec{r} = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$. Tenemos

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt}(1) = (0, 6, 6),$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (-6t, 6, 6t) \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1) = (-6, 6, 6),$$

$$\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = (-6, 0, 6) \Rightarrow \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}(1) = (-6, 0, 6),$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(1) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -36\vec{j} + 36\vec{k},$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(1)\right| = 6\sqrt{2}\ , \quad \left|\frac{d\vec{r}}{dt}(1) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1)\right| = 36\sqrt{2},$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}(1) \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1)\right)^2 = 7,$$

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}(1), \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1), \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}(1)\right] = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 216.$$

La curvatura $\kappa(1)$ y torsión $\tau(1)$ de la curva en $t = 1$ son por tanto

$$\kappa(1) = \frac{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}(1) \times \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1)\right|}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}(1)\right|^3} = \frac{36\sqrt{2}}{(6\sqrt{2})^3} = \frac{1}{12},$$

$$\tau(1) = \frac{\left[\dfrac{d\vec{r}}{dt}(1), \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1), \dfrac{d^3\vec{r}}{dt^3}(1)\right]}{\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}(1) \times \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}(1)\right)^2} = \frac{216}{72} = 3.$$

(b) Las ecuaciones intrínsecas de una curva vienen dadas por $\kappa = \kappa(s)$, $\tau = \tau(s)$ siendo κ la curvatura, τ la torsión y s el parámetro arco. Tenemos

$$\kappa^2 = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}{(x'^{\,2} + y'^{\,2})^3} = \frac{\begin{vmatrix} \sinh \frac{t}{a} & 1 \\ \frac{1}{a}\cosh \frac{t}{a} & 0 \end{vmatrix}^2}{\left(\sinh^2 \frac{t}{a} + 1\right)^3} = \frac{\frac{1}{a^2}\cosh^2 \frac{t}{a}}{\left(\cosh^2 \frac{t}{a}\right)^3} = \frac{1}{a^2 \cosh^4 \frac{t}{a}}. \quad (1)$$

La longitud del arco es

$$s = \int_0^t \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2}\, du = \int_0^t \sqrt{\sinh^2 \frac{u}{a} + 1}\, du$$
$$= \int_0^t \cosh \frac{u}{a}\, du = \left[a \sinh \frac{u}{a}\right]_0^t = a \sinh \frac{t}{a}.$$

Por otra parte

$$s^2 + a^2 = a^2 \sinh^2 \frac{t}{a} + a^2 = a^2 \cosh^2 \frac{t}{a}\ . \quad (2).$$

Eliminando t de las relaciones (1) y (2) obtenemos $\kappa = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$. Dado que la curva es plana, su torsión es 0, por tanto las ecuaciones intrínsecas de la catenaria son

$$\begin{cases} \kappa = & \dfrac{a}{s^2 + a^2} \\ \tau = & 0. \end{cases}$$

□

5. Esquema de urnas de Poisson. Función generatriz

(a) Supongamos que realizamos n experimentos aleatorios y que en el experimento r-ésimo la probabilidad del suceso A (éxito) es p_r y la del complementario (fracaso) es $q_r = 1 - p_r$. Llamemos p_{rn} a la probabilidad de obtener r éxitos en las n pruebas. Denotemos

$$\alpha_n(\xi) = p_{0n} + p_{1n}\xi + p_{2n}\xi^2 + \ldots + p_{rn}\xi^r + \ldots$$

(suma con un número finito de términos pues $p_{rn} = 0$ si $r > n$). Demostrar que se verifica

$$\alpha_n(\xi) = (p_1\xi + q_1)(p_2\xi + q_2)\dots(p_n\xi + q_n).$$

Nota: como consecuencia, la identificación de los coeficientes de ξ^r en la igualdad anterior permite calcular p_{rn} en función de las probabilidades p_i y q_j.

(b) Tres urnas U_1, U_2, U_3 tienen las siguientes composiciones

$$\begin{aligned} &U_1 : 2 \text{ bolas blancas y } 3 \text{ negras},\\ &U_2 : 1 \text{ blanca y } 2 \text{ negras},\\ &U_3 : 3 \text{ blancas y } 3 \text{ negras}. \end{aligned}$$

Se extrae una bola de cada urna. Usar la función generatriz para hallar la probabilidad de obtener exactamente dos bolas blancas.

SOLUCIÓN. (a) Consideremos los sucesos: $C \equiv$ éxito en la prueba n), $D \equiv r-1$ éxitos en las $n-1$ primeras pruebas, $E \equiv$ fracaso en la prueba n y $F \equiv r$ éxitos en las $n-1$ primeras pruebas. Entonces, el suceso $B \equiv r$ éxitos en las n pruebas es $B = (C \cap D) \cup (E \cap F)$ y por tanto

$$p_{rn} = p_n q_{r-1,n-1} + q_n p_{r,n-1}.$$

Además tenemos las condiciones límites:
(i) $p_{r0} = 0$ si $r > 1$.
(ii) $p_{00} = 1$.
(iii) $p_{0n} = q_1 q_2 \dots q_n$ si $n > 0$.
Introducimos ahora la llamada función generatriz $\alpha_n(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} p_{rn}\xi^r$, suma esta que ya hemos comentado que tiene un número finito de términos. Tenemos las siguientes igualdades

$$q_n\alpha_{n-1}(\xi) = q_n \sum_{r=0}^{\infty} p_{r,n-1}\xi^r = q_n p_{0,n-1} + \sum_{r=1}^{\infty} q_n p_{r,n-1}\xi^r. \quad [1]$$

$$\xi p_n\alpha_{n-1}(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} \xi p_n p_{r,n-1}\xi^r = \sum_{r=1}^{\infty} p_n p_{r,n-1}\xi^r. \quad [2]$$

Sumando las dos igualdades anteriores obtenemos

$$(p_n\xi + q_n)\alpha_{n-1}(\xi) = q_n p_{0,n-1} + \sum_{r=1}^{\infty}(q_n p_{r,n-1} + p_n p_{r-1,n-1})\xi^r$$

$$= q_n q_1 q_2 \dots q_{n-1} + \sum_{r=1}^{\infty} p_{rn}\xi^r = p_{0n} + \sum_{r=1}^{\infty} p_{rn}\xi^r = \sum_{r=0}^{\infty} p_{rn}\xi^r = \alpha_n(\xi).$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_n(\xi) &= (p_n\xi + q_n)\alpha_{n-1}(\xi) = (p_n\xi + q_n)(p_{n-1}\xi + q_{n-1})\alpha_{n-2}(\xi)\\ &= \dots = (p_n\xi + q_n)(p_{n-1}\xi + q_{n-1})\dots(p_2\xi + q_2)\alpha_1(\xi). \end{aligned}$$

Pero $\alpha_1(\xi) = p_{01} + p_{11}\xi = p_1\xi + q_1$, de lo que concluimos

$$\alpha_n(\xi) = (p_1\xi + q_1)(p_2\xi + q_2)\dots(p_n\xi + q_n).$$

(b) Tenemos

$$\alpha_3(\xi) = p_{03} + p_{13}\xi + p_{23}\xi^2 + p_{33}\xi^2 = (p_1\xi + q_1)(p_2\xi + q_2)(p_3\xi + q_3).$$

Igualando los coeficientes de ξ^2: $p_{23} = p_1p_2q_3 + q_1p_2p_3 + p_1q_2p_3$, con lo cual la probabilidad de obtener exactamente dos bolas blancas es

$$p_{23} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \dots = \frac{3}{10}.$$

$\square$

6. Cálculo de $\sqrt{A}$, A^{-1} y e^A por matrices componentes

Se considera la matriz real: $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Calcular sus matrices componentes.
(b) Como aplicación, calcular $\sqrt{A}$, A^{-1} y e^A.

SOLUCIÓN. Recordamos el siguiente teorema:

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ de polinomio mínimo

$$\mu(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}\dots(\lambda - \lambda_s)^{m_s}.$$

Entonces, existen matrices A_{ik} con $i = 1, 2\dots, s,\ k = 0, 1, \dots, m_i - 1$ tales que para toda función $f : \Omega \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ tal que existe $f(A)$ es decir $\exists f^{(k)}(\lambda_i)$ con $i = 1, 2\dots, s,\ k = 0, 1, \dots, m_i - 1$ se verifica

$$f(A) = \sum_{i=0}^{s}\sum_{k=0}^{m_i-1} f^{(k)}(\lambda_i)A_{ik}.$$

A las matrices A_{ik} se las llama *matrices componentes* de A.

(a) El polinomio mínimo de la matriz A es $\mu(\lambda) = (\lambda - 4)^2$. Es decir $\lambda_1 = 4$ es el único valor propio de A, las matrices componentes de A son $A_{10},\ A_{11}$ y para toda función f para la cual exista $f(A)$ (es decir, existen $f(4)$ y $f'(4)$) se verifica:

$$f(A) = f(4)A_{10} + f'(4)A_{11}. \quad (*)$$

Para hallar las matrices componentes elegimos las funciones polinómicas (siempre están definidas) $f(\lambda) = 1$, $f(\lambda) = \lambda$ y aplicamos la fórmula $(*)$ lo cual nos conduce al sistema matricial:

$$\begin{cases} I = A_{10} \\ A = 4A_{10} + A_{11} \end{cases}$$

que resuelto proporciona

$$A_{10} = I\ ,\ A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando $(*)$ a la función $f(\lambda)=\sqrt{\lambda}$ y usando $f'(\lambda)=1/(2\sqrt{\lambda})$ obtenemos:

$$f(A)=\sqrt{A}=2A_{10}+\frac{1}{4}A_{11}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}9&-1\\1&7\end{bmatrix}.$$

Aplicando $(*)$ a la función $f(\lambda)=1/\lambda$ y usando $f'(\lambda)=-1/\lambda^2$ obtenemos:

$$f(A)=\frac{1}{A}=A^{-1}=\frac{1}{4}A_{10}-\frac{1}{16}A_{11}=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}3&1\\-1&5\end{bmatrix}.$$

Aplicando $(*)$ a la función $f(\lambda)=e^{\lambda}$ y usando $f'(\lambda)=e^{\lambda}$ obtenemos:

$$f(A)=e^{A}=e^4A_{10}+e^4A_{11}=e^4\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}.$$

$\square$

7. Cociente de factores integrantes

Demostrar que si μ_1 y μ_2 son factores integrantes de la ecuación diferencial

$$Pdx+Qdy=0 \quad (1)$$

entonces $\dfrac{\mu_2}{\mu_1}=C$ con C constante es solución de (1).

SOLUCIÓN. Diferenciando $\dfrac{\mu_2}{\mu_1}=C$:

$$d\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)=dC,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_2\cdot\frac{1}{\mu_1}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_2\cdot\frac{1}{\mu_1}\right)dy=0,$$

$$\left(\frac{\partial\mu_2}{\partial x}\frac{1}{\mu_1}+\mu_2\left(-\frac{1}{\mu_1^2}\right)\frac{\partial\mu_1}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\frac{1}{\mu_1}+\mu_2\left(-\frac{1}{\mu_1^2}\right)\frac{\partial\mu_1}{\partial y}\right)dy=0.$$

Multiplicando por μ_1^2 :

$$\left(\mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial x}\right)dx+\left(\mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial y}-\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial y}\right)dy=0.\quad (2)$$

Por ser μ_1 factor integrante de (1),

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu_1P)-\frac{\partial}{\partial x}(\mu_1Q)=0,$$

$$P\frac{\partial\mu_1}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu_1}{\partial x}+\mu_1\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0.\quad (3)$$

Por ser μ_2 factor integrante de (1),

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu_2P)-\frac{\partial}{\partial x}(\mu_2Q)=0,$$

$$P\frac{\partial\mu_2}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu_2}{\partial x}+\mu_2\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0.\quad (4)$$

De (3) y (4)

$$\mu_2\left(P\frac{\partial\mu_1}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu_1}{\partial x}\right)-\mu_1\left(P\frac{\partial\mu_2}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu_2}{\partial x}\right)=0,$$

es decir

$$\left(\mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial x}\right)dx+\left(\mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial y}-\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial y}\right)dy=0,$$

que es justamente la expresión (2) lo cual reduce (2) a (1), y queda demostrado que $\dfrac{\mu_2}{\mu_1}=C$ es solución de (1). □

8. Los grupos aditivo y multiplicativo de un cuerpo no son isomorfos

Demostrar que los grupos aditivo y multiplicativo de un cuerpo nunca son isomorfos.

SOLUCIÓN. Sea K un cuerpo y sean K^+ y $K^\times$ los grupos aditivo y multiplicativo de K respectivamente. Si K^+ es finito, entonces $|F^\times|=|F^+|-1$, por tanto no existe biyección $\Phi:K^+\to K^\times$ lo cual implica que K^+ y $K^\times$ no son isomorfos.
Supongamos ahora que K es infinito y que $\Phi:K^+\to K^\times$ es isomorfismo de grupos, con lo cual será $\Phi(0)=1$.
Si $1=-1$, sea $\Phi(1)=a$. Entonces, $\Phi(-1)=a^{-1}$ y también $\Phi(1)=\Phi(-1)=a$. Por tanto

$$a^2=\Phi(1)\Phi(-1)=\Phi(1-1)=\Phi(0)=1\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=1\vee a=-1$$

$$\Rightarrow a=1\Rightarrow\begin{cases}\Phi(0)=1\\ \quad\text{y}\\ \Phi(1)=a=1\end{cases}\Rightarrow\Phi\text{ no es inyectiva,}$$

lo cual es absurdo.
Si $1\neq-1$, sea $b\in K$ tal que $\Phi(b)=-1$. Entonces

$$\Phi(2b)=\Phi(b+b)=\Phi(b)^2=1.$$

Como Φ es inyectiva, $2b=0$, es decir $b=0$ (pues $1+1\neq0$). Por tanto $1=\Phi(0)=-1$, lo cual es absurdo. □

9. Desarrollo de Taylor de orden n de $f(x,y)=\log(x+y)$

Desarrollar la función $f(x,y)=\log(x+y)$ por la fórmula de Taylor de orden n en un entorno de $(1,1)$.

SOLUCIÓN. Hallemos las primeras derivadas parciales de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x+y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{1}{(x+y)^2}.$$

Demostremos por inducción que en general se verifica

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha\partial y^\beta}=(-1)^{n+1}(n-1)!(x+y)^{-n},\quad(\alpha+\beta=n).$$

La fórmula es claramente cierta para $n=1$. Supongamos que es cierta para $n-1$ y veamos que también es cierta para n. En efecto,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{\alpha-1}\partial y^\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left((-1)^n(n-2)!(x+y)^{-n+1}\right)$$

$$=(-1)^n(n-2)!\cdot(-n+1)(x+y)^{-n}=(-1)^{n+1}(n-1)!(x+y)^{-n}.$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{\alpha}\partial y^{\beta-1}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left((-1)^n(n-2)!(x+y)^{-n+1}\right)$$

$$=(-1)^n(n-2)!\cdot(-n+1)(x+y)^{-n}=(-1)^{n+1}(n-1)!(x+y)^{-n}.$$

Nota. Estamos usando el que f es de clase infinito en un entorno de $(1,1)$ es consecuencia, las parciales sucesivas no dependen del orden de drivación. Se verifica $f(1,1)=\log 2$. Por otra parte

$$\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^1 f(1,1)=(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)+(y-1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-1)+(y-1)\right].$$

$$\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(1,1)=(x-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)$$

$$+2(x-1)(y-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)+(y-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)$$

$$=-\frac{1}{2^2}\left[(x-1)+(y-1)\right]^2.$$

En general,

$$\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(1,1)=(-1)^{n+1}(n-1)!\frac{1}{2^n}\left[(x-1)+(y-1)\right]^n.$$

El desarrollo pedido es por tanto

$$\log(x+y)=\log 2+\frac{1}{2}\left[(x-1)+(y-1)\right]-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\left[(x-1)+(y-1)\right]^2$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}\left[(x-1)+(y-1)\right]^n$$

$$+(-1)^{n+2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(\xi+\eta)^{n+1}}\left[(x-1)+(y-1)\right]^{n+1},$$

con (ξ,η) en el segmento que une los puntos $(1,1)$ y (x,y). $\square$

10. Polinomio de $\mathbb{Z}[x]$ con raíz $\alpha = 2 + \sqrt[3]{3}$

(a) Encontrar un polinomio $p(x)$ de tercer grado de $\mathbb{Z}[x]$ admitiendo como raíz $\alpha = 2 + \sqrt[3]{3}$.
(b) Descomponer $p(x)$ en producto de factores irreducibles en $\mathbb{R}[x]$.

SOLUCIÓN. (a) Sea $p(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \in \mathbb{Z}[x]$ con $c_3 \neq 0$. Si tiene como raíz a α,

$$c_3\alpha^3 + c_2\alpha^2 + c_1\alpha + c_0 = 0,$$
$$\alpha^3 = -\frac{c_2}{c_3}\alpha^2 - \frac{c_1}{c_3}\alpha - \frac{c_0}{c_3} = b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0, \quad (b_k \in \mathbb{Q}).$$

Es decir, necesariamente α^3 ha de ser combinación lineal racional de $\alpha^2, \alpha, 1$. Tenemos

$$\alpha^2 = \left(2 + \sqrt[3]{3}\right)^2 = 4 + 4 \cdot 3^{1/3} + 3^{2/3},$$

$$\alpha^3 = \left(2 + \sqrt[3]{3}\right)^3 = 11 + 12 \cdot 3^{1/3} + 6 \cdot 3^{2/3}.$$

La igualdad $\alpha^3 = b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0$ equivale a

$$11 + 12 \cdot 3^{1/3} + 6 \cdot 3^{2/3} = b_2 \left(4 + 4 \cdot 3^{1/3} + 3^{2/3}\right)$$
$$+ b_1 \left(2 + 3^{1/3}\right) + b_0.$$

La igualdad anterior se verifica si

$$\begin{cases} b_2 = 6 \\ b_1 + 4b_2 = 12 \\ b_0 + 2b_1 + 4b_2 = 11. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos $b_2 = 6$, $b_1 = -12$, $b_0 = 11$. Obtenemos el polinomio

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 11.$$

(b) Aplicando la regla de Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 12 & -11 \\ 2+3^{1/3} & & 2+3^{1/3} & -8-2\cdot 3^{1/3}+3^{2/3} & 11 \\ \hline & 1 & -4+3^{1/3} & 4-2\cdot 3^{1/3}+3^{2/3} & 0 \end{array}$$

El polinomio $p(x)$ lo podemos por tanto expresar en la forma

$$p(x) = (x - \alpha)\, q(x), \text{ con } q(x) = x^2 + \left(-4 + 3^{1/3}\right) x + 4 - 2 \cdot 3^{1/3} + 3^{2/3}.$$

El discriminante de $q(x)$ es

$$D = \left(-4 + 3^{1/3}\right)^2 - 4\left(4 - 2 \cdot 3^{1/3} + 3^{2/3}\right) = -3 \cdot 3^{2/3} < 0,$$

luego $q(x)$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ y la descomposición pedida es $p(x) = (x - \alpha)\, q(x)$.

$\square$

11. Configuración de centro en un sistema autónomo

Se considera el sistema diferencial $X' = AX$, con $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Se pide:
(a) Escribir la forma general de la solución para resolver el sistema con la condición inicial $X(0) = (1,0)^t$.
(b) Dibujar la órbita que pasa por el punto $(1,0)$.
(c) Calcular la matriz exponencial $\exp{(tA)}$.

solución. (a) El polinomio característico de A es $\lambda^2 + 1 = 0$ y por tanto los valores propios son $\lambda = \alpha \pm \beta i = \pm i$. El subespacio propio asociado al valor propio i, y una base del mismo son:

$$V_i \equiv \begin{cases} (1-i)x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + (-1-i)x_2 = 0, \end{cases} \qquad B_i = \{(1+i, 1)^t\}.$$

Como A es real, una base de V_{-i} es $B_{-i} = \{(1-i,1)^t\}$. Este vector lo podemos expresar en la forma $(1-i,1)^t = U + iV$ con $U = (1,1)^t$ y $V = (-1,0)^t$. Por un conocido teorema, si $P = [U \ , \ V]$, entonces:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

y el cambio $X = PX^*$ proporciona las soluciones:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

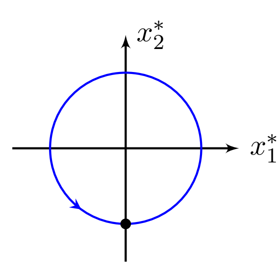
Para $X = (1,0)^t$ tenemos:

$$X = PX^* \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

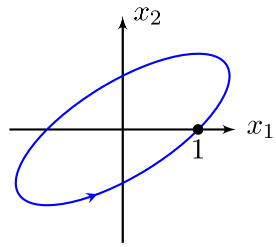
Es decir, la solución que cumple que cumple la condición inicial $X(0) = (1,0)^t$ es:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(b) La órbita que pasa por $(1,0)$ es una circunferencia de centro el origen y radio 1 en el plano $x_1^* x_2^*$ recorrida en sentido antihorario:



El cambio $X = PX^*$ proporciona la correspondiente elipse en el plano $x_1 x_2$.



c) La matriz Q cuyas columnas son los vectores propios verifica $Q^{-1}AP = D$ con $D = \operatorname{diag}(i, -i)$, por tanto:

$$e^{tA} = Qe^{tD}Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & -2\sin t \\ \sin t & -\sin t + \cos t \end{bmatrix}.$$

□

12. Matrices cuadradas invertibles con coeficientes enteros

Sea $\sum_n = \mathbb{Z}^{n\times n}$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que una matrix $M \in \sum_n$ admita una inversa en $\sum_n$ es que

$$\det M = \pm 1.$$

SOLUCIÓN. Si M es inversible en $\sum_n$ entonces

$$(\det M)\left(\det M^{-1}\right) = \det\left(MM^{-1}\right) = \det I = 1$$

y dado que $\det M$ y $\det M^{-1}$ son enteros, ha de ser necesariamente $\det M = \pm 1$.
Recíprocamente, si $M \in \sum_n$ y $\det M = \pm 1$, entonces M tiene inversa en $\mathbb{R}^{n\times n}$ (pues su determinante es no nulo). Cada elemento de M^{-1} es cociente de un adjunto de M (que es entero) entre ± 1, y por tanto es entero. Es decir, $M^{-1} \in \sum_n$. □

13. Cálculo de $\lim_{x\to+\infty} e^{x^2} \int_{x-\frac{\log x}{2x}}^{x} e^{-t^2}\,dt$

Evaluar justificadamente

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2} \int_{x-\frac{\log x}{2x}}^{x} e^{-t^2}\,dt.$$

SOLUCIÓN. Hallemos el límite de cada uno de los factores que aparecen. El límite del primer factor es

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Hallemos el límite del segundo factor. Tenemos

$$x > x - \frac{\log x}{2x} \Leftrightarrow \frac{\log x}{2x} > 0,$$

y esto último ocurre para $x > 1$. Dado que $0 < e^{-t^2}$ para todo t real,

$$0 \leq \int_{x-\frac{\log x}{2x}}^{x} e^{-t^2} dt.$$

Dado que $e^{-t^2} \leq 1$ para todo t real,

$$\int_{x-\frac{\log x}{2x}}^{x} e^{-t^2} dt \leq \int_{x-\frac{\log x}{2x}}^{x} 1\ dt = x - \left(x - \frac{\log x}{2x}\right) = \frac{\log x}{2x}.$$

En consecuencia

$$0 \leq \int_{x-\frac{\log x}{2x}}^{x} e^{-t^2} dt \leq \frac{\log x}{2x}.$$

Usando la regla de L'Hopital obtenemos $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{2x} = 0$ y por tanto

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{x-\frac{\log x}{2x}}^{x} e^{-t^2} dt = 0.$$

Llamando L al límite pedido, usando la regla de L'Hopital y usando el teorema fundamental del Cálculo

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_{x-\frac{\log x}{2x}}^{x} e^{-t^2} dt}{e^{-x^2}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2} - e^{\left(x-\frac{\log x}{2x}\right)^2}\left(x - \frac{\log x}{2x}\right)'}{-2xe^{-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}\left(1 - e^{\frac{\log x}{x} - \frac{\log^2 x}{4x^2}}\right)\left(1 - \frac{(1/x)2x - 2\log x}{4x^2}\right)}{-2xe^{-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1 - e^{\frac{\log x}{x} - \frac{\log^2 x}{4x^2}}\right)\left(1 - \frac{1-\log x}{2x^2}\right)}{-2x}.$$

Hallemos límites de expresiones que aparecen en el límite anterior: Hallemos límtes de expresiones que aparecen en el límite anterior:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\} \underbrace{=}_{\text{L'Hopital}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x}{4x^2} = \frac{1}{4} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \log x}{2x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\log x}{x^2}\right) = 0.$$

El límite pedido es por tanto

$$L = \frac{(1 - e^0)(1 - 0)}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0.$$

$\square$

14. Inversa de $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e interpretación geométrica

Se considera la matriz

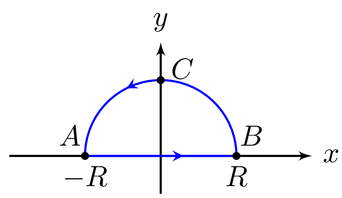
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\nvDash\times\nvDash}.$$

(a) Hallar A^2 y A^{-1}.
(b) Interpretar geométricamente el resultado.

SOLUCIÓN. a) Operando obtenemos $A^2 = 9I$, y de $A\left(\dfrac{1}{9}A\right) = I$ deducimos que $A^{-1} = \dfrac{1}{9}A$.
(b) Llamando $B = \dfrac{1}{3}A$, obtenemos $B^2 = I$, es decir $B^{-1} = B$. Por otra parte B es simétrica, con lo cual $B^t = B^{-1}$ y por tanto es ortogonal. Hallando los valores propios de B, obtenemos $\lambda_1 = 1$ (simple) y $\lambda_2 = -1$ (doble) lo cual implica que B representa una simetria axial en $\mathbb{R}^3$.
Concluimos que $A = 3B$ representa la composición de una simetría axial con una homotecia de razón 3. $\square$

15. Integral $\int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}dx$ por residuos

Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}dx$.
Sugerencia: considerar $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log(z+i)}{z^2+1}dz$ siendo γ la curva $ABCA$ de la figura



SOLUCIÓN. Sea Γ la curva ABC, es decir la semicircunferencia superior. Tenemos

$$\int_{-R}^{R} \frac{\log(x+i)}{x^2+1}dx + \int_\Gamma \frac{\log(z+i)}{z^2+1}dz = \int_\gamma \frac{\log(z+i)}{z^2+i}dz. \quad (1)$$

Podemos expresar

$$\int_{-R}^{R} \frac{\log(x+i)}{x^2+1}dx = \int_{-R}^{0} \frac{\log(x+i)}{x^2+1}dx + \int_{0}^{R} \frac{\log(x+i)}{x^2+1}dx$$

$$\underbrace{=}_{t=-x} \int_{R}^{0} \frac{\log(-t+i)}{t^2+1}(-dt) + \int_{0}^{R} \frac{\log(x+i)}{x^2+1}dx$$

$$= \int_0^R \frac{\log(-x+i)}{x^2+1}dx + \int_0^R \frac{\log(x+i)}{x^2+1}dx = \int_0^R \frac{\log(i-x)+\log(i+x)}{x^2+1}dx.$$

Simplifiquemos el numerador,

$$\begin{aligned} \log(i-x)+\log(i+x) &= \log(i-x)(i+x) \\ &= \log(-1-x^2) = \log(-1)(x^2+1) \\ &= \log(-1)+\log(x^2+1) = \pi i + \log(x^2+1). \end{aligned}$$

La expresión (1) equivale por tanto a

$$\pi i \int_0^R \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^R \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}dx + \int_\Gamma \frac{\log(z+i)}{z^2+1}dz$$
$$= \int_\gamma \frac{\log(z+i)}{z^2+i}dz. \quad (2)$$

Hallemos los límites cuando $R \to +\infty$ de los sumandos que aparecen en (2).
(i) Límite de la primera integral.

$$\lim_{R\to+\infty} \pi i \int_0^R \frac{dx}{x^2+1} = \pi i \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi i \left[\arctan x\right]_0^{+\infty}$$
$$= \pi i \left[\arctan(+\infty) - \arctan 0\right] = \pi i \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2} i.$$

(ii) Límite de la segunda integral.

$$\lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}dx = I.$$

(iii) Límite de la tercera integral. Acotemos el módulo de la función integrando en Γ :

$$\left|\frac{\log(z+i)}{z^2+1}\right| \leq \frac{|\log(z+i)|}{|z|^2} \leq \frac{\log|z+i|}{|z|^2}$$
$$\leq \frac{\log(|z|+|i|)}{|z|^2} \underbrace{\leq}_{\text{si } |z| \text{ suf. grande}} \frac{\log 2|z|}{|z|^2} = \frac{\log 2R}{R^2}.$$

La longitud de Γ es πR, por tanto

$$0 \leq \left|\int_\Gamma \frac{\log(z+i)}{z^2+1}dz\right| \leq \frac{\log 2R}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi \log 2R}{R} \to 0 \text{ si } R \to +\infty.$$

En consecuencia,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\Gamma \frac{\log(z+i)}{z^2+1}dz = 0.$$

(iv) Límite de la cuarta integral. El único polo de $f(z) = \dfrac{\log(z+i)}{z^2+1}$ en el semiplano superior para $R > 1$ es $z = i$, y su residuo es

$$\text{Res }[f,i] = \lim_{z\to i} \frac{\log(z+i)}{z^2+1}(z-i) = \lim_{z\to i} \frac{\log(z+i)}{z+i}$$
$$= \frac{\log(2i)}{2i} = \frac{\log 2 + (\pi/2)i}{2i}.$$

Por tanto
$$\int_\gamma \frac{\log(z+i)}{z^2+i}dz = 2\pi i\left(\frac{\log 2 + (\pi/2)i}{2i}\right) = \pi\log 2 + \frac{\pi^2}{2}i.$$
De los límites tomados en (2) deducimos
$$\frac{\pi^2}{2}i + I + 0 = \pi\log 2 + \frac{\pi^2}{2}i,$$
luego la integral pedida es
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x^2+1}dx = \pi\log 2.$$
□

16. Estudio de la biyectividad de $f(X) = (A\cap X, B\cap X)$

Sean A y B dos partes no vacías de un conjunto E y
$$f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B),\quad f(X) = (A\cap X, B\cap X).$$
(a) Estudiar la inyectividad de f.
(b) Estudiar la sobreyectividad de f.
(c) Determinar f^{-1} en los casos en los que f sea biyectiva.

SOLUCIÓN. (a) Veamos que f es inyectiva si y sólo si $A\cup B = E$. En efecto, supongamos que f es inyectiva. Tenemos
$$f(E) = (A\cap E, B\cap E) = (A, B).$$
Por otra parte
$$f(A\cup B) = (A\cap(A\cup B), B\cap(A\cup B)) = (A, B).$$
Es decir $f(E) = f(A\cup B)$, luego $A\cup B = E$ por ser f inyectiva. Recíprocamente, supongamos que $A\cup B = E$. Entonces,
$$f(X) = f(Y) \Rightarrow (A\cap X, B\cap X) = (A\cap Y, B\cap Y)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A\cap X = A\cap Y \\ B\cap X = B\cap Y \end{cases} \Rightarrow (A\cap X)\cup(B\cap X) = (A\cap Y)\cup(B\cap Y)$$
$$\Rightarrow X\cap(A\cup B) = Y\cap(A\cup B) \Rightarrow X\cap E = Y\cap E \Rightarrow X = Y$$
y por tanto, f es inyectiva.

(b) Veamos que f es sobreyectiva si y solamente si $A\cap B = \emptyset$. En efecto, si f es sobreyectiva existe $X\in\mathcal{P}(E)$ tal que $f(X) = (A,\emptyset)$. Entonces, $A\cap X = A$ y $B\cap X = \emptyset$. De aquí se deduce $A\subset X\subset B^c$, luego $A\cap B = \emptyset$. Recíprocamente, si $A\cap B = \emptyset$, sea $(X,Y)\in\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$. Tenemos
$$f(X\cup Y) = (A\cap(X\cup Y), B\cap(X\cup Y))$$
$$= ((A\cap X)\cup(A\cap Y), (B\cap X)\cup(B\cap Y)) = (X\cup\emptyset, \emptyset\cup Y) = (X, Y),$$

luego f es sobreyectiva.

(c) De los apartados anteriores, f es biyectiva si y sólo si, A y B son complementarios en E. Si es biyectiva,

$$f^{-1} : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(E), \quad f^{-1}(X, Y) = X \cup Y.$$

$\square$

17. Extremos de $f : (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^m y^n z^p$ sobre un plano

Hallar, caso de existir, los valores extremos de la función

$$f : \left(\mathbb{R}^+\right)^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^m y^n z^p \quad (m.n.p \text{ enteros positivos})$$

con $x + y + z = a$ ($a \in \mathbb{R}^+$).

SOLUCIÓN. El problema es equivalente a hallar los extremos de la función

$$g : \Omega \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x^m y^n (a - x - y)^p$$

en el abierto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, a - x - y > 0\}$. Puntos críticos de g,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} [ma - my - (m + p)x]\, x^{m-1} y^n (a - x - y)^{p-1} \\ [na - nx - (n + p)y]\, x^m y^{n-1} (a - x - y)^{p-1}. \end{cases}$$

Como $x > 0$, $y > 0$, y $a - x - y > 0$, el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} (m + p)x + my = ma \\ nx + (n + p)y = na, \end{cases}$$

cuya única solución es

$$P = \left(\frac{ma}{m + n + p}, \frac{na}{m + n + p}\right),$$

y se comprueba inmediatamente que $P \in \Omega$. El hessiano de g en P es

$$H_g(P) = \det \begin{bmatrix} g_{xx}(P) & g_{xy}(P) \\ g_{yx}(P) & g_{yy}(P) \end{bmatrix} = \ldots$$

$$= (m + n + p) \left(\frac{ma}{m + n + p}\right)^{2(m+n+p-2)} m^{2m-1} n^{2n-1} p^{2p-1} > 0.$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(P) = \ldots$$

$$= -(m + p) \left(\frac{ma}{m + n + p}\right)^{m-1} \left(\frac{na}{m + n + p}\right)^n \left(\frac{pa}{m + n + p}\right)^{p-1} < 0.$$

Dado que $g \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, deducimos por un conocido teorema que g alcanza un máximo en el punto P. Hallando la z que corresponde al punto P, obtenemos

$$f_{\text{máx}}\left(\frac{ma}{m+n+p},\frac{na}{m+n+p},\frac{pa}{m+n+p}\right)=m^m n^n p^p\left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p}.$$

□

18. $L=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2e^x}{5x-5e^x+5}$ sin usar la regla de L'Hôpital

Si usar la regla de L'Hôpital, calcular el límite

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{x^2e^x}{5x-5e^x+5}$$

SOLUCIÓN. Podemos expresar

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{5}\frac{x^2}{1+x-e^x}=\frac{1}{5}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x-e^x}}_{A}$$

y por tanto, basta hallar A. Sea $x>0$ y consideremos la función

$$F:[0,x]\to\mathbb{R},\ F(t)=t^2-\frac{x^2}{1+x-e^x}(1+t-e^t).$$

Es inmediato verificar las hipótesis del teorema de Rolle para F en $[0,x]$ obteniendo un $\xi\in(0,x)$ tal que

$$\frac{x^2}{1+x-e^x}=\frac{2\xi}{1-e^\xi}.$$

Usando que $e^\xi-1\sim\xi$ cuando $\xi\to 0$,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{5}\frac{x^2}{1+x-e^x}=\frac{1}{5}\lim_{\xi\to 0^+}\frac{2\xi}{-\xi}=-\frac{2}{5}.$$

Usando la misma función F en el intervalo $[x,0]$ con $x<0$ obtenemos

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{5}\frac{x^2}{1+x-e^x}-\frac{2}{5},$$

con lo cual $L=-2/5$. □

19. Diagonalización de $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ con funciones hiperbólicas

Estudiar para qué valores de $x\in\mathbb{R}$ la siguiente matriz es diagonalizable en $\mathbb{R}$

$$A=\begin{bmatrix}\cosh x & \sinh x\\ \sinh x & \cosh x\end{bmatrix}.$$

En cada caso, hallar la forma canónica de A.

solución. Polinomio característico de A

$$\chi(\lambda)=\lambda^2-(\text{traza } A)\lambda+\det A=\lambda^2-(2\cosh x)\lambda+\cosh^2 x-\sinh^2 x$$
$$=\lambda^2-\left(e^x+e^{-x}\right)\lambda+1.$$

Valores propios de A

$$\lambda^2-\left(e^x+e^{-x}\right)\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{e^x+e^{-x}\pm\sqrt{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-4}}{2}$$
$$=\frac{e^x+e^{-x}\pm\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}-2}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}\pm\sqrt{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}}{2}$$
$$=\frac{e^x+e^{-x}\pm\left(e^x-e^{-x}\right)}{2}=\{e^x,e^{-x}\}.$$

Entonces, $e^x=e^{-x}\Leftrightarrow e^{2x}=1\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$. Para $x=0$ obtenemos la matriz $A=I$, que es diagonal. Si $x\neq 0$, tenemos $e^x\neq e^{-x}$ y A es diagonalizable en $\mathbb{R}$ al tener dos valores propios reales simples. Concluimos que A es diagonalizable para todo $x\in\mathbb{R}$ siendo su matriz diagonal;

$$D=\begin{bmatrix}e^x & 0\\ 0 & e^{-x}\end{bmatrix}.$$

$\square$

20. Infinitud de los números primos, demostración topológica

Desarrollamos la demostración de Furstenberg de la infinitud de los números primos basada en ideas topológicas.

Proporcionar una demostración topológica de la infinitud de los números primos

solución. Para cada a,b números enteros con $b\neq 0$ consideramos el subconjunto de $\mathbb{Z}$:

$$a+b\,\mathbb{Z}=\{\ \dots\ ,\ a-2b\ ,\ a-b\ ,\ a\ ,\ a+b\ ,\ a+2b\ ,\ \dots\ \},$$

y la clase $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{B}=\{\ a+b\,\mathbb{Z}\ :\ a,b\in\mathbb{Z}\ ,b\neq 0\ \}$$

es decir, $\mathcal{B}$ es la clase de todas las progresiones aritméticas no constantes en $\mathbb{Z}$. Dado que $a+b\,\mathbb{Z}=a-b\,\mathbb{Z}$ también podemos suponer que $b>0$. Veamos que $\mathcal{B}$ cumple las dos conocidas condiciones para formar base de una topología en $\mathbb{Z}$.

(i) Como $0+1\,\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$ se verifica trivialmente que $\mathbb{Z}$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

(ii) Sean $a+b\,\mathbb{Z}$ y $a'+b'\,\mathbb{Z}$ elementos de $\mathcal{B}$ y $c\in(a+b\,\mathbb{Z})\cap(a'+b'\,\mathbb{Z})$, entonces $a+b\,\mathbb{Z}=c+b\,\mathbb{Z}$ y $a'+b'\,\mathbb{Z}=c+b'\,\mathbb{Z}$. Si d es el mínimo común múltiplo de b y b' es claro que $c\in c+d\,\mathbb{Z}\subset(c+b\,\mathbb{Z})\cap(c+b'\,\mathbb{Z})$. Concluimos pues que $\mathcal{B}$ es base para una topología $\mathcal{T}$ en $\mathbb{Z}$.

Para cada primo p el subconjunto de $\mathbb{Z}$,

$$F_p = \mathbb{Z} - (\,(1 + p\,\mathbb{Z}) \cup (2 + p\,\mathbb{Z}) \cup \ldots \cup ((p-1) + p\,\mathbb{Z})\,)$$

es cerrado pues es el complementario de una unión de abiertos (que es abierto). Sea ahora $F = \bigcup_p F_p$ en donde p varía en el conjunto de los números primos. Si solamente existiera un número finito de primos, entonces F sería unión finita de cerrados y por tanto, cerrado. Dado que $F_p = p\,\mathbb{Z}$ todo entero $k \neq \pm 1$ pertenece a algún F_p, es decir $\mathbb{Z} - F = \{-1, 1\}$. Pero claramente $\{-1, 1\}$ no es abierto por no ser unión de progresiones aritméticas no constantes y por tanto F no es cerrado.

Por tanto, de la hipótesis de existir solamente un número finito de primos llegamos al absurdo de que existe un conjunto F en una topología $\mathcal{T}$ que es a la vez cerrado y no cerrado. Se concluye pues que existen infinitos números primos. $\square$

21. A y B matrices reales y semejantes como complejas, lo son como reales

(i) Sean A y B matrices reales y semejantes como matrices complejas. Demostrar que también son semejantes como matrices reales.
(ii) Aplicación. Demostrar que si X es una matriz real tal que $X^2 = -I$, entonces, para algún n entero positivo,

$$X = PJP^{-1} \text{ con } J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

donde P es una matriz real no singular e I_n la matriz identidad de orden n.

SOLUCIÓN. (i) Si A y B son semejantes como matrices complejas, existe una matriz compleja P invertible tal que $B = P^{-1}AB$. Expresemos $P = Q + iR$ en donde Q y R son reales. Tenemos las equivalencias

$$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow PB = AP \Leftrightarrow (Q + iR)B = A(Q + iR)$$

$$\Leftrightarrow QB + iRB = AQ + iAR \Leftrightarrow QB = AQ \;\wedge\; RB = AR.$$

Por tanto, para todo λ real o complejo se verifica

$$(Q + \lambda R)B = A(Q + \lambda R). \qquad (*)$$

El polinomio $\phi(\lambda) = \det(Q + \lambda R)$ es polinomio con coeficientes reales y además no tiene nulos todos sus coeficientes pues $\phi(i) = \det(Q + iR) = \det P \neq 0$. Esto implica que existen valores reales de λ tales que $\phi(\lambda) \neq 0$. Sea λ_0 uno de estos valores y consideremos la matriz $S = Q + \lambda_0 R$. Esta matriz es real, invertible y verifica según $(*)$ que $B = S^{-1}AS$ i.e. A y B son semejantes como matrices reales.

(ii) Dado que $X^2 + I = 0$, un polinomio anulador de X es $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, luego el polinomio mínimo $\mu(\lambda)$ de X divide a $p(\lambda)$. Como p y μ han de tener los mismos factores irreducibles en $\mathbb{R}[\lambda]$, necesariamente $\mu(\lambda) = \lambda^2 + 1$, por tanto y los valores propios de X como matriz compleja son $\pm i$ y al ser X es real, aparecen con la misma multiplicidad.
Dado que $\mu(\lambda)$ se descompone en factores lineales en $\mathbb{C}[\lambda]$, X es diagonalizable en $\mathbb{C}$ y semejante a la matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(iI_n, -iI_n)$. Por otra parte

$$J^2 = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} = -I,$$

luego J es semejante a D y por tanto J es semejante a X (como matrices complejas). Del apartado anterior deducimos que existe P real e invertible tal que $X = PJP^{-1}$. □

22. El conjunto de las fracciones diádicas en $[0,1]$ es denso

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de las fracciones diádicas (fracciones cuyos denominadores son potencias naturales de 2) en el intervalo $[0,1]$. Es decir

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{15}{16}, \ldots \right\}.$$

Demostrar que $\mathcal{D}$ es denso en $[0,1]$, i.e. $\overline{\mathcal{D}} = [0,1]$.

solución. Como $\mathcal{D} \subset [0,1]$ y $[0,1]$ es cerrado, se verifica $\overline{\mathcal{D}} \subset [0,1]$ pues $\overline{\mathcal{D}}$ es el menor de los cerrados que contiene a $\mathcal{D}$.
Veamos ahora que $[0,1] \subset \overline{\mathcal{D}}$. Es suficiente demostrar que para todo $a \in [0,1]$, cualquier intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ con $\epsilon > 0$ contiene un punto de $\mathcal{D}$.
Dado que $\lim (1/2^n) = 0$, existe una potencia $q = 2^{n_0}$ tal que $0 < 1/q < \epsilon$. Consideremos ahora los intervalos

$$\left[0, \frac{1}{q}\right], \ \left[\frac{1}{q}, \frac{2}{q}\right], \ \left[\frac{2}{q}, \frac{3}{q}\right], \ \ldots, \ \left[\frac{q-2}{q}, \frac{q-1}{q}\right], \ \left[\frac{q-1}{q}, 1\right].$$

Como $[0,1]$ es la unión de los intervalos anteriores, el punto a pertenece a alguno de ellos; llamémosle $\left[\frac{m}{q}, \frac{m+1}{q}\right]$. Es decir, se verifica $\frac{m}{q} \le a \le \frac{m+1}{q}$. Ahora bien, como $1/q < \epsilon$,

$$a - \epsilon < \frac{m}{q} \le a < a + \epsilon.$$

Esto implica que el punto m/q de $\mathcal{D}$ pertenece al intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ y queda demostrado que $\mathcal{D}$ es denso en $[0,1]$. □

23. Integral triple $\iiint_T x^m y^n z^p (1-x-y-z)^q dxdydz$

Calcular la integral triple

$$I = \iiint_T x^m y^n z^p (1-x-y-z)^q dxdydz$$

siendo T el recinto limitado por los tres planos coordenados y el plano $x+y+z=1$, y m, n, p, q enteros positivos.

SOLUCIÓN. Podemos expresar I como las integrales reiteradas

$$I=\int_0^1 x^m dx\int_0^{1-x} y^n dy\int_0^{1-x-y} z^p(1-x-y-z)^q dz.$$

Denotando $a=1-x-y$, la tercera integral iterada es

$$\int_0^{1-x-y} z^p(1-x-y-z)^q dz=\int_0^a z^p(a-z)^q dz=a^q\int_0^a z^p\left(1-\frac{z}{a}\right)^q dz$$

$$=a^{p+q+1}\int_0^a\left(\frac{z}{a}\right)^p\left(1-\frac{z}{a}\right)^q d\left(\frac{z}{a}\right)\underbrace{=}_{t=z/a}a^{p+q+1}\int_0^1 t^p(1-z)^q dz$$

$$=a^{p+q+1}B(p+1,q+1)=a^{p+q+1}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}=a^{p+q+1}\frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Entonces,

$$I=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}\int_0^1 x^m dx\int_0^{1-x} y^n(1-x-y)^{p+q+1}dy.$$

Llamando $b=1-x$ tenemos

$$\int_0^{1-x} y^n(1-x-y)^{p+q+1}dy=\int_0^b y^n(b-y)^{p+q+1}dy$$

$$=b^{p+q+1}\int_0^b y^n\left(1-\frac{y}{b}\right)^{p+q+1}dy=b^{n+p+q+2}\int_0^b\left(\frac{y}{b}\right)^n\left(1-\frac{y}{b}\right)^{p+q+1}d\left(\frac{y}{b}\right)$$

$$\underbrace{=}_{t=y/b}b^{n+p+q+2}\int_0^1 t^n(1-t)^{p+q+1}dt=b^{n+p+q+2}B(n+1,p+q+2)$$

$$=b^{n+p+q+2}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(p+q+2)}{\Gamma(n+p+q+3)}=b^{n+p+q+2}\frac{n!(p+q+1)!}{(n+p+q+2)!}.$$

Podemos por tanto escribir

$$I=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}\frac{n!(p+q+1)!}{(n+p+q+2)!}\int_0^1 x^m(1-x)^{n+p+q+2}dx$$

$$=\frac{n!p!q!}{(n+p+q+2)!}B(m+1,n+p+q+3)$$

$$=\frac{n!p!q!}{(n+p+q+2)!}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+p+q+3)}{\Gamma(m+n+p+q+3)}$$

$$=\frac{n!p!q!}{(n+p+q+2)!}\frac{m!(n+p+q+2)!}{(m+n+p+q+3)!}$$

$$=\boxed{\frac{m!n!p!q!}{(m+n+p+q+3)!}.}$$

□

24. Máximo de $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n \log(1+x_i)$ con $\sum_{i=1}^n x_i=a$

Determinar el máximo de la función

$$f:\left(\mathbb{R}^+\right)\to\mathbb{R},\quad f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n \log(1+x_i),$$

con la restricción $x_1+\cdots x_n=a$ (a real y positivo).
Sugerencia: usar que la media geométrica de n números reales y no negativos no es mayor que su media aritmética.

solución. Podemos expresar $f(x_1,\dots,x_n)=\log\prod_{i=1}^n(1+x_i)$. Dado que la función logaritmo es estrictamente creciente, el punto donde se alcanza el máximo absoluto de f es el mismo en el que se alcanza el máximo absoluto de

$$g(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^n(1+x_i).$$

Usando que la media geométrica de n números reales y no negativos no es mayor que su media aritmética,

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n(1+x_i)}\le\frac{\sum_{i=1}^n(1+x_i)}{n}\text{ o bien },$$

$$\prod_{i=1}^n(1+x_i)\le\frac{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n(1+x_i)\right)^n}{n^n}.$$

Como $x_1+\cdots x_n=a$, se verifica

$$g(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^n(1+x_i)=(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)$$

$$\le\frac{[(1+x_1)+\cdots+(1+x_{n-1})+(1+(a-x_1\ldots-x_{n-1}))]^n}{n^n}$$

$$=\frac{(a+n)^n}{n^n}=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=K.$$

El número K es por tanto una cota superior de g, cota superior que se alcanza pues

$$P=\left(\frac{a}{n},\frac{a}{n},\dots,\frac{a}{n}\right)\Rightarrow g(P)=\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{a}{n}\right)\dots\left(1+\frac{a}{n}\right)=K.$$

El máximo de la función f es por tanto

$$f_{\text{máx}}(P)=\log\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=n\log\left(1+\frac{a}{n}\right).$$

$\square$

25. Ideal maximal en el anillo de las funciones de clase infinito

(a) Sea $A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones de clase infinito de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que es un subanillo del anillo $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de las funciones reales de variable real, con las operaciones habituales suma y producto.
(b) Demostrar que $I = \{f \in A : f(0) = 0\}$ es ideal de A.
(c) Demostrar que I es ideal maximal de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

solución. (a) Si f y g son funciones de clase infinito en $\mathbb{R}$, también lo son $f-g$ y fg, de acuerdo con conocidas propiedades de análisis. Por el teorema de caracterización de subanillos concluimos que A es subanillo del anillo $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Además, al ser $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ conmutativo así lo es A, y al ser la función constante 1 de clase infinito, A es unitario.

(b) Para todo $f,g \in I$ se verifica $(f-g)(0) = f(0)-g(0) = 0-0 = 0$, es decir $f-g \in I$. Para todo $h \in A$ y para todo $f \in I$ se verifica $(hf)(0) = h(0)f(0)$ $= h(0)\cdot 0 = 0$, es decir $hf \in I$. Concluimos que I es ideal de A.

(c) Bastará demostrar que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/I$ es un cuerpo. Sea $[f] \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/I$ con $[f] \neq [0]$, esto implica que $f - 0 = f \notin I$ y por tanto $f(0) \neq 0$. Consideremos la función constante $g(x) = 1/f(0)$ que claramente es de clase infinito. Tenemos

$$(fg-1)(0) = f(0)\cdot\frac{1}{f(0)} - 1 = 0 \Rightarrow fg - 1 = I \Rightarrow [f][g] = [fg] = [1],$$

y por tanto todo elemento no nulo de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})/I$ tiene inverso. □

26. Suma $\sum_{k=0}^{\infty}(I-A)^k$ en un espacio de matrices

Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de los reales o los complejos, y $\| \ \|$ una norma matricial en el espacio vectorial $E = \mathbb{K}^{n\times n}$ de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en $\mathbb{K}$. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $\|A-I\| < 1$. Demostrar que la serie $\sum_{k=0}^{\infty}(I-A)^k$ es absolutamente convergente y que

$$\sum_{k=0}^{\infty}(I-A)^k = A^{-1}.$$

solución. Dado que la norma dada es matricial, se verifica $\|M\| \leq \|M\|\,\|N\|$ para todo par de matrices $M,N \in E$. Entonces,

$$\left\|(I-A)^k\right\| \leq \|I-A\|^k = \|A-I\|^k.$$

La serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty}\|A-I\|^k$ es convergente pues por hipótesis, el módulo de $\|A-I\|$ es menor que 1. Entonces, usando el criterio de la mayorante

$$0 \leq \left\|(I-A)^k\right\| \leq \|A-I\|^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left\|(I-A)^k\right\| \text{ es conv.} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(I-A)^k \text{ abs. conv.}$$

Denotemos ahora $B = I - A$. Tenemos

$$(I-B)\sum_{k=0}^{n-1} B^k = (I-B)(I+B+B^2+\cdots+B^{n-1})$$

$$= (I+B+B^2+\cdots+B^{n-1}) - (B+B^2+B^3+\cdots+B^n) = I - B^n.$$

Al ser la norma dada una norma matricial se verifica $\rho(B) \leq \|B\|$, siendo $\rho(B)$ el radio espectral de B, con lo cual $B^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces,

$$(I-B)\sum_{k=0}^{n-1} B^k = I - B^n \Rightarrow (I-B)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} B^k = I - 0 \Rightarrow (I-B)\sum_{k=0}^{\infty} B^k = I$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{B=I-A} A\sum_{k=0}^{\infty}(I-A)^k = I \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(I-A)^k = A^{-1}.$$

$\square$

27. Caracterización de una topología por axiomas de clausura de Kuratowski

Sea X un conjunto no vacío y sea $k : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ una aplicación que saisface los llamados axiomas de clausura de Kuratowski:

$[K_1]$ $k(\emptyset) = \emptyset$.

$[K_2]$ $A \subset k(A)$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.

$[K_3]$ $k(A \cup B) = k(A) \cup k(B)$ para todo $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

$[K_4]$ $k(k(A)) = k(A)$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.

Demostrar que existe una única topología en $\mathcal{T}$ tal que $k(A)$ es la clausura de A para todo $A \subset X$.

Solución. Supongamos que existe una toplogía $\mathcal{T}$ en X de tal manera que la clausura o adherencia de cada conjunto A coincide con $k(A)$ i.e. $\overline{A} = k(A)$. Por la conocida caracterización de los cerrados de una topología, la familia de cerrados de $\mathcal{T}$ ha de ser necesariamente

$$\mathcal{F} = \{F \subset X : k(F) = F\},$$

la cual determina unívocamente una topología

$$\mathcal{T} = \{G \subset X : G^c \in \mathcal{F}\}.$$

Veamos que $\mathcal{F}$ cumple las tres propiedades de los cerrados que caracterizan a una topología. Es decir,

(a) $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{F}$.

(b) Uniones finitas de elementos de $\mathcal{F}$ pertenecen a $\mathcal{F}$.

(c) Intersecciones cualesquiera de elementos de $\mathcal{F}$ pertenecen a $\mathcal{F}$.

Efectivamente,

(a) $\emptyset \in \mathcal{F}$ por $[K_1]$. Por $[K_2]$ se verifica $X \subset k(X)$, luego $X = k(X)$ y por

tanto $X \in \mathcal{F}$.
(b) Si $\{F_i\}$ es familia finita de elementos de $\mathcal{F}$ tenemos por $[K_2]$

$$k\left(\cup_i F_i\right) = \cup_i k(F_i) = \cup_i F_i \Rightarrow \cup_i F_i \in \mathcal{F}.$$

(c) Del axioma $[K_3]$,

$$M \subset N \Rightarrow k\,(N) = k\left[(N \setminus M) \cup M\right] = k(N \setminus M) \cup k(M) \Rightarrow k(M) \subset k(N).$$

Sea ahora $\{F_i\}$ una familia (finita o no) de elementos de $\mathcal{F}$ y llamemos $F = \cap_i F_i$. Entonces,

$$F \subset F_i \ \forall i \Rightarrow k(F) \subset k(F_i) \ \forall i \Rightarrow k(F) \subset \cap_i k(F_i) = \cap_i F_i = F$$

es decir $F \subset k(F)$, y por el axioma $[K_2]$, $F \subset k(F)$ luego $k(F) = F$ y por tanto $F \in \mathcal{F}$.

Falta demostrar que para todo $A \subset X$ se verifica $\overline{A} = k(A)$. En efecto,

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F} \,\wedge\, A \subset F} F = \bigcap_{k(F)=F \,\wedge\, A \subset F} F.$$

Por $[K_4]$, $k(A) = k(k(A))$ es un conjunto cerrado que contiene a A y por tanto $\overline{A} \subset k(A)$. Por otra parte,

$$A \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F} \,\wedge\, A \subset F} F \Rightarrow k(A) \subset k\left(\bigcap_{F \in \mathcal{F} \,\wedge\, A \subset F} F\right) = \bigcap_{F \in \mathcal{F} \,\wedge\, A \subset F} F = \overline{A}.$$

Es decir, $\overline{A} \subset k(A)$ y $k(A) \subset \overline{A}$ luego $k(A) = \overline{A}$. □

28. Acotación por $e^{\alpha t}$ de las soluciones de un sistema diferencial

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con n valores propios distintos y la parte real de cada valor propio λ es menor que algún número negativo α. Demuestre que para cada solución de $X'(t) = Ax(t)$, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\|X(t)\| < e^{\alpha t} \text{ si } t_0 \leq t.$$

Solución. Las soluciones del sistema $X'(t) = Ax(t)$ son de la forma $X(t) = e^{tA}C$. Tomando normas

$$\|X(t)\| \leq \left\|e^{tA}\right\| \|C\|. \quad (1)$$

La matriz A tiene n valores propios distientos en $\mathbb{C}$, en consecuencia es diagonalizable en $\mathbb{C}$. Existe por tanto una matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $A = PDP^{-1}$ con D la diagonal de valores propios. Entonces,

$$\left\|e^{tA}\right\| = \left\|Pe^{tD}P^{-1}\right\| \leq \|P\| \left\|e^{tD}\right\| \left\|P^{-1}\right\| = c(P) \left\|e^{tD}\right\|,$$

en donde $c(P) = \|P\| \left\|P^{-1}\right\|$ es el número de condición de P.
La matriz e^{tD} es de la forma

$$e^{tD} = \operatorname{diag}\left(e^{(\alpha_1+\beta_1 i)t}, e^{(\alpha_1-\beta_1 i)t}, \ldots, e^{(\alpha_p+\beta_p i)t}, e^{(\alpha_p-\beta_p i)t}\right)$$

y $(e^{tD})^* e^{tD} = \text{diag}\,(e^{2\alpha_1 t}, \dots, e^{2\alpha_p t})$, luego

$$\left\| e^{tD} \right\| = \sqrt{\text{máx}\{e^{2\alpha_j t}\}} = \text{máx}\{e^{\alpha_j t}\} = e^{tm}\ (m = \text{máx}\,\{\alpha_j\}).$$

Usando (1) podemos escribir $\|X(t)\| \leq c(P)\,\|C\|\,e^{mt}$. Tenemos las equivalencias

$$\|X(t)\| \leq e^{\alpha t} \Leftrightarrow c(P)\,\|C\|\,e^{mt} \leq e^{\alpha t} \Leftrightarrow c(P)\,\|C\| \leq e^{(\alpha - m)t}.$$

Dado que $\alpha - m > 0$, se verifica $e^{(\alpha-m)t} \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$. Es decir, a partir de un t_0 se verifica $c(P)\,\|C\| \leq e^{(\alpha-m)t}$ y por ende $\|X(t)\| \leq e^{\alpha t}$ si $t \geq t_0$. □

29. Generatrices rectilíneas de un hiperboloide de una hoja

Consideremos el hiperboloide de una hoja

$$H : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0\ c > 0)$$

y los haces de rectas

$$L_t : \begin{cases} x = a\cos t + \lambda a \sin t \\ y = b \sin t - \lambda b \cos t \\ z = \lambda c \end{cases} \qquad L'_t : \begin{cases} x = a\cos t - \lambda a \sin t \\ y = b \sin t + \lambda b \cos t \\ z = \lambda c \end{cases}$$

en donde $t \in [0, 2\pi)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Demostrar que todas las rectas de L_t y todas las de L'_t están contenidas en H.

(b) Demostrar que por cada punto de H pasa una y sólo una recta de cada haz (por tanto L_t y L'_t son dos haces de generatrices rectilíneas de H).

(c) Demostrar que las rectas L_t no se cortan. Idem para las rectas de L'_t.

Solución. (a) Para todo $(t, \lambda) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ y eligiendo un punto genérico $(x, y, z) \in L_t$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= \frac{a^2(\cos^2 t + \lambda^2 \sin^2 t + 2\lambda \cos t \sin t)}{a^2} \\ &+ \frac{b^2(\sin^2 t + t^2 \cos^2 t - 2\lambda \sin t \cos t)}{b^2} - \frac{c^2\lambda^2}{c^2} \\ &= \cos^2 t + \sin^2 t + \lambda^2(\cos^2 t + \sin^2 t) - \lambda^2 = 1, \end{aligned}$$

lo cual prueba que las rectas de L_t están contenidas en H. Análogo razonamiento para L'_t.

(b) Sea (x, y, z) un punto de H y denotemos $\lambda = z/c$. Tenemos

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \frac{x}{a} + \frac{1}{\lambda^2 + 1} \frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2 + 1} \frac{x}{a} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \frac{y}{b} \right)^2$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 + 1} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] = \frac{1}{z^2/c^2 + 1} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = 1.$$

En consecuencia, existe un único $t \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\begin{cases} \sin t = \dfrac{\lambda}{\lambda^2+1}\dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{\lambda^2+1}\dfrac{y}{b} \\ \cos t = \dfrac{1}{\lambda^2+1}\dfrac{x}{a} - \dfrac{\lambda}{\lambda^2+1}\dfrac{y}{b} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos fácilmente

$$\begin{cases} x = a\cos t + \lambda a \sin t \\ y = b \sin t - \lambda b \cos t \qquad (t \in [0, 2\pi),\ \lambda \in \mathbb{R}), \\ z = \lambda c \end{cases}$$

y por tanto (x, y, z) pertenece a una única recta de L_t.

Para todo punto (x, y, z) de H también se verifica

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\frac{x}{a} - \frac{1}{\lambda^2+1}\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2+1}\frac{x}{a} + \frac{\lambda}{\lambda^2+1}\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Razonando de manera totálmente análoga deducimos que existe un único $t \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\begin{cases} x = a\cos t - \lambda a \sin t \\ y = b \sin t + \lambda b \cos t \qquad (t \in [0, 2\pi),\ \lambda \in \mathbb{R}), \\ z = \lambda c \end{cases}$$

y por tanto (x, y, z) pertenece a una única recta de L'_t.

(c) Supongamos que las rectas L_{t_1} y L_{t_2} se cortan en el punto (x, y, z), y que este punto corresponde a los parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Entonces, $\lambda_1 = \lambda_2 = z/c = \lambda$. Además,

$$\begin{cases} \sin t_1 = \sin t_2 = \dfrac{\lambda}{\lambda^2+1}\dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{\lambda^2+1}\dfrac{y}{b} \\ \cos t_1 = \cos t_2 = \dfrac{1}{\lambda^2+1}\dfrac{x}{a} - \dfrac{\lambda}{\lambda^2+1}\dfrac{y}{b} \end{cases}$$

y por tanto, $t_1 = t_2$. Análogo razonamiento para las rectas L'_t. $\square$

30. Semianillo tropical

En el conjunto $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se definen las operaciones

$$x \oplus y = \min\{x, y\}, \quad x \odot y = x + y.$$

(a) Demostrar que $(\mathbb{T}, \oplus)$ es semigrupo abeliano con elemento neutro.
(b) Demostrar que $(\mathbb{T}, \odot)$ es también semigrupo conmutativo con elemento unidad.

(c) Demostrar que la operación $\odot$ es distributiva respecto de la operación $\oplus$. Es decir, que para todo $x, y, z \in \mathbb{T}$ se verifican las igualdades

$$i)\ \ x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z),$$
$$ii)\ (x \oplus y) \odot z = (x \odot z) \oplus (y \odot z).$$

(d) Demostrar que 0_T anula a todo elemento de $\mathbb{T}$, es decir que

$$0_T \odot x = x \odot 0_T = 0 \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Nota. Los apartados anteriores prueban que $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ es un semianillo conmutativo. Se le denomina *semianillo tropical.*
(e) Para $n \geq 1$ entero y $a \in \mathbb{T}$, denotamos $a^n = a \odot a \odot \ldots \odot a$ (n veces). Demostrar que para todo $x, y \in \mathbb{T}$ se verifica $(x \oplus y)^2 = x^2 \oplus y^2$.
(f) Demostrar que para todo entero $n \geq 1$ y $x, y \in \mathbb{T}$ se verifica $(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n$.

SOLUCIÓN. (a) *Interna.* Para todo $x, y \in \mathbb{T}$ es evidente que $x \oplus y \in \mathbb{T}$.
Asociativa. Para todo $x, y, z \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}(x \oplus y) \oplus z &= \text{mín}\{x, y\} \oplus z = \text{mín}\left\{\text{mín}\{x, y\}, z\right\} = \text{mín}\{x, y, z\} \\ &= \text{mín}\left\{x, \text{mín}\{y, z\}\right\} = x \oplus \text{mín}\{y, z\} = x \oplus (y \oplus z).\end{aligned}$$

Existencia de elemento neutro. Denotando $0_T = +\infty$, tenemos para todo $x \in \mathbb{T}$:

$$x \oplus 0_T = \text{mín}\{x, +\infty\} = x, \quad 0_T \oplus x = \text{mín}\{+\infty, x\} = x,$$

es decir 0_T es elemento neutro para la operación $\oplus$.
Conmutativa. Para todo $x, y \in \mathbb{T}$, $x \oplus y = \text{mín}\{x, y\} = \text{mín}\{y, x\} = y \oplus x$.

(b) *Interna.* Para todo $x, y \in \mathbb{T}$ es evidente que $x \odot y \in \mathbb{T}$.
Asociativa. Para todo $x, y, z \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}(x \odot y) \odot z &= (x + y) \odot z = (x + y) + z \\ &= x + (y + z) = x + (y \odot z) = x \odot (y \odot z).\end{aligned}$$

Existencia de elemento unidad. Denotando $1_T = 0$, tenemos para todo $x \in \mathbb{T}$:

$$x \odot 1_T = x + 0 = x, \quad 1_T \odot x = 0 + x = x,$$

es decir 1_T es elemento neutro para la operación $\odot$.
Conmutativa. Para todo $x, y \in \mathbb{T}$, $x \odot y = x + y = y + x = y \oplus x$.

(c) $i)$ Para todo $x, y, z \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}x \odot (y \oplus z) &= x + \text{mín}\{y, z\} = \text{mín}\{x + y, x + z\} \\ &= (x + y) \oplus (x + z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z).\end{aligned}$$

Dado que las operaciones $\oplus$ y $\odot$ son conmutativas, también se cumple $ii)$.

(d) Para todo $x \in \mathbb{T}$, se verifica

$$0_T \odot x = (+\infty) + x = +\infty = 0_T,$$

y al ser $\odot$ conmutativa, también se verifica $x \odot 0_T = 0_T$.

(e) Para todo x, y elementos de $\mathbb{T}$:

$$\begin{aligned}(x \oplus y)^2 = (x \oplus y) \odot (x \oplus y) &= \min\{x, y\} + \min\{x, y\}\\ &= \min\{2x, x+y, 2y\} = \min\{2x, 2y\}.\end{aligned}$$

$$x^2 \oplus y^2 = (x \odot x) \oplus (y \odot y) = (x + x) \oplus (y + y) = \min\{2x, 2y\}.$$

Es decir, $(x \oplus y)^2 = x^2 \oplus y^2$.

(f) La igualdad es trivialmente cierta para $n = 1$. Sea cierta para $n - 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}(x \oplus y)^n &= (x \oplus y) \odot (x \oplus y)^{n-1} = (x \oplus y) \odot (x^{n-1} \oplus y^{n-1})\\ &= \min\{x, y\} + \min\{(n-1)x, (n-1)y\}\\ &= \min\{nx, (n-1)x + y, x + (n-1)y, ny\} = \min\{nx, ny\}.\end{aligned}$$

Por otra parte, $x^n \oplus y^n = (nx) \oplus (ny) = \min\{nx, ny\}$ y por tanto la igualdad es cierta para n. $\square$

31. Seminorma del supremo en el anillo de las funciones continuas

Sea $R = \mathcal{C}(I)$ el anillo de las funciones reales continuas en el intervalo $I = [a, b]$ con las operaciones habituales suma y producto. Se define la aplicación

$$N : R \to \mathbb{R}^+, \quad N(f) = \sup\{|f(x)| : x \in I\}.$$

(a) Demostrar que N es una *seminorma* en R (se la denomina *seminorma del supremo*).
(b) Demostrar que tal seminorma es arquimediana.

SOLUCIÓN. (a) Recordamos que si R es un anillo unitario (elemento unidad 1_R) una seminorma en R es cualquier aplicación $N : R \to \mathbb{R}^+$ cumpliendo los axiomas

(1) $N(1_R) = 1$.
(2) $N(xy) \le N(x)N(y) \quad \forall x, y \in R$.
(3) $N(x + y) \le N(x) + N(y) \quad \forall x, y \in R$.

Veamos que la aplicación dada satisface en el anillo de las funciones dado los axiomas anteriores. Efectivamente, la función N está bien definida por un conocido resultado de Análisis. La función 1_R es $1_R(x) = 1$ para todo $x \in I$, por tanto

$$N(1_R) = \sup\{|1_R(x)| : x \in I\} = \sup\{1 : x \in I\} = 1.$$

Sean ahora $f, g \in R$. Tenemos

$$\begin{aligned}N(fg) &= \sup\{|(fg)(x)| : x \in I\} = \sup\{|f(x)g(x)| : x \in I\}\\ &= \sup\{|f(x)|\,|g(x)| : x \in I\}\\ &\le \sup\{|f(x)| : x \in I\} \sup\{|g(x)| : x \in I\} = N(f)N(g).\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} N(f+g) = \sup\{|(f+g)(x)| : x \in I\} &= \sup\{|f(x)+g(x)| : x \in I\} \\ &= \sup\{|f(x)|+|g(x)| : x \in I\} \\ \leq \sup\{|f(x)| : x \in I\} + \sup\{|g(x)| : x \in I\} &= N(f)+N(g). \end{aligned}$$

Por tanto, N es seminorma.

(b) Recordamos que una seminorma en un anillo unitario R se dice que es *no arquimediana* si el axioma (3) es sustituye por la condición más fuerte

$$(3') \quad N(x+y) \leq \text{máx}\{N(x), N(y)\} \forall x, y \in R,$$

llamada desigualdad *ultramétrica*, y si no se cumple $(3')$ la seminorma se dice que es *arquimediaan*. Es fácil verificar que en el anillo de las funciones continuas dado, N es arquimediana. En efecto si $f = g = 1_R$ tenemos $N(f) = N(g) = 1$ y

$$N(f+g) = \sup\{(1_R + 1_R)(x) : x \in I\} = \sup\{2 : x \in I\} = 2,$$

lo cual implica que $2 = N(f+g) \not\leq \text{máx}\{N(f), N(g)\} = 1$. $\square$

32. $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x)\big\} \cup \{(0,0)\}$ CONEXO, PERO NO POR CAMINOS

En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual se considera el subconjunto

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x)\big\} \cup \{(0,0)\}.$$

(a) Demostrar que es conexo.
(b) Demostrar que no es conexo por caminos.

SOLUCIÓN. (a) La función $f(x) = (x, \sin 1/x)$ es continua sobre cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ que no contiene a 0. Escribamos $A = A^+ \cup A^-$ siendo $A^+ = \{(0,0)\} \cup f((0,+\infty))$ y $A^- = \{(0,0)\} \cup f((-\infty,0))$.
Ahora bien, $f((0,+\infty))$ es conexo por ser imagen continua de un conexo. Como $(0,0)$ es punto límite de $f((0,+\infty))$ se concluye que A^+ es conexo. Análogamente se demuestra que A^- es conexo. Como $A^+ \cap A^- \neq \emptyset$, se deduce que A es conexo.

(b) Supongamos que existiera un camino $\gamma : [0,1] \to A$ uniendo $(0,0)$ con $(1/\pi, 0)$. Consideremos el conjunto cerrado $\gamma^{-1}(\{(0,0)\})$ y sea M el supremo de este conjunto. Entonces, sobre el intervalo $[M,1]$ tenemos $\gamma(t) = (0,0)$ si y solo si $t = M$. Parametricemos la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ de tal manera que $M = 0$. Tenemos:

$$\begin{cases} \gamma(0) = (0,0 \\ x(t) \neq 0, \ y(t) = \sin(1/x(t)) \ \text{ si } t > 0. \end{cases}$$

Elijamos ahora para cada n un entero a_n tal que $2/\pi a_n$ pertenece al intervalo $(0, x(1/n))$. Aplicando el teorema del valor intermedio, obtenemos un $t_n \in$

$(0, 1/n)$ tal que $x(t_n) = 2/\pi a_n$. Entonces, $t_n \to 0$ pero $\gamma(t_n)$ no tiende a $(0, 0)$. Esto contradice la continuidad de γ. $\square$

33. Límite $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ por tres métodos

Calcular $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$,
(a) Usando la regla de L'Hopital.
(b) Usando un desarrollo limitado de Maclaurin de $\sin x$.
(c) Usando algún método esencialmente distinto de los anteriores

SOLUCIÓN. (a) Usando la regla de L'Hopital,

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

$$\underbrace{=}_{1-\cos x \sim x^2/2} \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

(b) Usando el desarrollo limitado de orden 2 del seno,

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x - [x - x^3/6 + o(x^3)]}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/6 - o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right) = \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}.$$

(c) Usando el cambio de variable $t = 3x$,

$$L = \lim_{t\to 0} \frac{3t - \sin 3t}{27t^3}$$

Usando la fórmula $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$,

$$L = \lim_{t\to 0} \frac{3t - 3\sin t + 4\sin^3 t}{27t^3}.$$

Entonces,

$$L = \frac{1}{9} \lim_{t\to 0} \frac{t - \sin t}{t^3} + \frac{4}{27} \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3,$$

$$L = \frac{1}{9}L + \frac{4}{27}, \quad L = \frac{1}{6}.$$

$\square$

34. Teorema de Casorati-Weierstrass: singularidades de $1/f$

Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ analítica, con singularidad esencial en a y que no se anula en : $U \setminus \{a\}$.
(a) Usando el teorema de Casorati-Weierstrass, estudiar el tipo de singularidad que presnta $1/f$ en a.
(b) Verificar el resultado anterior para la función $f(z) = e^{1/z}$, mediante desarrollos en serie de Laurent en una corona de centro 0.

Solución. (a) Recordemos el teorema de Casorati-Weierstrass:
Sea $f(z)$ analítica en $0 < |z-a| < R$ y a una singularidad esencial de $f(z)$. Entonces, $\forall w \in \mathbb{C}$, $\forall \epsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, existe un $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |z-a| < \delta$ y $|f(z) - w| < \epsilon$. Es decir, en un entorno de una singularidad esencial, la función toma valores arbitrariamente próximos a cualquier número complejo.

Existen por tanto dos sucesiones $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ en $U \setminus \{a\}$ tales que

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = a, \quad \lim_{n\to+\infty} f(z_n) = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = a, \quad \lim_{n\to+\infty} |f(w_n)| = \infty.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{f(z_n)} = \frac{1}{a}, \quad \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{f(w_n)}\right| = 0.$$

Es decir, no existe $\lim_{z\to a} 1/f(z)$ ni finito ni infinito. Por tanto, $1/f$ tiene una singularidad esencial en a.

(b) El desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = e^{1/z}$ en $0 < |z| < +\infty$ es

$$f(z) = 1 + \frac{1/z}{1!} + \frac{1/z^2}{2!} + \frac{1/z^3}{3!} + = \dots + \frac{1/3!}{z^3} + \frac{1/2!}{z^2} + \frac{1}{z} + 1.$$

La serie de Laurent tiene infinitos términos en su parte principal, por tanto 0 es singularidad esencial de f. El desarrollo en serie de Laurent de $1/f(z) = 1/e^{1/z} = e^{-1/z}$ en $0 < |z| < +\infty$ es

$$\frac{1}{f(z)} = 1 - \frac{1/z}{1!} + \frac{1/z^2}{2!} - \frac{1/z^3}{3!} + = \dots - \frac{1/3!}{z^3} + \frac{1/2!}{z^2} - \frac{1}{z} + 1.$$

La serie de Laurent tiene infinitos términos en su parte principal, por tanto 0 es singularidad esencial de $1/f$. □

35. Mínimo de $L(f) = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)}$ mediante la desigualdad de Schwarz

Utilizando la desigualdad de Schwarz, demostrar que si $f(x)$ es continua y positiva para $a \le x \le b$, el producto

$$L(f) = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

es mínimo si y sólamente si f es una función constante.

SOLUCIÓN. El espacio $E = \mathcal{C}[a,b]$ de las funciones reales continuas en $[a,b]$ sabemos que es un espacio euclídeo provisto del producto escalar

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx.$$

Se verifica por tanto la desigualdad de Schwarz

$$\langle f_1, f_2\rangle^2 \leq \|f_1\|^2\,\|f_2\|^2 \quad \forall f_1, f_2 \in E. \quad (1)$$

Lamemos $f_1 = f$ y $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{f}}$, que es continua en $[a,b]$ $(f > 0)$. Usando (1),

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}dx\right]^2 \leq \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

$$\Rightarrow (b-a)^2 \leq L(f).$$

Entonces, $M = (b-a)^2$ es cota inferior de $L(f)$ y la cota se alcanza cuando la desigualdad de Schwarz se convierte en igualdad, es decir si y solamente si $f_1 = \lambda f_2$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, si y solamente si

$$\sqrt{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{f}}$$

que equivale a $f = \lambda$ (constante). □

36. Polinomios de Legendre y operador simétrico

En el espacio vectorial $E = \mathbb{R}_n[x]$ de los polinomios reales de grado $\leq n$ se define la aplicación

$$T : E \to E, \quad T(f) = \left(pf'\right)' \text{ con } p(x) = x^2 - 1.$$

(a) Demostrar que T es lineal. (b) Hallar la matriz de T en la base canónica de E.
(c) Determinar el espectro de T y estudiar si T es diagonalizable.
(d) En el espacio vectorial euclídeo que se obtiene al dotar a E del producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx,$$

estudiar si el endomorfismo T es simétrico y determinar la matriz de T respecto de la base

$$B_L = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$$

formada por los polinomios de Legendre de grados $0, 1, 2, \ldots, n$.

SOLUCIÓN. (a) La aplicación está bien definida pues si $f \neq 0$,

$$\text{grad } f = k \Rightarrow \text{grad }\left(pf'\right) = 2 + (k-1) = k+1$$

$$\Rightarrow \text{grad } \left(pf'\right)' = k \Rightarrow \text{grad } T(f) = k,$$

y si $f = 0$, $T(f) = 0$, por tanto T transforma elementos de E en elementos de E. Veamos que T es lineal. En efecto, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $f, g \in E$

$$T(\alpha f + \beta g) = \big(p(\alpha f + \beta g)'\big)' = \big(p(\alpha f' + \beta g')\big)'$$
$$= \big(\alpha p f' + \beta p g'\big)' = \alpha \left(p f'\right)' + \beta \left(p g'\right)' = \alpha T(f) + \beta T(g).$$

(b) Hallemos los transformados de la base canónica $B = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$. Tenemos para $2 \le k \le n$

$$T(x^k) = \Big((x^2-1)(x^k)'\Big)' = \Big(k(x^2-1)x^{k-1}\Big)'$$
$$= \Big(kx^{k+1} - kx^{k-1}\Big)' = k(k+1)x^k - k(k-1)x^{k-2}.$$

Por otra parte, $T(1) = 0$ y $T(x) = 2x$. Entonces,

$$\begin{cases} T(1) = 0 \\ T(x) = 2x \\ T(x^2) = 6x^2 - 2 \\ T(x^3) = 12x^3 - 6x \\ \ldots \\ T(x^n) = n(n+1)x^n - n(n-1)x^{n-2} \end{cases}$$

y la matriz M de T en B es

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n(n+1) \end{bmatrix}.$$

(c) La matriz M es triangular, por tanto el espectro de T es

$$\text{Spec }(T) = \{0, 2, 6, 12, \ldots, n(n+1)\}.$$

Los valores propios son todos reales y simples, en consecuencia T es diagonalizable.

(d) Recordemos que los polinomios de Legendre

$$p_n(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} \left[(x^2-1)^k\right] \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

forman una base ortogonal en el espacio euclídeo dado. Sean $f, g \in E$ tales que $f = \sum_0^n \alpha_i p_i$ y $g = \sum_0^n \beta_j p_j$. Entonces,

$$\langle Tf, g\rangle = \langle \sum_0^n \alpha_i T p_i, \sum_0^n \beta_j p_j \rangle = \sum_{i,j=0}^n \alpha_i \beta_j \langle T p_i, p_j\rangle.$$

Análogamente obtenemos $\langle f, Tg\rangle = \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_i\beta_j\langle p_i, Tp_j\rangle$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} T[p_k(x)] &= [(x^2-1)p_k'(x)]' = 2xp_k'(x) + (x^2-1)p_k''(x) \\ &= \ldots = k(k+1)p_k(x). \quad (*) \\ \langle Tp_i, p_j\rangle &= \int_{-1}^{1} i(i+1)p_i(x)p_j(x) = 0 \text{ si } i \neq j, \\ \langle p_i, Tp_j\rangle &= \int_{-1}^{1} j(j+1)p_i(x)p_j(x) = 0 \text{ si } i \neq j. \end{aligned}$$

En consecuencia, para todo $f, g \in E$

$$\langle Tf, g\rangle = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\beta_i\langle Tp_i, p_i\rangle = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\beta_i\langle p_i, Tp_i\rangle = \langle f, Tg\rangle,$$

lo cual implica que T es simétrico. De la igualdad $(*)$ deducimos que la matriz de T en B_L es

$$D = \text{diag } (0, 2, 6, 12, \ldots, n(n+1)).$$

$\square$

37. Forma bilineal a partir de una suma directa

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y W_1 y W_2 dos subespacios de V tales que $V = W_1 \oplus W_2$. Sea f una forma bilineal sobre W_1 y g una forma bilineal sobre W_2, y sea la aplicación

$$h : V \times V \to \mathbb{K}, \quad h(x, y) = f(x_1, y_1) + g(x_2, y_2)$$

donde $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$ x e y son las representaciones relativas a la suma directa $W_1 \oplus W_2$.
a) Demostrar que h es una forma bilineal sobre V, cuyas restricciones a W_1 y W_2 son respectivamente f y g.
b) Demostrar que si $x \in W_1$ e $y \in W_2$, entonces $h(x, y) = h(y, x) = 0$.

SOLUCIÓN. a) La aplicación h está bien definida pues al ser $V = W_1 \oplus W_2$, la representación de todo vector de V en suma de uno de W_1 y otro de W_2 es única. Veamos que h es forma bilineal. En efecto, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, para todo $x, x', y \in V$, y usando las correspondientes descomposiciones:

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta x', y) &= h\left[\alpha(x_1 + x_2) + \beta(x_1' + x_2'), y_1 + y_2\right] \\ &= h\left[\left(\alpha x_1 + \beta x_1'\right) + \left(\alpha x_2 + \beta x_2'\right), y_1 + y_2\right]. \\ &= f\left(\alpha x_1 + \beta x_1', y_1\right) + g\left(\alpha x_2 + \beta x_2', y_2\right) \end{aligned}$$

Dado que f y g son formas bilineales,

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta x', y) &= \alpha f(x_1, y_1) + \beta f(x_1', y_1) + \alpha g(x_2, y_2) + \beta g(x_2', y_2) \\ &= \alpha\left(f(x_1, y_1) + g(x_2, y_2)\right) + \beta\left(f(x_1', y_1) + g(x_2', y_2)\right) \\ &= \alpha h(x, y) + \beta h(x', y). \end{aligned}$$

Análogamente de se demuestra la otra condición de forma bilneal:

$$h(x, \alpha y + \beta y') = \alpha h(x, y) + \beta h(x, y') \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall x, y, y' \in V.$$

Sean ahora $x, y \in W_1$. Las correspondientes descomposiciones son $x = x + 0$, $y = y + 0$. En consecuencia,

$$h(x, y) = f(x, y) + g(0, 0) = f(x, y) + 0 = f(x, y) \Rightarrow h_{|W_1} = f.$$

Análogamente se demuestra que $h_{|W_2} = g$.

b) Si $x \in W_1$ e $y \in W_2$, las correspondientes descomposiciones son $x = x + 0$, $y = 0 + y$, por tanto

$$h(x, y) = f(x, 0) + g(0, y) = 0 + 0 = 0,$$
$$h(y, x) = f(0, x) + g(y, 0) = 0 + 0 = 0.$$

$\square$

38. Un operador autoadjunto y unitario

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita dotado de un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ y sea W un subespacio de V. Se considera la aplicación

$$T : V \to V, \quad T(v) = w - w',$$

en donde $v = w + w'$ con $w \in W$ y $w' \in W^{\perp}$.
a) Demostrar que T es lineal.
b) Demostrar que T es autoadjunto.
c) Demostrar que T es unitario.

Solución. a) Dado que $V = W \oplus W^{\perp}$, la descomposición de todo vector de V en suma de uno de W y otro de $W^{\perp}$ es ùnica, por tanto, la aplicación T está bien definida. Veamos que T es lineal. En efecto, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y sean $x, y \in V$ tales que $x = x_1 + x_1'$, $y = y_1 + y_1'$ con $x_1, y_1 \in W$, $x_1', y_1' \in W^{\perp}$. Entonces,

$$T(\alpha x + \beta y) = T[\alpha(x_1 + x_1') + \beta(y_1 + y_1')] = T[(\underbrace{\alpha x_1 + \beta y_1}_{\in W}) + (\underbrace{\alpha x_1' + \beta y_1'}_{\in W^{\perp}})]$$

$$= (\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_1' + \beta y_1') = \alpha(x_1 - x_1') + \beta(y_1 - y_1') = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

b) Hay que demostrar que $T^* = T$ o de forma equivalente, que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ para todo $x, y \in V$. Tenemos por una parte

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x_1 - x_1', y_1 + y_1'\rangle = \langle x_1, y_1\rangle - \langle x_1', y_1\rangle + \langle x_1, y_1'\rangle - \langle x_1', y_1'\rangle$$
$$= \langle x_1, y_1\rangle - 0 + 0 - \langle x_1', y_1'\rangle = \langle x_1, y_1\rangle - \langle x_1', y_1'\rangle.$$

Por otra parte,

$$\langle x, T(y)\rangle = \langle x_1 + x_1', y_1 - y_1'\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_1', y_1\rangle - \langle x_1, y_1'\rangle - \langle x_1', y_1'\rangle$$
$$= \langle x_1, y_1\rangle + 0 - 0 - \langle x_1', y_1'\rangle = \langle x_1, y_1\rangle - \langle x_1', y_1'\rangle.$$

Concluimos que T es autoadjunto.

c) Para todo $x \in V$,

$T^2(x) = T[T(x)] = T(x - x_1') = T(x_1 + (-x_1')) = x_1 - (-x_1') = x_1 + x_1' = x$,

es decir $T^2 = I$, lo cual implica que $T^{-1} = T$. Por el apartado anterior, $T^{-1} = T^*$, luego T es unitario. □

39. Métrica producto $d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}$

Sea $\{(X_i, d_i) : i \in \mathbb{N}^*\}$ una colección numerable de espacios métricos y sea $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Demostrar que:

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d\left[(x_n),(y_n)\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}$$

define una métrica en X (se la denomina métrica producto).

SOLUCIÓN. Para todo $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ elementos de X se verifica

$$0 \leq \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)} \leq \frac{1}{2^n} \cdot 1 = \frac{1}{2^n}.$$

Como la serie geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} (1/2)^n$ es convergente, $d(x,y) \geq 0$ y finito i.e. la aplicación d está bien definida. Veamos que satisface los axiomas de métrica.

$$[M_1] \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)} = 0 \ \forall n$$

$$\Leftrightarrow \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)} = 0 \ \forall n \Leftrightarrow d_n(x_n,y_n) = 0 \ \forall n \Leftrightarrow x_n = y_n \ \forall n \Leftrightarrow x = y.$$

$$[M_2] \quad d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(y_n,x_n)}{1+d_n(y_n,x_n)} = d(y,x).$$

$[M_3]$ Sean $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, $z = (z_n)$ elementos del conjunto producto X y llamemos $a = d_n(x_n,y_n)$, $b = d_n(x_n,z_n)$, $c = d_n(z_n,y_n)$. Veamos que se verifica

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Efectivamente,

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \Leftrightarrow a(1+b)(1+c) \leq (1+a)[b(1+c) + c(1+b)]$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a \leq b + c + 2bc + abc.$$

Esta última desigualdad se verifica pues al ser d_n distancia, se cumple $a \leq b + c$. Entonces,

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,z_n)}{1+d_n(x_n,z_n)} + \frac{1}{2^n} \frac{d_n(z_n,y_n)}{1+d_n(z_n,y_n)}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(x_n,z_n)}{1+d_n(x_n,z_n)}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(z_n,y_n)}{1+d_n(z_n,y_n)}=d(x.z)+d(z,y),$$

lo cual prueba la desigualdad triangular. □

40. Número combinatorio $\binom{2n}{n}$ e integral

Para todo entero positivo n, demostrar la relación

$$\binom{2n}{n}=\frac{2^{2n}}{(2n+1)\int_0^1(1-x^2)^n dx}.$$

SOLUCIÓN. Integrando por partes con $u=(1-x^2)^n$ y $dv=dx$ tenemos

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\left[x(1-x^2)^n\right]_0^1+2n\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}dx$$

$$=0-2n\int_0^1(1-x^2-1)(1-x^2)^{n-1}dx$$

$$=-2n\int_0^1(1-x^2)^n dx+2n\int_0^1(1-x^2)^{n-1}dx.$$

Obtenemos por tanto la relación

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\frac{2n}{2n+1}\int_0^1(1-x^2)^{n-1}dx.$$

Dado que $\int_0^1(1-x^2)\,dx=2/3$, obtenemos

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\frac{2}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$$

$$=\frac{2^{2n}}{(2n+1)}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{2^{2n}}{(2n+1)}\frac{1}{\binom{2n}{n}},$$

y queda demostrada la igualdad propuesta. □

41. Igualdad integral $\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin t}{t\log^2 t}dt=\int_\pi^{+\infty}\frac{\cos t}{\log t}dt$

Demostrar la igualdad entre las integrales impropias

$$I=\int_\pi^{+\infty}\frac{\sin t}{t\log^2 t}dt,\quad J=\int_\pi^{+\infty}\frac{\cos t}{\log t}dt.$$

SOLUCIÓN. En $[\pi,+\infty)$, tenemos

$$\left|\frac{\sin t}{t\log^2 t}\right|\le\frac{1}{t\log^2 t}.$$

Efectuando el cambio $x=\log t$:

$$\int_\pi^{+\infty}\frac{dt}{t\log^2 t}=\int_{\log\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\ \text{(convergente)}$$

por tanto I es absolutamente convergente y como consecuencia, convergente. Apliquemos a I el conocido teorema de la integración por partes para integrales impropias (el teorema además asegura que si dos de los términos que aparecen son convergentes, también lo es el tercero). Tenemos

$$\left\{\begin{matrix} u = \sin t \\ dv = \dfrac{1}{t\log^2 t}\end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} du = \cos t \\ v = -\dfrac{1}{\log t}\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow I = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t\log^2 t} dt = \left[-\frac{\sin t}{\log t}\right]_{\pi}^{+\infty} + \underbrace{\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{\log t}}_{J}.$$

Por otra parte

$$\left[-\frac{\sin t}{\log t}\right]_{\pi}^{\infty} = -\lim_{t\to+\infty} \frac{\sin t}{\log t} + \lim_{t\to\pi} \frac{\sin t}{\log t} = -0 + 0 = 0.$$

Concluimos que I y J convergentes y tienen el mismo valor. □

42. Ordinales racionales y norma p-ádica

En todo este problema, p representa a un número primo ≥ 2.

1. Sea $0 \neq x \in \mathbb{Z}$. Se define el *ordinal p-ádico* de x como

$$\text{ord}_p x = \text{máx}\{r \in \mathbb{N} : p^r \mid x\}$$

es decir, $\text{ord}_p x$ es el exponente de p en la descomposición de x en producto de factores primos. Calcular los ordinales p-ádicos en $\mathbb{Z}$:

$$\text{ord}_5 200, \quad \text{ord}_2 200, \quad \text{ord}_2 15, \quad \text{ord}_7(-98).$$

2. Sea $0 \neq x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Se define el *ordinal p-ádico* de x como

$$\text{ord}_p \frac{a}{b} = \text{ord}_p a - \text{ord}_p b,$$

Nótese que ord_p está bien definido, es decir

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow \text{ord}_p \frac{a}{b} = \text{ord}_p \frac{a'}{b'}.$$

También se define $\text{ord}_p 0 = \infty$. Calcular los ordinales p-ádicos en $\mathbb{Q}$:

$$\text{ord}_3 \frac{40}{27}, \quad \text{ord}_7 \left(-\frac{98}{15}\right)$$

3. Demostrar que para todo $x, y \in \mathbb{Q}$ se verifica: (a) $\text{ord}_p x = \infty \Leftrightarrow x = 0$. (b) $\text{ord}_p(xy) = \text{ord}_p x + \text{ord}_p y$. (c) $\text{ord}_p(x+y) \geq \text{mín}\{\text{ord}_p x, \text{ord}_p y\}$ con igualdad si $\text{ord}_p x \neq \text{ord}_p y$.

4. Se define la *norma p-ádica* en $\mathbb{Q}$ como $\|x\|_p = p^{-\text{ord}_p x}$. Demostrar que es una norma no arquimediana en $\mathbb{Q}$, es decir que se verifican las propiedades (a) $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(b) $\|xy\|_p = \|x\|_p \, \|y\|_p \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$.
(c) $\|x+y\|_p \leq \text{máx}\left\{\|x\|_p \, \|y\|_p\right\} \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$.

SOLUCIÓN. 1. Tenemos $200 = 2^3 \cdot 5^2$, $15 = 3 \cdot 5$ y $-98 = -2 \cdot 7^2$. En consecuencia,

$$\text{ord}_5 200 = 2, \quad \text{ord}_2 200 = 3, \quad \text{ord}_2 15 = 0, \quad \text{ord}_7(-98) = 2.$$

2. Tenemos

$$\text{ord}_3 \frac{40}{27} = \text{ord}_3 \frac{2^3 \cdot 5}{3^3} = \text{ord}_3 \left(2^3 \cdot 5\right) - \text{ord}_3 \left(3^3 \cdot 5\right) = 0 - 3 = -3,$$

$$\text{ord}_7 \left(-\frac{98}{15}\right) = \text{ord}_7 \left(-\frac{2 \cdot 7^2}{3 \cdot 5}\right) = \text{ord}_7 \left(-2 \cdot 7^2\right) - \text{ord}_7 (3 \cdot 5) = 2 - 0 = 2.$$

3. (a) Se verifica $\text{ord}_p 0 = \infty$ por definición, y si $x \neq 0$ entonces $\text{ord}_p x$ es claramente finito.
(b) Expresando x e y no nulos como fracciones irreducibles descompuestas en factores primos: $x = \pm\, p^r p_1^{r_1} \ldots p_m^{r_m}$, $y = \pm\, p^s q_1^{s_1} \ldots q_n^{s_n}$. Entonces,

$$\text{ord}_p(xy) = \text{ord}_p \left(\pm\, p^{r+s} \cdot \ldots\right) = r + s = \text{ord}_p x + \text{ord}_p y.$$

Si $x = 0$ o $y = 0$, el resultado es trivial.
(c) Sean $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ con $\text{ord}_p x = r$, $\text{ord}_p y = s$. Entonces,

$$x = p^r \frac{a}{b}, \quad y = p^s \frac{c}{d}, \quad p \not| a, b, c, d \quad (r, s \in \mathbb{Z}).$$

Si $r = s$, tenemos

$$x + y = p^r \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = p^r \frac{ad + bc}{bd} \underbrace{\Rightarrow}_{p \not| bd} \text{ord}_p(x+y) \geq r$$

$$= \text{mín}\{r, r\} = \text{mín}\{\text{ord}_p x, \text{ord}_p y\}.$$

Si $r \neq s$, por ejemplo $s > r$ tenemos

$$x + y = p^r \frac{a}{b} + p^s \frac{c}{d} = p^r \left(\frac{a}{b} + p^{s-r} \frac{c}{d}\right) = p^r \frac{ad + p^{s-r} bc}{bd}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{s-r>0 \,\wedge\, p \not| ad} \quad \text{ord}_p(x+y) = \text{mín}\{\text{ord}_p x, \text{ord}_p y\}.$$

Si alguno de los términos es nulo, por ejemplo $x = 0$, entonces $\text{ord}_p x = \infty \geq \text{ord}_p y$ y por tanto

$$\text{ord}_p(x+y) = \text{ord}_p y \geq \text{mín}\{\infty, \text{ord}_p y\} = \text{mín}\{\text{ord}_p x, \text{ord}_p y\}.$$

4. (a) Tenemos $\|0\|_p = p^{-\infty} = 0$ y si $x \neq 0$ entonces $\text{ord}_p x$ es finito, luego $\|x\|_p = p^{-\text{ord}_p x} \neq 0$.
(b) Usando la propiedad 3.(b) y para $xy \neq 0$

$$\|xy\|_p = p^{-\text{ord}_p xy} = p^{-(\text{ord}_p x + \text{ord}_p y)} = p^{-\text{ord}_p x} p^{-\text{ord}_p y} = \|x\|_p \, \|y\|_p \, .$$

Si $x = 0$ o $y = 0$, la igualdad se verifica trivialmente.
(c) Supongamos que $\text{ord}_p x \le \text{ord}_p y$. Entonces,

$$\text{ord}_p x \le \text{ord}_p y \Rightarrow -\text{ord}_p x \ge -\text{ord}_p y \Rightarrow p^{-\text{ord}_p x} \ge p^{-\text{ord}_p y}$$

$$\Rightarrow \text{máx}\{p^{-\text{ord}_p x}, p^{-\text{ord}_p y}\} = p^{-\text{ord}_p x}.$$

Usando la relación 3. (c),

$$\|x+y\|_p = p^{-\text{ord}_p(x+y)} \le p^{-\text{mín}\{\text{ord}_p x, \text{ord}_p y\}} = p^{-\text{ord}_p x}$$

$$= \text{máx}\{p^{-\text{ord}_p x}, p^{-\text{ord}_p y}\} = \text{máx}\left\{\|x\|_p \; \|y\|_p\right\}.$$

Análogo razonamiento para $\text{ord}_p y \le \text{ord}_p x$. □

43. Familia de rectas $6px - 2y + x + p^2 = 0$

Se considera el conjunto de rectas

$$6px - 2y + x + p^2 = 0, \quad p \in \mathbb{R}.$$

a) Demostrar que por cada punto del plano pasan, en general, dos rectas de dicho conjunto.
b) Encontrar el ángulo que forman las dos rectas que pasan por el punto $(1, -2)$.
c) Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano tales que las dos rectas que pasan por ellos sean coincidentes.

SOLUCIÓN. a) Un punto $P_0(x_0, y_0)$ del plano pertenece a la recta $6px - 2y + x + p^2 = 0$ sii se verifica

$$p^2 + 6px_0 + x_0 - 2y_0 = 0.$$

El discriminante de la ecuación de segundo gado en p es $\Delta = 36x_0^2 - 4x_0 + 8y_0$. Si $\Delta > 0$ existen dos rectas de la familia que pasan por P_0, si $\Delta = 0$, sólo una y si $\Delta < 0$, ninguna.

b) Para $P_0(1, -2)$ obtenemos la ecuación $p^2 + 6p + 5 = 0$, que proporciona las soluciones $p = -1$, $p = -5$ que corresponden a las rectas $5x + 2y - 1 = 0$, $29x + 2y - 25 = 0$. Si α es el ángulo que forman dichas rectas,

$$\cos\alpha = \frac{\langle (5,2), (29,2) \rangle}{|(5,2)|\,|(29,2)|} = \frac{149}{\sqrt{29}\sqrt{745}} = \sqrt{\frac{149}{145}},$$

$$\alpha = \arccos\sqrt{\frac{149}{145}}, \quad \alpha \in [0, \pi].$$

c) Por un punto $P(x, y)$ del plano pasa una única recta de la familia de rectas dada, sii $\Delta = 36x^2 - 4x + 8y = 0$. El lugar geométrico pedido es por tanto la parábola $y = (-9/2)x^2 + (1/2)x$. □

44. Principio del triángulo isósceles en normas no arquimedianas

(a) Sea N una norma en un anillo unitario R. Demostrar que $d_N(x,y) = N(x-y)$ define una distancia en R.
(b) Demostrar que si la norma N es no arquimediana, entonces para todo $x,y,z \in R$ se verifica

$$d_N(x,y) \leq \text{máx}\{d_N(x,z), d_N(z,y)\}$$

con igualdad si $d_N(x,y) \neq d_N(z,y)$.
(c) Demostrar *el principio del triángulo isósceles*: en normas no arquimedianas, todos los triángulos son isósceles.

solución. (a) Veamos que se verifican los tres axiomas de distancia. En efecto

$$(1)\ \ d_N(x,y) = 0 \Leftrightarrow N(x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Demostremos ahora que $N(-1) = -1$. En efecto,

$$1 = N(1) = N[(-1)(-1)] = N(-1)N(-1) = [N(-1)]^2 \Rightarrow N(-1) = 1.$$

Entonces,

$$(2)\ \ d_N(x,y) = N(x-y) = N[(-1)(y-x)]$$

$$= N(-1)N(y-x) = N(y-x) = d_N(y,x).$$

$$(3)\ \ d_N(x,y) = N(x-y) = N[(x-z)+(z-y)]$$

$$\leq N(x-z) + N(z-y) = d_N(x,y) + d_N(z,y).$$

(b) Si N no es arquimediana, sabemos que se verifica

$$N(x+y) \leq \text{máx}\{N(x), N(y)\}$$

para todo $x,y \in R$ con igualdad si $N(x) \neq N(y)$. Entonces,

$$d_N(x,y) = N(x,y) = N[(x-z)+(z-y)]$$

$$\leq \text{máx}\{N(x-z), N(z-y)\} = \text{máx}\{d_N(x,z), d_n(z,y)\}.$$

Si $d_N(x,y) \neq d_N(z,y)$ entonces $N(x-y) \neq N(z-y)$ con lo cual la desigualdad se transforma en igualdad.

(c) Sea el triángulo en R de vértices x,y,z. Si $d_N(x,y) = d_N(z,y)$ el triángulo es isósceles, y si $d_N(x,y) \neq d_N(z,y)$ entonces

$$d_N(x,y) = \text{máx}\{d_N(x,z), d_N(z,y)\},$$

con lo cual también tiene dos lados iguales. $\square$

45. Hélice circular: longitud, curvatura y torsión

Se considera la hélice circular

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a\sin t \\ z(t) = bt. \end{cases}$$

(a) Determinar su longitud, correspondiente al intervalo $[0, t_0]$ ($t_0 > 0$).
(b) Determinar su curvatura y torsión en un punto genérico.

SOLUCIÓN. (a) Las funciones $x(t)$, $y(x)$, $z(t)$ son de clase 1 (más aún de clase infinito) en $\mathbb{R}$, en consecuencia la hélice circular es rectificable en todo intervalo real $[\alpha, \beta]$. Su longitud en $[0, t_0]$ es

$$L = \int_0^{t_0} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{t_0} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt$$

$$= \int_0^{t_0} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = t_0\sqrt{a^2 + b^2}.$$

(b) Llamemos $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. La curvatura es

$$K = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}.$$

Tenemos

$$\mathbf{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b), \quad \mathbf{r}''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab\sin t)\, \mathbf{i} - (ab\cos t)\, \mathbf{j} + a^2\, \mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \left|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\right| = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = |a|\, \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\left|\mathbf{r}'(t)\right|^3 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^3.$$

La curvatura es por tanto

$$K = \frac{|a|\, \sqrt{a^2 + b^2}}{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^3} = \frac{|a|}{a^2 + b^2}.$$

La torsión es

$$T = \frac{[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)]}{\left(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\right)^2}.$$

Tenemos

$$\left[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)\right] = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b,$$

$$\left(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\right)^2 = (ab\sin t, -ab\cos t, a^2) \cdot (ab\sin t, -ab\cos t, a^2) = a^2(a^2 + b^2).$$

La torsión es por tanto
$$T = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$
$\square$

46. Una curva no rectificable

Se considera la curva del plano
$$\Gamma : \begin{cases} x = t \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ y = \begin{cases} t \cos \dfrac{1}{t} \quad \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad t = 0. \end{cases} \end{cases}$$
Demostrar que no es rectificable.
Sugerencia: considerar particiones de $[0, 1]$ de la forma
$$P : \ 0, \ \frac{1}{(n-1)\pi}, \ \frac{1}{(n-2)\pi}, \ \ldots, \ \frac{1}{2\pi}, \ \frac{1}{\pi}, \ 1.$$

solución. Los puntos de la poligonal que corresponden a la partición P son
$$M_0 = (0, 0), \ M_1 = \left(\frac{1}{(n-1)\pi}, \frac{1}{(n-1)\pi} \cos(n-1)\pi \right),$$
$$M_2 = \left(\frac{1}{(n-2)\pi}, \frac{1}{(n-2)\pi} \cos(n-2)\pi \right),$$
$$\cdots$$
$$M_{n-2} = \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi} \cos 2\pi \right), M_{n-1} = \left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi} \cos \pi \right), \ M_n = (1, \cos 1).$$
La suma de las distancias de los segmentos de la poligonal es
$$s(P) = |M_0 M_1| + |M_1 M_2| + \cdots + |M_{n-2} M_{n-1}| + |M_{n-1} M_n|$$
$$= \left| \left(\frac{1}{(n-1)\pi}, \frac{1}{(n-1)\pi} \cos(n-1)\pi \right) \right|$$
$$+ \left| \left(\frac{1}{(n-2)\pi} - \frac{1}{(n-1)\pi}, \frac{1}{(n-2)\pi} \cos(n-2)\pi - \frac{1}{(n-1)\pi} \cos(n-1)\pi \right) \right|$$
$$+ \cdots + \left| \left(1 - \frac{1}{\pi}, \cos 1 - \frac{1}{\pi} \cos \pi \right) \right|.$$
Eliminando el primer y último término de la suma anterior,
$$s(P) \geq \sum_{k=1}^{n-2} \left| \left(\frac{1}{k\pi} - \frac{1}{(k+1)\pi}, \frac{1}{k\pi} \cos k\pi - \frac{1}{(k+1)\pi} \cos(k+1)\pi \right) \right|$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{1}{k\pi} \cos k\pi - \frac{1}{(k+1)\pi} \cos(k+1)\pi \right|$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{(-1)^k}{k\pi} - \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\pi} \right| = \sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{(k+1)\pi} \right| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k+1}.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to+\infty} s(P) \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k+1} = +\infty,$$

lo cual implica que Γ no es rectificable. $\square$

47. Función entera que es polinómica

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera tal que existen $\alpha > 0$, $K > 0$ cumpliendo

$$|f(z)| \leq K\left(1 + |z|\right)^{\alpha}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demostrar que $f(z)$ es un polinomio de grado a lo sumo α.

SOLUCIÓN. Como f es entera, se puede escribir en la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Usando la fórmula integral de Cauchy,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz.$$

Tomando módulos,

$$0 \leq |a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{K\left(1+R\right)^{\alpha}}{R^{n+1}}2\pi R = \frac{K\left(1+R\right)^{\alpha}}{R^{n}}.$$

Si $n > \alpha$ y tomando límites cuando $R \to +\infty$

$$0 \leq |a_n| \leq \lim_{R\to+\infty}\frac{K\left(1+R\right)^{\alpha}}{R^{n}} = 0,$$

es decir $a_n = 0$. Es decir $f(z) = \sum_{n=0}^{d} a_n z^n$ es función polinómica, siendo $d = \lfloor \alpha \rfloor$ (parte entera de α). $\square$

48. Dos parametrizaciones de la elipse

Se considera la elipse

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}, \quad (a > 0, b > 0).$$

(a) Demostrar que

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta, \quad \theta \in [-\pi,\pi)\},$$

lo cual proporciona una parametrización trigonométrica de la elipse.
(b) Demostrar que

$$E \setminus \{(-a,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\frac{1-t^2}{1+t^2},\ y = b\frac{2t}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}\},$$

lo cual proporciona una parametrización racional de la elipse salvo un punto.

SOLUCIÓN. (a) Todo punto de la forma $(x,y)=(a\cos\theta, b\sin\theta)$ pertenece a E. En efecto,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{b^2\sin^2\theta}{b^2}=\cos^2+\sin^2=1.$$

Recíprocamente, si $(x,y)\in E$, entonces $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ y por tanto existe un $\theta\in[-\pi,\pi)$ tal que $x/a=\cos\theta$ e $y/b=\sin\theta$.

(b) Todo punto de la forma

$$(x,y)=\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}, b\frac{2t}{1+t^2}\right),\quad t\in\mathbb{R}$$

pertenece a $E\setminus\{(-a,0)\}$. En efecto, por una parte

$$\frac{\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(b\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}{b^2}=\frac{(1-t^2)^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{\left(1+t^2\right)^2}{\left(1+t^2\right)^2}=1,$$

y por otra parte

$$a\frac{1-t^2}{1+t^2}=-a\Rightarrow 1-t^2=-1-t^2\Rightarrow 1=-1,$$

lo cual es absurdo. Sea ahora $(x,y)\in E-\{(-a,0)\}$. Entonces, $(x,y)=(a\cos\theta, b\sin\theta)$ con $\theta\in(-\pi,\pi)$. Denotemos $t=\tan(\theta/2)$, que está definido pues $\theta/2\in(-\pi/2,\pi/2)$. Entonces, usando la fórmula de la tangente del ángulo mitad

$$t=\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\Rightarrow t^2=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\Rightarrow\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow\sin\theta=\sqrt{1-\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}=\frac{2t}{1+t^2}\Rightarrow(x,y)=\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}, b\frac{2t}{1+t^2}\right).$$

□

49. Dos parametrizaciones de la hipérbola

Se considera la hipérbola

$$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\},\quad(a>0,b>0).$$

(a) Demostrar que

$$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x=\frac{a}{\cos\theta},\ y=b\tan\theta,\quad\cos\theta\neq0\},$$

lo cual proporciona una parametrización trigonométrica de la elipse.
(b) Demostrar que

$$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x=\frac{1}{2}a\left(t+\frac{1}{t}\right),\ y=\frac{1}{2}b\left(1-\frac{1}{t}\right),\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\},$$

lo cual proporciona una parametrización racional de la hipérbola.

SOLUCIÓN. (a) Todo punto de la forma $(x, y) = (a/\cos\theta, b\tan\theta)$ con $\cos\theta \neq 0$ pertenece a H. En efecto,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2}{a^2\cos^2\theta} - \frac{b^2\tan^2\theta}{b^2} = \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1.$$

Recíprocamente, si $(x, y) \in H$, entonces al no anularse x, y multiplicando por a/x^2 la igualdad $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$ obtenemos

$$1 - \frac{a^2y^2}{b^2x^2} = \frac{a^2}{x^2}, \text{ o bien } \left(\frac{ay}{bx}\right)^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2 = 1.$$

Por tanto, existe un θ tal que $a/x = \cos\theta$ $(ay)/(bx) = \sin\theta$, es decir tal que

$$x = \frac{a}{\cos\theta}, \quad y = \frac{b}{a}\frac{a\sin\theta}{\cos\theta} = b\tan\theta.$$

(b) Todo punto de la forma

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}a\left(t + \frac{1}{t}\right), \frac{1}{2}b\left(1 - \frac{1}{t}\right)\right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

pertenece a H. En efecto,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2}a\left(t + \frac{1}{t}\right)\right]^2 - \frac{1}{b^2}\left[\frac{1}{2}b\left(1 - \frac{1}{t}\right)\right]^2$$
$$= \frac{1}{4}\left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{4}\left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}\right) = 1.$$

Recíprocamente, si $(x, y) \in H$ entonces

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1,$$

por tanto, existe un número real t no nulo tal que

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{t}$$

de lo cual se deduce

$$x = \frac{1}{2}a\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{1}{2}b\left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

$\square$

50. Factor integrante de la forma $\mu = \mu(xy^2)$

(a) Demostrar que la ecuación diferencial

$$xdy + ydx + (3x^3y^4)dy = 0 \qquad (E)$$

tiene un factor integrante de la forma $\mu = \mu(xy^2)$ y calcularlo.
(b) Verificar que la ecuación obtenida al multiplicar la ecuación (E) por μ, es una ecuación diferencial exacta.
(c) Resolver la ecuación (E).

SOLUCIÓN. a) Podemos escribir la ecuación diferencial en la forma $Pdx + Qdy = 0$, siendo

$$P(x,y) = y, \quad Q(x,y) = x + 3x^3y^4.$$

Llamando $z = xy^2$ y multiplicando por $\mu(z)$, obtenemos $\mu(z)Pdx+\mu(z)Qdy = 0$. Obliguemos a que esta ecuación sea diferencial exacta:

$$(\mu(z)P)_y = \mu'(z)2xy \cdot y + \mu(z) \cdot 1,$$

$$(\mu(z)Q)_x = \mu'(z)y^2 \cdot (x + 3x^3y^4) + \mu(z)(1 + 9x^2y^4).$$

$$(\mu(z)P)_y = (\mu(z)Q)_x \Leftrightarrow \mu'(z)\left(2xy^2 - y^2x - 3x^3y^6\right) = \mu(z)\left(9x^2y^4\right).$$

Queda por tanto

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{9x^2y^4}{xy^2 - 3x^3y^6} = \frac{9xy^2}{1 - 3x^2y^4} = \frac{9z}{1-3z^2},$$

$$\log|\mu(z)| = -\frac{3}{2}\log\left|1 - 3z^2\right|, \ \mu(z) = e^{-\log(1-3z^2)^{3/2}},$$

$$\mu(z) = \frac{1}{(1 - 3x^2y^4)^{3/2}}.$$

(b) Multiplicando la ecuación diferencial dada por el factor integrante hallado, queda en la forma

$$\underbrace{(1 - 3x^2y^4)^{3/2}y}_{M}\ dx + \underbrace{(x + 3x^3y^4)(1 - 3x^2y^4)^{3/2}}_{N}\ dy = 0.$$

Veamos que es diferencial exacta. En efecto (b) Multiplicando la ecuación diferencial dada por el factor integrante hallado, queda en la forma

$$\underbrace{\frac{y}{(1 - 3x^2y^4)^{3/2}}}_{M}\ dx + \underbrace{\frac{x + 3x^3y^4}{(1 - 3x^2y^4)^{3/2}}}_{N}\ dy = 0.$$

Veamos que es diferencial exacta. En efecto

$$M_y = \frac{1 \cdot (1 - 3x^2y^4)^{3/2} - (3/2)(1 - 3x^2y^4)^{1/2}(-12x^2y^3)y}{(1 - 3x^2y^4)^3}$$

$$= \frac{(1 - 3x^2y^4)^{1/2}\left[1 - 3x^2y^4 + 18x^2y^4\right]}{(1 - 3x^2y^4)^3} = \frac{1 + 15x^2y^4}{(1 - 3x^2y^4)^{5/2}}.$$

$$N_x = \frac{(1 + 9x^2y^4)(1 - 3x^2y^4)^{3/2} - (3/2)(1 - 3x^2y^4)^{1/2}(-6xy^4)(x + 3x^3y^4)}{(1 - 3x^2y^4)^3}$$

$$= \frac{(1 - 3x^2y^4)^{1/2}\left[(1 + 9x^2y^4)(1 - 3x^2y^4) + 9xy^4(x + 3x^3y^4)\right]}{(1 - 3x^2y^4)^3}$$

$$= \frac{1 - 3x^2y^4 + 9x^2y^4 - 27x^4y^8 + 9x^2y^4 + 27x^4y^8}{(1 - 3x^2y^4)^{5/2}} = \frac{1 + 15x^2y^4}{(1 - 3x^2y^4)^{5/2}}.$$

Se verifica $M_y = N_x$, por tanto $Mdx + Ndy = 0$ es diferencial exacta.

(c) Encontremos una función $u = u(x, y)$ tal que $u_x = M$ y $u_y = N$, con lo cual la solución general de la ecuación (E) será $u(x, y) = C$ con C constante. Tenemos

$$u_x = M,\ u = \int M dx = \int \frac{y}{(1-3x^2y^4)^{3/2}} dx = \frac{xy}{\sqrt{1-3x^2y^4}} + \varphi(y).$$

Derivando u respecto de y

$$u_y = x \frac{1 \cdot \sqrt{1-3x^2y^4} - \frac{1}{2\sqrt{1-3x^2y^4}} \cdot (-12x^2y^3)y}{1-3x^2y^4} + \varphi'(y)$$

$$= x \frac{1-3x^2y^4+6x^2y^4}{(1-3x^2y^4)^{3/2}} + \varphi'(y) = \frac{x+3x^3y^4}{(1-3x^2y^4)^{3/2}} + \varphi'(y) = N + \varphi'(y).$$

Entonces, $u_y = N$ implica que $\varphi'(y) = 0$, es decir $\varphi(y) = C$. La solución general de (E) en forma implícita es por tanto

$$\frac{xy}{\sqrt{1-3x^2y^4}} + C = 0.$$

□

Más fascículos en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).
E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`