PROBLEMAS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS SUPERIORES (FASCÍCULO 2)

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

RESUMEN. Cada fascículo de estos *Problemas resueltos de matemáticas superiores* consta de 50 problemas resueltos. Pueden considerarse como anexos a mis libros *Problemas resueltos de álgebra* y *Problemas resueltos de análisis matemático*.

ÍNDICE

51. La rosa de cuatro pétalos es un conjunto algebraico

La rosa de cuatro pétalos $P \subset \mathbb{R}^2$ de define mediante la ecuación polar $\rho = \sin 2\theta$. Usar coordenadas polares para demostrar que

$$P = V\left((x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2\right),$$

lo cual probará que P es un conjunto algebraico.

SOLUCIÓN. Sea $(x,y)\in P$ con $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. Entonces,

$$(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=\rho^6-4\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta=\rho^6-\rho^4(2\cos\theta\sin\theta)^2$$
$$=\rho^6-\rho^4(\sin 2\theta)^2=\rho^6-\rho^4\rho^2=0.$$

Por tanto, $P\subset V\left((x^2+y^2)^2-4x^2y^2\right)$.

Sea ahora (x,y) un punto que satisface $(x^2+y^2)^3-4x^2y^2=0$ y sean (ρ,θ) las coordenadas polares del punto. Tenemos que demostrar que $(x,y)\in P$. Sustituyendo $x=\rho\cos\theta$ e $y=\rho\sin\theta$,

$$\rho^6-4\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta=0. \quad (1)$$

Claramente, $(0,0)\in P$ por tanto podemos suponer en (1) que $\rho\neq 0$ con lo cual (1) se reduce a $\rho^2=\sin^2 2\theta$. Esto implica que $\rho=\sin 2\theta$ en cuyo caso $(x,y)\in P$ o bien que $\rho=-\sin 2\theta$. Ahora bien, en este último caso podemos escribir $\rho=\sin[2(-\theta)]$. Pero la reflexión $(\rho,\theta)\to(\rho,-\theta)$ envía $(x.y)$ a un punto de la rosa de cuatro pétalos y esta se transforma en sí misma por esta reflexión, en consecuencia también en este caso $(x,y)\in P$. Concluimos pues que la rosa de cuatro pétalos es un conjunto algebraico. □

52. Imágenes inversas de conjuntos compactos

Sean X e Y espacios topológicos y $f:X\to Y$ continua.
(a) Demostrar que si X es compacto e Y es de Hausdorff entonces, las imágenes inversas de conjuntos compactos son conjuntos compactos.
(b) Demostrar que la propiedad del apartado anterior no es cierta en general si se suprime la condición de ser Y de Hausdorff.

SOLUCIÓN. (a) Sea $K\subset Y$ compacto. Al ser Y Hausdorff, K es cerrado y por ser f continua, $f^{-1}(K)$ es cerrado. Pero todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto, i.e. $f^{-1}(K)\subset X$ es compacto.

(b) Consideremos $X=Y=[0,1]$, X con la topología usual, Y con la topología

$$T=\{\emptyset, Y, (1/2,1]\},$$

y la aplicación $f=id:X\to Y$. Como X es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, es compacto. El espacio Y no es Hausdorff pues por ejemplo, 0 y 1 no tienen entornos disjuntos. Las imágenes inversas por id de los elementos de T son respectivamente $\emptyset$,Y,$(1/2,1]$ que son abiertos en X, en consecuencia id es continua. El conjunto $K=(1/2,1]$ es claramente compacto en Y pues todo recubrimiento por abiertos de K es finito.
Por último, $id^{-1}(K)=(-1/2,1]$ no es compacto en X pues no es cerrado con la topología usual. □

53. Derivabilidad de una función compleja como suma de dos series

Se considera la función compleja de variable compleja definida en forma de suma de series:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

(a) Determinar su dominio Ω de definición.
(b) Estudiar la derivabilidad de f en Ω.

(c) Justificar que se puede escribir $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$ en el disco $D(2,1)$ y determinar los coeficientes a_n.

SOLUCIÓN. (a) Usando el teorema relativo a la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n \underbrace{=}_{|z/3|<1} = \frac{1}{1-z/3} = \frac{3}{3-z} \quad (|z|<3)\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \underbrace{=}_{|1/z|<1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z-1} \quad (1<|z|)\,.$$

El dominio de definición es por tanto la corona abierta $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$.

(b) La función f es

$$f : \Omega \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{3}{3-z} + \frac{1}{z-1} = \frac{2z}{(3-z)(z-1)}$$

es decir, es racional y no se anula en Ω, en consecuencia es derivable en su dominio.

(c) Efectuando el cambio $u = z-2$ obtenemos

$$f(z) = \frac{3}{1-u} + \frac{1}{1+u} \underbrace{=}_{|u|<1} 3\sum_{n=0}^{+\infty} u^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^n \underbrace{=}_{|z-2|<1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[3+(-1)^n\right](z-2)^n.$$

$\square$

54. Existencia de ceros en el disco unidad

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto que contiene a $\overline{D}$ siendo D el disco unidad. Sea $f \in H(\Omega)$ tal que $|f(z)| > 2$ para todo $|z| = 1$ y $f(0) = 1$. Demostrar que f tiene algún cero en D,
(a) Usando el teorema del módulo máximo.
(b) Usando el teorema del valor medio de Gauss.

SOLUCIÓN. (a) Si $f(z)$ no tiene ceros en D, la función $g(z) = 1/f(z)$ es holomorfa en D. Al ser holomorfa en $\Omega \supset \partial(D)$, es continua en $\partial(D)$, con $f(z) \neq 0$ en $\partial(D)$, luego $g(z) = 1/f(z)$ es continua en $\partial(D)$.

Se verifican por tanto las hipótesis del principio del módulo máximo para g en $\overline{D}$, lo cual implica que el máximo de $|g(z)| = |1/f(z)|$ se alcanza en $\partial(D)$. Pero esto es absurdo pues

$$|g(0)| = 1 > \frac{1}{2} = |g(z)| \quad \forall z \in \partial(D).$$

Concluimos que f ha de tener ceros en el disco unidad.

(b) Si f no tiene ceros en el disco unidad, $g(z) = 1/f(z)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio de Gauss en $\gamma \equiv |z| = 1$, por tanto

$$g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it})\,dt.$$

Tomando módulos

$$1 = |g(0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} g(e^{it})\,dt\right| \underbrace{\leq}_{|g(e^{it}|<1/2} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \frac{1}{2},$$

lo cual es absurdo. $\square$

55. Unidades en el anillo de las series formales $A[[X]]$

Sea A un anillo conmutativo y unitario y $A[[X]]$ el anillo de las series formales $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_nX^n$ con coeficientes $a_n \in A$. Demostrar que

$$S(X) = \sum_{n\geq 0} a_nX^n \text{ es unidad en } A[[X]] \Leftrightarrow a_0 \text{ es unidad en } A.$$

SOLUCIÓN. $\Rightarrow$) Si $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_nX^n$ es una unidad de $A[[X]]$, entonces existe $T(X) = \sum_{n\geq 0} a_nX^n$ tal que

$$S(X)\cdot T(X) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k\right)X^n = 1 + \sum_{n\geq 1} 0X^n$$

lo cual implica que $a_0b_0 = 1$, luego a_0 es unidad en A.

$\Leftarrow$) Sea $S(X) = \sum_{n\geq 0} a_nX^n \in A[[X]]$ una serie formal tal que a_0 es unidad en A. Construyamos otra serie formal $T(X) = \sum_{n\geq 0} b_nX^n \in A[[X]]$ tal que $S(X)\cdot T(X) = 1$, es decir tal que

$$a_0b_0 = 1, \text{ y } \; c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k = 0 \text{ si } n \geq 1. \quad (*)$$

Como a_0 es unidad, $b_0 = a_0^{-1}$. Supongamos ahora que hemos elegido convenientemente los coeficientes b_n para $0 \leq n \leq m$. Entonces, c_{m+1} ha de verificar

$$0 = c_{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} a_{m+1-k}b_k = a_0b_{m+1} + \sum_{k=0}^{m} a_{m+1-k}b_k.$$

Pero dado que a_0 es unidad basta elegir $b_{m+1} = -a_0^{-1}\sum_{k=0}^{m} a_{m+1-k}b_k$. Queda pues connstruida $T(X)$ tal que $S(X)\cdot T(X) = 1$. $\square$

56. Producto de Cauchy de series igual a la unidad

Usando el producto de Cauchy de series, demostrar que

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right)=1.$$

Dar una obvia interpretación de la igualdad anterior.

solución. Aplicando el criterio de D'Alembert a ambas series para $x\neq 0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|:\left|\frac{n!}{x^n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{n+1}=0<1,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right|:\left|\frac{n!}{(-x)^n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{n+1}=0<1,$$

lo cual implica que ambas series son absolutamente convergentes en $\mathbb{R}$ (para $x=0$ la convergencia absoluta es trivial). Aplicando el teorema del producto de Cauchy de series,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(-x)^k}{k!}\right)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(-x)^k\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(x+(-x))^n=1+\sum_{n=1}^{+\infty}0x^n=1.$$

Una obvia interpretación de la igualdad demostrada es que $e^xe^{-x}=e^0=1$, dado que según sabemos,

$$e^t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

$\square$

57. El anillo de las funciones continuas no es noetheriano

Sea $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ el anillo conmutativo y unitario de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales suma y producto.
(a) Demostrar que para todo entero $n\geq 0$, $I_n=\{f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(x)=0 \text{ si } x\geq n\}$ es un ideal de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
(b) Demostrar que la sucesión de ideales $\{I_n\}$ no cumple la condición de cadena ascendente. Concluir.

solución. (a) La función nula $\mathbf{0}\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ satisface $\mathbf{0}(x)=0$ para todo $x\geq n$ en consecuencia, $\mathbf{0}\in I_n$ para todo $n\geq 0$. Para todo $x\geq n$,

$$f,g\in I_n\Rightarrow (f-g)(x)=f(x)-g(x)=0-0=0\Rightarrow f-g\in I_n,$$

$$h\in\mathcal{C}(\mathbb{R}),\ f\in I_n\Rightarrow (hf)(x)=h(x)f(x)=h(x)0=0\Rightarrow hf\in I_n.$$

Concluimos que I_n es ideal de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

(b) Veamos que se verifica

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \ldots$$

En efecto, si $x \in I_n$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \geq n$ y por tanto $f(x) = 0$ para todo $x \geq n+1$ i.e. $x \in I_{n+1}$. No se cumple la condición de cadena ascendente pues la función continua

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{x}{n+1} & \text{si } x < n+1 \\ 0 & \text{si } x \geq n+1 \end{cases}$$

pertenece a I_{n+1}, sin embargo $f(n) = (-1)/(n+1) \neq 0$, luego $f \notin I_n$. La cadena $\{I_n\}$ no se puede establizar. Concluimos que $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ no es noetheriano. $\square$

58. $X = \{(t,t) : t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}$ no es cerrado con la topología de Zariski

Demostrar que

$$X = \{(t,t) : t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}$$

no es cerrado en $\mathbb{R}^2$ con la topología de Zariski.

Solución. Los conjuntos cerrados con la topología de Zariski son exactamente los conjuntos algebraicos. Veamos que X no es algebraico en $\mathbb{R}^2$. En efecto, si lo fuera existirian polinomios $f_1, \ldots, f_m$ de $\mathbb{R}[x,y]$ tales que $X = V(f_1, \ldots, f_m)$. Cualquier polinomio $f \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ anula a todo punto de X, por tanto el polinomio $g(t) := f(t,t)$ anula a todo $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ahora bien, como $\mathbb{R}$ es cuerpo infinito, g es el polinomio nulo. En particular, todo $f \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ satisface $f(1,1) = 0$, es decir $(1,1) \in V(f_1, \ldots, f_m)$. Pero $(1,1) \notin X$ (contradicción). $\square$

59. Funciones cumpliendo $f'(\lambda x) = f'(x) \sin x + f(x) \cos x$

Determinar todas las funciones derivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f'(\lambda x) = f'(x) \sin x + f(x) \cos x \quad \forall \lambda > 0.$$

Solución. Sea f una función que satisface la igualdad dada. Veamos condiciones necesarias que ha de cumplir f. Sea x, y reales positivos. Para $\lambda = 1$ obtenemos

$$f'(x) = f'(x) \cos x + f(x) \sin x.$$

Existe $\mu > 0$ tal que $y = \mu x$, por tanto

$$f'(y) = f'(\mu x) = f'(x) \cos x + f(x) \sin x = f'(x).$$

Es decir, f es constante en $(0,+\infty)$ y por tanto $f(x) = ax + C_1$ en $(0,+\infty)$. El mismo razonamiento lo podemos hacer para x, y reales negativos, por tanto $f(x) = b + C_2$ en $(-\infty, 0)$. Al ser f continua en 0,

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow f(0) = C_1 = C_2.$$

Al ser f derivable en 0,

$$\begin{cases} f'(0+) = \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{ah + C_1 - C_1}{h} = a \\ f'(0-) = \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{bh + C_2 - C_2}{h} = b \end{cases} \Rightarrow a = b.$$

En consecuencia, si una función f cumple la igualdad dada, ha de ser necesariamente de la forma $f(x) = ax + C_1$. Sustituyendo en tal igualdad,

$$a = a \sin x + (ax + C_1) \cos x.$$

Dando a x los valores 0 y π,

$$\begin{cases} a = C_1 \\ a = -\pi a - C_1, \end{cases}$$

lo cual implica que $a = C_1 = 0$, luego la única posible solución de la ecuación dada es la función nula, que evidentemente es solución. $\square$

60. Lema de Gauss

SOLUCIÓN. Por reducción al absurdo, sea $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, se trata de demostrar que

$$P(x) \text{ es reducible en } \mathbb{Q}[x] \Rightarrow P(x) \text{ es reducible en } \mathbb{Z}[x].$$

Si P es reducible en $\mathbb{Q}[x]$ entonces, $P = P_1P_2$ con $P_1, P_2 \in \mathbb{Q}[x]$, grad $P_1 > 1$ y grad $P_2 > 1$. Podemos multiplicar por un n natural tal que

$$nP = \left(b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + \cdots + b_0\right)\left(c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_0\right) \qquad (*)$$

con $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$. Sea n el menor natural tal que nP se puede descomponer en $\mathbb{Z}[x]$. Si $n = 1$ ya estaría demostrado. Sea $n > 1$ y p divisor primo de n, entonces no todos los b_i ni todos los c_i son divisibles por p (pues n es mínimo).

Sean b_i, c_j tales que

$$p \mid b_0,\ p \mid b_1, \ldots, p \not| b_i, \ldots$$
$$p \mid c_0,\ p \mid c_1, \ldots, p \not| c_j, \ldots$$

(pudiera ocurrir $i = 0$, $j = 0$). Sea $P(x) = \sum a_k x^k$. Igualando en $(*)$ los coeficientes de grado $i + j$,

$$na_{i+j} = b_{i+j}c_0 + b_{i+j-1}c_1 + \cdots + b_ic_j + \cdots + b_0c_{i+j}$$
$$\Rightarrow p \mid b_ic_j \underbrace{\Rightarrow}_{p \text{ primo}} p \mid b_i \ \vee\ p \mid c_j$$

lo cual es una contradicción. Por tanto ha de ser $n = 1$, lo cual prueba el Lema de Gauss. $\square$

61. Criterio de Eisenstein

(a) Demostrar el *criterio de Eisenstein*:
Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Supongamos que existe p primo tal que
  (i) $p \not| a_n,\ p \mid a_{n-1}, \ldots, p \mid a_0$.
  (ii) $p^2 \not| a_0$.
Entonces, $P(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ (como consecuencia también lo es en $\mathbb{Z}[x]$).
(b) Demostrar que los polinomios $P(x) = x^5 - 2x + 6$ y $Q(x) = x^7 - 12$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$. Solución

SOLUCIÓN. (a) Por contradicción, si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ es reducible en $\mathbb{Q}[x]$, por el lema de Gauss también es reducible en $\mathbb{Z}[x]$:

$$P(x) = \left(b_l x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \cdots + b_0\right)\left(c_m x^l + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_0\right)$$

con $l - m = n$, $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$. Igualando coeficientes del mismo grado:

$$a_0 = b_0c_0,\ a_1 = b_1c_0 + b_0c_1,\ a_2 = b_2c_0 + b_1c_1 + b_0c_2,\ \ldots \quad (1)$$

Por hipótesis $p \mid a_0 = b_0c_0$ y $p^2 \not| a_0 = b_0c_0$, por tanto $p \mid b_0$ o $p \mid c_0$ pero no a ambos. Supongamos que $p \mid b_0$ y $p \not| c_0$. Entonces,

$$a_1 = b_1c_0 + b_0c_1 \underbrace{\Rightarrow}_{p|a_1 \text{ por hip.}} pa_1' = b_1c_0 + pb_0'c_1$$

$$\Rightarrow b_1c_0 = p\left(a_1' - b_0'c_1\right) \underbrace{\Rightarrow}_{p\not| c_0} p \mid b_1.$$

De la igualdad $a_2 = b_2c_0 + b_1c_1 + b_0c_2$ deducimos de manera análoga que $p \mid b_2$ y de las restantes igualdades (1), que $p \mid b_3, \ldots p \mid b_n$. Esto implica que p divide a todos los a_i, que es una contradicción pues p no divide a a_n.

(b) Para el polinomio $P(x)$ elijamos $p = 2$. Entonces,

$$(2 \not| 1,\ 2 \mid 0,\ 2 \mid 0,\ 2 \mid 0,\ 2 \mid -2,\ 2 \mid 6)\ \wedge\ (2^2 \not| 6)$$

por tanto, y de acuerdo con el criterio de Eisenstein, $P(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$. Para el polinomio $Q(x)$ elijamos $p = 3$. Entonces,

$$(3 \not| 1,\ 3 \mid 0,\ 3 \mid 0,\ 3 \mid 0,\ 3 \mid 0,\ 3 \mid 0,\ 3 \mid 0,\ 3 \mid -12)\ \wedge\ (3^2 \not| -12)$$

con lo cual también $Q(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$. □

62. Todo grupo de orden 4 es abeliano

Demostrar que todo grupo de orden 4 es abeliano.

SOLUCIÓN. Sea G un grupo de orden 4. Si G es cíclico, ya está demostrado pues sabemos que todo grupo cíclico es abeliano. Supongamos que G no es cíclico y que $a \in G$. Como el orden de todo elemento en un grupo finito es divisor del orden del grupo, o bien a es de orden 1 en cuyo caso $a = e$, o bien es de orden 2, en cuyo caso $a^2 = e$. Por tanto, en cualquier caso $a^2 = e$

para todo $a \in G$.

Sean ahora $a, b \in G$. Se verifica $(ab)(ab) = e$. Multiplicando por ba a la derecha:

$$abab = e \Rightarrow ababba = ba \Rightarrow abaea = ba$$
$$\Rightarrow abaa = ba \Rightarrow abe = ba \Rightarrow ab = ba,$$

es decir, G es abeliano. $\square$

63. Wronskiano

Sea I un intervalo de la recta real y $f_1, \ldots, f_n$ funciones derivables hasta orden $n-1$ en I. Se define el *wronskiano* de dichas funciones como

$$W(f_1, \ldots, f_n)(x) := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \quad x \in I.$$

(a) Demostrar que si el wronkiano es distinto de cero en algún punto de I, entonces las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son linealmente independientes en I.
(b) Aplicación: demostrar que las funciones $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = x^3$ $f_3(x) = 1$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.
(c) Demostrar que el recíproco del resultado del apartado (a) no es cierto. Para ello considérense las funciones en $I = \mathbb{R}$ dadas por $g_1(x) = x^3$, $g_2(x) = |x|^3$.

SOLUCIÓN. (a) Sea $x_0 \in I$ tal que $W(f_1, \ldots, f_n)(x_0) \neq 0$. Veamos que las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son linealmente independientes en I. En efecto,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2' + \cdots + \lambda_n f_n' = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 f_1'' + \lambda_2 f_2'' + \cdots + \lambda_n f_n'' = 0$$
$$\ldots$$
$$\Rightarrow \lambda_1 f_1^{(n-1)} + \lambda_2 f_2^{(n-1)} + \cdots + \lambda_n f_n^{(n-1)} = 0.$$

Sustituyendo $x = x_0$ obtenemos el sistema lineal homogéneo

$$\begin{bmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \cdots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El determinante de la matriz del sistema es $W(f_1, \ldots, f_n)(x_0) \neq 0$, lo cual implica que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, es decir $f_1, \ldots, f_n$ son linealmente independientes en I.

(b) El wronskiano es

$$W(f_1,f_2)(x)=\begin{vmatrix}\sin x & x^3 & 1\\ \cos x & 3x^2 & 0\\ -\sin x & 6x & 0\end{vmatrix}=3x(2\cos x+x\sin x).$$

Tenemos $W(f_1,f_2)(\pi/2)=(3\pi/2)\cdot(\pi/2)\neq 0$, por tanto f_1,f_2,f_3 son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

(c) Veamos que $g_1(x)=x^3$, $g_2(x)=|x|^3$ son linealmente independientes en $I=\mathbb{R}$. Efectivamente, si $\lambda_1 g_1(x)+\lambda g_2(x)=0$ y dando a x los valores 1 y -1 obtenemos $\lambda_1+\lambda_2=0$ y $-\lambda_1+\lambda_2=0$, lo cual implica que $\lambda_1=\lambda_2=0$. Sin embargo, el wronskiano se anula en todo x real pues

$$x\geq 0\Rightarrow W(g_1,g_2)(x)=\begin{vmatrix}x^3 & x^3\\ 3x^2 & 3x^2\end{vmatrix}=3x^5-3x^5=0.$$

$$x<0\Rightarrow W(g_1,g_2)(x)=\begin{vmatrix}x^3 & -x^3\\ 3x^2 & -3x^2\end{vmatrix}=-3x^5+3x^5=0.$$

□

64. Iteraciones de Picard

(a) Verificar que se verifican las hipótesis del teorema de Picard para el problema de valor inicial

$$y'=2x(1-y),\quad y(0)=2.\qquad (1)$$

(b) Resolver el problema (1) usando iteraciones de Picard.
(c) Verificar que la solución hallada es válida en $I=(-\infty,+\infty)$.

SOLUCIÓN. a) Recordamos el teorema de Picard:
Sea $f(x,y)$ una función definida en el rectángulo

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x-x_0|\leq a,\ |y-y_0|\leq b\right\},\quad (a>0,b>0).$$

Supongamos que (i) f es continua en R (por tanto acotada en el compacto R, es decir existe $K>0$ tal que $|f(x,y)|\leq K$ para todo $(x,y)\in R$). (ii) f es Lipschitziana en R, i.e. existe $L>0$ tal que

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L\,|y_1-y_2|\,,\quad \forall (x,y_i)\in R.$$

Entonces, existe una única solución $y=y(x)$ del problema de valor inicial $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$.

Veamos ahora que se verifican las hipótesis del teorema de Picard para el sistema de valor inicial dado. La función $f(x,y)=2x(1-y)$ es elemental y está definida en todo $\mathbb{R}^2$, luego es continua en $\mathbb{R}^2$ y por ende en todo rectángulo del tipo

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x|\leq a,\ |y-2|\leq b\right\},\quad (a>0,b>0).$$

Por otra parte, para todo (x, y_1), (x, y_2) puntos de R :

$$\begin{aligned}|f(x,y_1)-f(x,y_2)| &= |2x(1-y_1)-2x(1-y_2)| = 2\,|x|\,|y_2-y_1| \\ &\le 2a\,|(y_2-2)+(2-y_1)| \le 2a\,(|y_2-2|+|2-y_1|) = 4ab = L,\end{aligned}$$

es decir f es Lipschitziana en R. Concluimos que existe una única solución $y = y(x)$ del problema de valor inicial dado.

(b) Recordamos que las iteraciones de Picard $y_n(x)$ asociados al problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ son

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\,(t, y_{n-1}(t))\,dt.$$

Tenemos que $y_0(x) = 2$, por tanto

$$\begin{aligned}y_1(x) &= 2 + \int_0^x f\,(t,2)\,dt = 2 + \int_0^x 2t\,(1-2)\,dt = 2 - x^2, \\ y_2(x) &= 2 + \int_0^x f\left(t, 2-t^2\right)dt = 2 + \int_0^x 2t\left(t^2-1\right)dt = 2 - x^2 + \frac{x^4}{2}, \\ y_3(x) &= 2 + \int_0^x f\left(t, 2-t^2+t^4/2\right)dt = 2 + \int_0^x 2t\left(t^2-t^4/2-1\right)dt \\ &= 2 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!}, \\ y_4(x) &= 2 + \int_0^x f\left(t, 2-t^2+t^4/2-t^6/3!\right)dt \\ &= 2 + \int_0^x 2t\left(t^2-t^4/2+t^6/3!-1\right)dt = 2 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}.\end{aligned}$$

Las iteraciones anteriores sugieren la fórmula general

$$y_n(x) = 2 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Efectivamente, la fórmula es cierta para $n = 1, 2, 3, 4$ y si si es cierta para n, entonces

$$\begin{aligned}y_{n+1}(x) &= 2 + \int_0^x f\,(t, y_n(t))\,dt \\ &= 2 + \int_0^x 2t\left(-1 + t^2 - \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!} - \frac{t^8}{4!} + \cdots (-1)^{n+1}\frac{t^{2n}}{n!}\right)dt \\ &= 2 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!},\end{aligned}$$

luego la fórmula es cierta para $n+1$. La solución del problema del valor inicial es según sabemos el límite de las iteraciones de Picard. Es decir,

$$\begin{aligned}y(x) &= \lim_{n\to+\infty} y_n(x) = 2 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \cdots \\ &= 1 + \left(1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^4}{4!} + \cdots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \cdots\right)\end{aligned}$$

$$= 1 + e^{-x^2}.$$

(c) Si $y(x) = 1 + e^{-x^2}$, se verifica $y(0) = 2$. Por otra parte, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$y'(x) = -2xe^{-x^2} = 2x\left(-e^{-x^2}\right) = 2x\,(1 - y(x))\,,$$

lo cual implica que la solución es válida en $I = (-\infty, +\infty)$.[$\square$

65. Afijos formando un triángulo rectángulo isósceles

Dada la ecuación $z^2 - 8iz - 19 + 4i = 0$ cuyas raíces son z_1 y z_2, hallar los complejos z_3 tales que los afijos z_1, z_2, y z_3 formen un triángulo rectángulo isósceles. Considérese el vértice correspondiente al ángulo recto como el afijo de la raíz de mayor componente imaginaria.

SOLUCIÓN. Resolvamos la ecuación dada.

$$z = \frac{8i \pm \sqrt{(8i)^2 - 4(-19 + 4i)}}{2} = \frac{8i \pm \sqrt{12 - 16i}}{2} = 4i \pm \sqrt{3 - 4i}.$$

Por otra parte,

$$\sqrt{3 - 4i} = x + iy \Leftrightarrow 3 - 4i = (x + iy)^2 \Leftrightarrow 3 - 4i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que x, y son reales y resolviendo el sistema anterior obtenemos $(x, y) = (2, -1)$ y $(x, y) = (-2, 1)$ y por tanto las raíces cuadradas de $3 - 4i$ son $2 - i$ y $2 + i$. Las raíces de la ecuación son por tanto

$$z_1 = 4i + (2 - i) = 2 + 3i,$$

$$z_2 = 4i + (-2 + i) = -2 + 5i.$$

El afijo de z_2 es el vértice del ángulo recto, por tanto obtenemos un triángulo rectángulo isósceles girando z_1 ángulos de $\pi/2$ o $-\pi/2$ alrededor de z_2, es decir

$$z_3 = z_2 + (z_1 - z_2)e^{\pi i/2} = -2 + 5i + (4 - 2i)i = 9i,$$

$$z_3 = z_2 + (z_1 - z_2)e^{-\pi i/2} = -2 + 5i + (4 - 2i)(-i) = -4 + i.$$

$\square$

66. La función de Thomae es integrable Riemann en $[0, 1]$

Se define la *función de Thomae* como la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x \text{ is racional, } x = \dfrac{p}{q},\ q > 0 \text{ y mcd } (p, q) = 1 \\ 0 & \text{si } x \text{ is irracional.} \end{cases}$$

Demostrar que es integrable Riemann en $[0, 1]$.

SOLUCIÓN. Veamos que la integral inferior $\underline{\int_{[0,1]}} f(x)\ dx$ es nula. En efecto, para todo $x \in [0,1]$ se verifica $f(x) \geq 0$ y para todo $[a,b] \subset [0,1]$ existe $x \in [a,b]$ tal que $x \notin \mathbb{Q}$, luego para todo $[a,b] \subset [0,1]$ es

$$m = \text{ínf}\{f(x) : x \in [a,b]\} = 0.$$

Esto implica que para toda partición P de $[0,1]$ se verifica $I(P,f) = 0$ y por tanto

$$\underline{\int_{[0,1]}} f(x)\ dx = \sup\{I(P,f) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = 0.$$

Veamos que la integral superior $\overline{\int_{[0,1]}} f(x)\ dx$ es nula. Para demostrarlo, consideremos para todo n entero positivo la función $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x \text{ is racional, } x = \dfrac{p}{q},\ q > 0, \text{ mcd } (p,q) = 1,\ q < n \\ \dfrac{1}{n} & \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

La función f_n es integrable Riemann en $[0,1]$ porque es continua salvo en un número finito de puntos. Para todo x irracional del intervalo $[0,1]$ se verifica $f_n(x) = 1/n$, luego $I(P,f_n) = 1/n$ para toda partición P de $[0,1]$ y en consecuencia

$$\underline{\int_{[0,1]}} f(x)\ dx = 1/n = \overline{\int_{[0,1]}} f(x)\ dx.$$

Además, para todo $x \in [0,1]$ y para todo n, $f_n(x) \geq f(x)$, con lo cual $S(P,f_n) \geq S(P,f)$ para toda partición P de $[0,1]$. Se deduce para todo n que

$$\overline{\int_{[0,1]}} f_n(x)\ dx = \text{ínf}\{S(P,f_n) : P \in \mathcal{P}[0,1]\}$$

$$\geq \text{ínf}\{S(P,f) : P \in \mathcal{P}[0,1]\} = \overline{\int_{[0,1]}} f(x)\ dx.$$

Es deir, para todo n,

$$0 \leq \overline{\int_{[0,1]}} f(x)\ dx \leq \frac{1}{n},$$

y tomando límites cuando $n \to +\infty$ queda $\overline{\int_{[0,1]}} f(x)\ dx = 0$. Concluimos pues que la función f de Thomae es integrable Riemann en $[0,1]$ y que $\int_{[0,1]} f(x)\ dx = 0$. $\square$

67. Ideal generado por un subconjunto de un anillo

Sea R un anillo conmutativo y unitario y S un subconjunto de R. Se define

$$\langle S\rangle := \left\{\sum r_i s_i \text{ (suma finita)} : r_i \in R, s_i \in S\right\}.$$

(a) Demostrar que $\langle S\rangle$ es ideal de R.
(b) Demostrar que $\langle S\rangle$ es el menor de todos los ideales de R que contienen a S. Al ideal $\langle S\rangle$ se le llama *ideal generado por* S.

SOLUCIÓN. (a) Tenemos $0 = 0s$ para cualquier $s \in S$, luego $0 \in \langle S\rangle$. Si $x = \sum r_i s_i \in \langle S\rangle$ e $y = \sum r'_j s'_j \in \langle S\rangle$ entonces,

$$x - y = \sum r_i s_i - \sum r'_j s'_j = \sum r_i s_i + \sum (-r'_j)s'_j,$$

que es una suma finita del tipo de las que pertenecen a $\langle S\rangle$. Si $r \in R$ y $x = \sum r_i s_i \in \langle S\rangle$ entonces,

$$rx = r\sum r_i s_i = \sum (rr_i)s_i,$$

que es una suma finita del tipo de las que pertenecen a $\langle S\rangle$.

(b) Todo elemento $s \in S$ es de la forma $s = 1s$ con $1 \in R$, por tanto $S \subset \langle S\rangle$. Sea ahora I un ideal de R conteniendo al subconjunto S. Para elementos cualesquiera $r_1, \dots, r_m$ de R y $s_1, \dots, s_m$ de S, se verifica

$$r_1 s_1 + \dots + r_m s_m \in I$$

por ser I ideal, luego $\langle S\rangle \subset I$. $\square$

68. Caracterización de anillos noetherianos

(a) Sea R un anillo conmutativo y unitario. Se dice que R cumple la condición de cadena ascendente sii para toda cadena I_n de ideales de R

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \dots$$

existe un n_0 natural tal que $I_n = I_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$ (i.e. la cadena se estabiliza). Demostrar la siguiente caracterización

$$R \text{ es noetheriano} \Leftrightarrow R \text{ cumple la condición de cadena ascendente.}$$

(b) Aplicación: demostrar que el anillo $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no es noetheriano.

SOLUCIÓN. (a) $\Rightarrow$) Recordamos que un anillo conmutativo y unitario R se dice que es noetheriano sii todo ideal de R está finitamente generado. Demostremos la caracterización propuesta. Sea $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$ una cadena ascendente de ideales de R. Es inmediato comprobar que $I = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ es ideal de R. Por hipótesis R está finitamente generado, por tanto existen elementos $g_1, \dots, g_m$ de R tales que $I = \langle g_1, \dots, g_m\rangle$. Para $1 \leq j \leq m$ se verifica $g_j \in I_{k_j}$ para algún k_j natural. Si

$$n_0 = \text{máx}\{k_j : 1 \leq j \leq m\},$$

entonces $g_1, \dots, g_m \in I_{n_0}$ ya que $I_{k_j} \subset I_{n_0}$. Entonces, para todo $n \geq n_0$ se verifica

$$I = \langle g_1, \dots, g_m \rangle \subset I_{n_0} \subset I_n \subset I,$$

lo cual implica que $I_{n_0} = I_n$ si $n \geq n_0$.
$\Leftarrow$) Por reducción al absurdo. Si R no es noetheriano existe un ideal J de R no está finitamente generado. Elijamos $0 \neq f_1 \in J$ y sea $I_1 = \langle f_1 \rangle$. Como J no está finitamente generado, $I_1 \subsetneq J$ y por tanto existe $f_2 \in J \setminus I_1$ tal que $I_2 = \langle f_1, f_2 \rangle \subsetneq J$. Repitiendo el proceso obtenemos una cadena de ideales

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \dots \quad (I_k = \langle f_1, f_2, \dots f_k \rangle)$$

que no se estabiliza. Queda demostrada la caracterización.
(b) Ver el problema 57. $\square$

69. Polinomio de Motzkin

Se llama *polinomio de Motzkin* al polinomio de $\mathbb{R}[X, Y]$:

$$s(X, Y) = X^4Y^2 + X^2Y^4 - 3X^2Y^2 + 1.$$

(1) Demostrar que $s \geq 0$, es decir $s(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(2) s no es suma de cuadrados en $\mathbb{R}[X, Y]$.

Solución. (1) Para $a, b, c \geq 0$ sabemos que se verifica la de desigualdad

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad \text{si } a, b, c \geq 0.$$

Elgiendo $a = 1$, $b = x^4y^2$, $c = x^2y^4$ queda

$$\frac{1 + x^4y^2 + x^2y^3}{3} \geq \sqrt[3]{x^6y^6}, \text{ o bien } s(x, y) \geq 0 \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

es decir, el polinomio de Motzkin es no negativo.
(2) Por contradicción. Si $s = \sum f_i^2$ para ciertos polinomios $f_i \in \mathbb{R}[X, Y]$, cada f_i tiene a lo sumo grado 3 y por tanto es combinación lineal real de

$$1,\ X,\ Y,\ X^2,\ XY,\ Y^2,\ X^3,\ X^2Y,\ XY^2,\ Y^3.$$

Si X^3 aparece en algún f_i, entonces X^6 aparecería en s con coeficiente positivo lo cual es absurdo. Esto implica que X^3 no aparece en ningún f_i. De manera análoga deducimos que Y^3, X^2, X, e Y no aparecen en ningún f_i. Es decir los polinomios f_i son de la forma

$$f_i = a_i + b_iXY + c_iX^2Y + d_iXY^2.$$

Pero entonces, $\sum b_i^2 = -3$ lo cual es una contradicción. $\square$

70. Recíproco del teorema del valor medio

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Se considera el siguiente enunciado:

$$\forall c \in (a, b) \ \exists x, y \in [a, b] : f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \qquad (E)$$

Nótese que se trata de una especie de recíproco del teorema del valor medio. Demostrar mediante un contraejemplo que en general (E) es falso.

SOLUCIÓN. Sea $[a, b]$ conteniendo a 0 como punto interior y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^3$. Tenemos $f'(0) = 0$ y para $x \neq y$ en $[a, b]$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{y^3 - x^3}{x - y} = y^2 + yx + x^2.$$

Ahora bien,

$$y^2 + yx + x^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{-3x^2}}{2} = \frac{-x \pm \sqrt{3}xi}{2}$$

y la única solución real de la ecuación anterior se obtiene para $x = y = 0$. Concluimos $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \neq 0$ para todo $x \neq y$ en $[a, b]$ y por tanto, el recíproco (E) del teorema del valor medio es en general falso. $\square$

71. R dominio de integridad y no cuerpo, implica $R[x]$ no es dominio de ideales principales

Sea R un dominio de integridad que no es un cuerpo. Demostrar que $R[x]$ no es un dominio de ideales principales.

SOLUCIÓN. Como R es dominio de integridad que no es un cuerpo, existe $0 \neq c \in R$ tal que c no es invertible. Consideremos el ideal de R, dado por $I = \langle c, x \rangle$. Veamos por contradicción que I no es ideal principal.
En efecto si I es principal, existe $d(x) \in I$ tal que $I = \langle d(x) \rangle$ y por tanto $c \in \langle d(x) \rangle$ y $x \in \langle d(x) \rangle$ o de forma equivalente $d(x) \mid c$ y $d(x) \mid x$. Dado que $d(x) \mid x$, o bien $d(x)$ es una unidad, o bien $d(x) = ux$ con u unidad. Dado que $d(x)$ también divide a c, necesariamente $d(x)$ es unidad y por tanto $I = R[x]$. En consecuencia existen $p(x), q(x) \in R[x]$ tales que

$$cp(x) + xq(x) = 1.$$

Como el grado de $xq(x)$ es al menos 1, se verifica $cp_0 = 1$ siendo p_0 el término constante de $p(x)$. Es decir, c es unidad (contradicción). Concluimos que $R[x]$ no es dominio de ideales principales. $\square$

72. $n^5 - n$ es divisible por 30

Demostrar que para todo entero n, el número $n^5 - n$ es divisible por 30.

solución. □

Podemos expresar $n^5 - n$ en la forma

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1).$$

Al menos uno de los tres enteros consecutivos $n-1$, n, $n+1$ es divisible por 2 y al menos uno entre 3, luego $(n-1)n(n+1)$ es divisible por 6.
Por otra parte $n^2 + 1$ es divisible por 5 sii $n^2 - 4$ lo es. Pero $n^2 - 4 = (n+2)(n-2)$, en consecuencia

$$(n-1)n(n+1)(n^2+1) \text{ es divisible por } 5$$

$$\Leftrightarrow (n-1)n(n+1)(n+2)(n-2) \text{ es divisible por } 5.$$

El último producto es el producto de cinco números consecutivos, luego es divisible por 5. Concluimos pues que $30 \mid n^5 - n$ para todo entero n.

73. Matriz de Gram y dependencia lineal

Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas y

$$G[f_1, \ldots, f_n] = \det \begin{bmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle & \ldots & \langle f_1, f_n\rangle \\ \langle f_2, f_1\rangle & \langle f_2, f_2\rangle & \ldots & \langle f_2, f_n\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle f_n, f_1\rangle & \langle f_n, f_2\rangle & \ldots & \langle f_n, f_n\rangle \end{bmatrix}$$

en donde $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx$. Demostrar que

$$\{f_1, \ldots, f_n\} \text{ es linealmente dependiente } \Leftrightarrow G[f_1, \ldots, f_n] = 0.$$

solución. $\Leftarrow$) Si $\{f_1, \ldots, f_n\}$ fuera linealmente independiente, consideremos el espacio vectorial $E = L[f_1, \ldots, f_n]$. Entonces, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es base de E con lo cual, la matriz $G = [\langle f_i, f_j\rangle]$ es la matriz de Gram de un producto escalar y por tanto $G[f_1, \ldots, f_n] = \det G > 0$ (absurdo).

$\Rightarrow$) Si $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es linealmente dependiente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i$. Sustituyendo, la última fila de la matriz es

$$\left[\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \langle f_i, f_1\rangle,\ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \langle f_i, f_2\rangle,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \langle f_i, f_n\rangle,\right],$$

es decir la última fila es combinación lineal de las restantes y por tanto $G[f_1, \ldots, f_n] = 0$. □

74. Generador de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Demostrar que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

SOLUCIÓN. (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Dado que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son elementos de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, también lo es $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y al ser $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ el menor cuerpo que contiene a $\mathbb{Q}\cup\{\sqrt{2}+\sqrt{3}\}$, necesariamente $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Podemos expresar

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

Como $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ es cuerpo y $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, se verifica $\sqrt{3}-\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Por otra parte

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2} = 2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}),$$

lo cual implica que $\sqrt{3} = (1/2)(2\sqrt{3}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Análogamente se demuestra que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, con lo cual $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. $\square$

75. Cardinal de un cuerpo finito

(a) Sean K/k una extensión de cuerpos de grado $[K:k]=n$ y card $k=q$. Demostrar que card $K=q^n$
(b) Sea K un cuerpo finito de característica p. Demostrar que card $K=p^n$ para un cierto natural n.

SOLUCIÓN. (a) Sea $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ una base de K como espacio vectorial sobre k. Si $\lambda \in k$, entonces λ se puede escribir de forma única como

$$\lambda = \lambda_1\alpha_1+\dots+\lambda_n\alpha_n \text{ con } \lambda_1,\dots,\lambda_n \in k.$$

Como cada λ_i puede ser uno de los q elementos de k, el número de elementos de k es card $k = \underbrace{q\cdot\ldots\cdot q}_{n} = q^n$.

(b) Si K tiene característica p, sabemos que existe un subcuerpo k de K que es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Pero la extensión K/k es finita, digamos de grado n. Por el apartado anterior, card $K=p^n$. $\square$

76. Funciones monótonas, crecientes y decrecientes

1. Definir los conceptos de función creciente, decreciente, estrictamente creciente, estrictamente decreciente y monótona para una función real de variable real.
2. Demostrar que la función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ es estrictamente creciente.
3. Sea $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función. Demostrar que

$$f \text{ es creciente} \Leftrightarrow -f \text{ es decreciente.}$$

4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ creciente. Demostrar que para todo $c \in (a, b)$ existen

$$f(c+) = \lim_{x \to c^+} f(x), \quad f(c-) = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

y además $f(c-) \leq f(c) \leq f(c+)$. Demostrar que en los puntos extremos se satisface $f(a) \leq f(a+)$ y $f(b-) \leq f(b)$.
Nota. Naturalmente, se obtiene un teorema análogo para funciones decrecientes usando el apartado tercero.
5. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente. Demostrar que existe la aplicación inversa $f^{-1} : f(A) \to A$ y es estrictamente creciente.
Nota. Naturalmente, se obtiene un teorema análogo para funciones estrictamente decrecientes usando el apartado tercero.
6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente y la partición de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Demostrar la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k+) - f(x_k-)] \leq f(b) - f(a).$$

7. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona. Demostrar que el conjunto de los puntos de discontinuidad de f es contable.

SOLUCIÓN. 1. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *creciente* sii para todo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \leq f(x_2)$, y se dice que es *decreciente* sii para todo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \geq f(x_2)$. Si las desigualdades anteriores se cambian por desigualdades estrictas se dice que f es *estrictamente creciente* y *estrictamente decreciente* respectivamente. Se dice que f es *monótona* si es creciente o decreciente.

2. Para $0 \leq x_1 < x_2$ tenemos

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1^2 + x_1^2)}{x_2 - x_1}$$
$$= x_2^2 + x_2 x_1^2 + x_1^2 > 0.$$

Dado que $x_2 - x_1 > 0$, ha de ser $f(x_2) - f(x_1) > 0$ luego $f(x_1) < f(x_2)$ y por tanto f es estrictamente creciente.

3. Para x_1, x_2 en A tenemos las equivalencias

$$f \text{ creciente} \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \text{ si } x_1 < x_2 \Leftrightarrow -f(x_1) \geq -f(x_2) \text{ si } x_1 < x_2$$
$$\Leftrightarrow (-f)(x_1) \geq (-f)(x_2) \text{ si } x_1 < x_2 \Leftrightarrow -f \text{ decreciente.}$$

4. Sea $B = \{f(x) : a < x < c\}$. Al ser f creciente, B está acotado por $f(c)$ y por tanto existe $M = \sup B \leq f(c)$. Veamos que existe $f(c-)$ y es igual a M. Tenemos que demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - M| < \epsilon.$$

Sea $\epsilon > 0$. Al ser $M = \sup B$, existe un elemento $f(x_1)$ de B tal que $M - \epsilon < f(x_1) \leq M$. Dado que f es creciente, para todo $x \in (x_1, c)$ se verifica $M - \epsilon < f(x) \leq M$, en consecuencia $|f(x) - M| < \epsilon$. Basta entonces elegir $\delta = c - x_1$ en (1). De manera análoga se demuestra que $f(c) \leq f(c+)$ y las desigualdades en los extremos.

5. Como f es estrictamente creciente, es inyectiva, lo cual implica que $f : A \to f(A)$ es biyectiva, es decir existe $f^{-1} : f(A) \to A$. Veamos que f^{-1} es estrictamente creciente. En efecto, para $y_1, y_2 \in f(A)$ con $y_1 < y_2$, sean $x_1, x_2 \in A$ tales que $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. No puede ser que $x_1 \geq x_2$ pues ocurriría $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$. Ha de ser necesariamente $x_1 < x_2$ o equivalentemente $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, lo cual prueba que f^{-1} es estrictamente creciente.

6. Para cada $1 \leq k \leq n-1$ sea $y_k \in (x_k, x_{k+1})$ e $y_0 = a$. Se verifica $f(x_k+) \leq f(y_k)$ y $f(y_{k-1}) \leq f(x_k-)$, lo cual implica que

$$f(x_k+) - f(x_k-) \leq f(y_k) - f(y_{k-1}).$$

Sumando las desigualdades de la derecha obtenemos $f(y_{n-1}) - f(a) \leq f(b) - f(a)$ y por tanto, $\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k+) - f(x_k-)] \leq f(b) - f(a)$.

7. Supongamos que f es creciente y sea $c \in (a, b)$. Del apartado 4 deducimos que f es discontinua en c si y sólo Si $f(c+) - f(c-) > 0$. Para todo $m \geq 1$ entero, sea A_m el conjunto de los puntos de discontinuidad c de f en (a, b) que satisfacen $f(c+) - f(c-) > 1/m$. Si los puntos $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$ pertenecen a A_m, por el apartado anterior se verifica

$$\frac{n-1}{m} \leq f(b) - f(a),$$

lo cual implica que A_m ha de ser necesariamente finito. Pero el conjunto de los puntos de discontinuidad de f en (a, b) es $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ y la unión contable de conjuntos finitos es contable. Posiblemente en a o b existen puntos de discontinuidad para f, luego en cualquier caso el conjuntos de los puntos de discontinuidad de f en $[a, b]$ es contable.
Si f es decreciente, se aplica el mismo razonamiento a la función creciente $-f$. $\square$

77. Funciones de variación acotada

1. Estudiar si las siguientes funciones son de variación acotada

$$(a) \quad f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f(x) = x.$$

$$(b) \quad g : [0, 1] \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. Demostrar que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es monótona, entonces es de variación acotada.
3. Demostrar que $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ es de variación acotada.
4. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Supongamos además que existe f' en (a,b) y está acotada. Demostrar que f es de variación acotada en $[a,b]$.
5. Demostrar que la siguiente función es de variación acotada

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

6. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de variación acotada, es decir $\sum_{k=1}^n|\Delta f_k|\le M$ para toda partición de $[a,b]$. Demostrar que f está acotada en $[a,b]$ por $|f(a)|+M$.

SOLUCIÓN. 1. Recordamos que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función y $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ una partición de $[a,b]$ escribimos $\Delta f_k=f(x_k)-f(x_{k-1})$ para $k=1,2,\ldots,n$, y se dice que f es de *variación acotada* en $[a,b]$ sii existe un número positivo M cumpliendo

$$\sum_{k=1}^n|\Delta f_k|\le M\quad\forall P\in\mathcal{P}[a,b].$$

(a) Para toda partición $P=\{a=x_0,x_1,\ldots,x_n=b\}$ de $[a,b]$ tenemos

$$\sum_{k=1}^n|\Delta f_k|=\sum_{k=1}^n|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^n|x_k-x_{k-1}|=\sum_{k=1}^n(x_k-x_{k-1})=b-a.$$

Entonces, $\sum_{k=1}^n|\Delta f_k|\le M$ con $M=b-a$ para toda partición de $[a,b]$ luego f es de variación acotada.
(b) Elijamos la partición de $[0,1]:$

$$x_0=0<\frac{1}{n\pi}<\frac{1}{(n-1)\pi}<\ldots<\frac{1}{\pi}<1=x_{n+1}.$$

Es decir,

$$x_0=1,\quad x_k=\frac{1}{(n-k+1)\pi}\ (k=1,2,\ldots,n),\quad x_{n+1}=1.$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n+1}|\Delta g_k|=\sum_{k=1}^{n+1}|g(x_k)-g(x_{k-1})|$$

$$=|g(x_1)-g(0)|+\sum_{k=2}^n|g(x_k)-g(x_{k-1})|+|g(x_{n+1})-g(x_n)|$$

$$=\Big(\frac{\cos n\pi}{n\pi}-0\Big)+\sum_{k=2}^n\left|\frac{\cos(n-k+1)\pi}{(n-k+1)\pi}-\frac{\cos(n-k+2)\pi}{(n-k+2)\pi}\right|+\Big(\cos 1-\frac{\cos\pi}{\pi}\Big)$$

$$=\frac{(-1)^n}{n\pi}+\sum_{k=2}^n\left|\frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)\pi}-\frac{(-1)^{n-k+2}}{(n-k+2)\pi}\right|+\cos 1+\frac{1}{\pi}.$$

Dado que $n-k+1$ y $n-k+2$ tienen distinta paridad,

$$\sum_{k=1}^{n+1}|\Delta g_k| = \frac{(-1)^n}{n\pi} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(n-k+1)\pi} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(n-k+2)\pi} + \cos 1 + \frac{1}{\pi}$$
$$= \left(\frac{(-1)^n}{n\pi} + \cos 1 + \frac{1}{\pi}\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + 1\right)$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{2}\right) \geq \frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}\right).$$

Usando que la serie armónica es divergente y tomando límites cuando $n \to +\infty$ queda

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}|\Delta g_k| \geq 0 + \frac{1}{\pi}\cdot(+\infty) = +\infty$$

lo cual prueba que g no es de variación acotada.

2. Si f es creciente, entonces para toda partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ se verifica $f(x_k) - f(x_{k-1}) \geq 0$ para $k = 1, 2, \ldots n$ y por tanto

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n}|f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n}[f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a) := M.$$

Análogo razonamiento si f es decreciente.

3. La función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es claramente monótona en $[0,1]$ (creciente en este caso), luego es de variación acotada.

4. Como f' está acotada en (a,b), existe $K \geq 0$ tal que $|f'(x)| \leq K$ para todo $x \in (a,b)$. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Por el teorema del valor medio de Lagrange,

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \text{ con } \xi_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

En consecuencia

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n}\left|f'(\xi_k)\right|\Delta x_k \leq K\sum_{k=1}^{n}\Delta_k = K(b-a) := M$$

y por tanto, f es de variación acotada en $[a,b]$.

5. La función f es elemental en $(0,1]$ y por tanto continua en $(0,1]$. Por otra parte

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2\cos\frac{1}{x} \underbrace{=}_{\text{acotada por infinitésimo}} 0 = f(0),$$

luego f es continua en $[0,1]$. En $(0,1)$ tenemos

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + x^2\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x},$$

$$\left|f'(x)\right| \leq \left|2x\cos\frac{1}{x}\right| + \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 2\cdot 1 + 1 = 3,$$

es decir f' está acotada en $(0,1)$. Como consecuencia del apartado anterior, f es de variación acotada en $[0,1]$.

6. Sea $x \in (a,b)$ y consideremos la partición $P = \{a, x, b\}$. Entonces,

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq M.$$

Esto implica que $|f(x) - f(a)| \leq M$. Ahora bien,

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| \leq M$$

$$\Rightarrow |f(x)| - |f(a)| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq |f(a)| + M.$$

Por otra parte, $|f(a)| \leq |f(a)| + M$ trivialmente, y para la partición $P = \{a, b\}$ queda $|f(b) - f(a)| \leq M$ y por tanto $|f(b)| \leq |f(a)| + M$. Es decir,

$$|f(x)| \leq |f(a)| + M \quad \forall x \in [a,b].$$

$\square$

78. Variación total de una función

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Para toda partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ denotamos por $\sum(P)$ a la suma $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|$. Llamamos *variación total* de f en $[a,b]$ al número

$$V_f(a,b) := \sup\left\{\sum(P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\right\}.$$

1. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que f es constante $\Leftrightarrow V_f(a,b) = 0$.
2. Sean $f, g : [a,b]$ de variación acotada y designamos por V_f y V_g a $V_f(a,b)$ y $V_g(a,b)$ respectivamente. Demostrar que que la suma, diferencia y producto de f y g son de variación acotada y además

$$V_{f+g} \leq V_f + V_g, \quad V_{f-g} \leq V_f + V_g, \quad V_{fg} \leq \alpha V_f + \beta V_g,$$

siendo $\alpha = \sup\{|g(x)| : x \in [a,b]\}$ y $\beta = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$.
3. Se considera la función

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in (0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que es de variación acotada en $[a,b]$ y que $1/f$ no lo es.
4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada y tal que

$$0 < m \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a,b].$$

Demostrar que $g = 1/f$ es de variación acotada en $[a,b]$ y además, $V_g \leq V_{f/m^2}$.
5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada y $a < c < b$. Demostrar que f es de variación acotada en los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$, y además

$$V_f(a,b) = V_f(a,c) + V_f(c,b).$$

SOLUCIÓN. 1. $\Rightarrow$) Si $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$. Para toda partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ se verifica

$$\sum(P) = \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |c - c| = 0,$$

luego $V_f(a,b) = \sup\{0\} = 0$

$\Leftarrow$) Si f no es constante, existen dos puntos x_1, x_2 con $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Para cualquier partición P de $[a,b]$ que contenga a x_1 y x_2, tenemos $\sum(P) \geq |f(x_2) - f(x_1)| > 0$ y por tanto $V_f(a,b) > 0$.

2. Para cada partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ tenemos

$$\begin{aligned} |\Delta(f+g)_k| &= \left|(f+g)(x_k) - (f+g)(x_{k-1)}\right| \\ &= \left|f(x_k) + g(x_k) - f(x_{k-1)} - g(x_{k-1})\right| \\ &\leq \left|f(x_k) - f(x_{k-1)}\right| + \left|g(x_k) - g(x_{k-1)}\right| = |\Delta f_k| + |\Delta g_k|, \end{aligned}$$

de lo cual deducimos que $V_{f+g} \leq V_f + V_g$ y por tanto $f+g$ es de variación acotada en $[a,b]$. Por otra parte

$$\begin{aligned} |\Delta(f-g)_k| &= \left|(f-g)(x_k) - (f-g)(x_{k-1)}\right| \\ &= \left|f(x_k) - g(x_k) - f(x_{k-1)} + g(x_{k-1})\right| \\ &\leq \left|f(x_k) - f(x_{k-1)}\right| + \left|g(x_k) - g(x_{k-1)}\right| = |\Delta f_k| + |\Delta g_k|, \end{aligned}$$

lo cual implica que $V_{f-g} \leq V_f + V_g$ y por tanto $f-g$ es de variación acotada en $[a,b]$. Por último, dado que f y g son de variación acotada, están acotadas y por tanto existen α y β y son finitos. Además, si $h = fg$

$$\begin{aligned} |\Delta h_k| &= \left|(fg)(x_k) - (fg)(x_{k-1)}\right| = \left|f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1)}g(x_{k-1})\right| \\ &= \left|[f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k)] + \left[f(x_{k-1)}g(x_k) - f(x_{k-1)}g(x_{k-1})\right]\right| \\ &\leq |g(x_k)| \left|f(x_k) - f(x_{k-1)}\right| + |f(x_{k-1})| \left|g(x_k) - g(x_{k-1)}\right| \leq \alpha |\Delta f_k| + \beta |\Delta g_k|, \end{aligned}$$

luego $V_{fg} \leq \alpha V_f + \beta V_g$ y por tanto fg es de variación acotada en $[a,b]$.

3. Para toda partición $P = \{x_0 = 0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = 1\}$. de $[0,1]$ tenemos,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| &= |f(x_1) - f(0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_3) - f(x_2)| + \cdots \\ &+ |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| + |f(1) - f(x_{n-1})| = (1 - x_1) + (x_2 - x_1) \\ &+ (x_3 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) = 2 - 2x_1 \leq 2, \end{aligned}$$

luego f es de variación acotada en $[0,1]$. Por otra parte,

$$\frac{1}{f} : [0,1] \to \mathbb{R}, \ \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \in (0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Dado que $1/x \to +\infty$ cuando $x \to 0^+$, la función $1/f$ no está acotada en $[0,1]$ y por tanto no es de variación acotada.

4. Para toda partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$ se verifica

$$\begin{aligned}|\Delta g_k| = |g(x_k) - g(x_{k-1})| &= \left|\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}\right| = \left|\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{f(x_k)f(x_{k-1})}\right| \\ &= \left|\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{f(x_k)f(x_{k-1})}\right| = \frac{|\Delta f_k|}{|f(x_k)f(x_{k-1})|} \leq \frac{V_f}{m^2},\end{aligned}$$

lo cual prueba el resultado.

5. Veamos primeramente que la función f es de variación acotada en los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$. Sea P' una partición de $[a,c]$ y P'' una partición de $[c,d]$. Entonces,

$$\sum (P') + \sum (P'') = \sum (P''') \leq V_f(a,b)$$

es decir, las sumas $\sum (P')$ y $\sum (P'')$ están acotadas, luego f es de variación acotada en los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$. Usando la propiedad $\sup\,(A+B) = \sup A + \sup B$ para subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ obtenemos la desigualdad

$$V_f(a,c) + V_f(c,b) \leq V_f(a,b).$$

Basta demostrar la desigualdad en el otro sentido. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$, y sea P' la partición de $[a,b]$ obtenida al añadir a P el punto c (podría ocurrir $P' = P$). Supongamos que $c \in [x_{k-1}, x_k]$. Entonces

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})|,$$

con lo cual $\sum(P) \leq \sum(P')$. Los puntos de P' que están en $[a,c]$ determinan una partición P_1 de $[a,b]$ y los que están en $[c,d]$ una partición P_2 de $[c,d]$, por tanto

$$\sum(P) \leq \sum(P') = \sum(P_1) + \sum(P_2) \leq V_f(a,c) + V_f(c,b).$$

Es decir, $V_f(a,c) + V_f(c,b)$ es una cota superior de las sumas $\sum(P)$, con lo cual

$$V_f(a,b) \leq V_f(a,c) + V_f(c,b).$$

$\square$

79. Diferencia de funciones crecientes

1. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Definimos la función

$$V : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad V(x) = \begin{cases} V_f(a,x) & \text{si} \quad 0 < x \leq b \\ 0 & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

Demostrar que
(a) V es creciente en $[a,b]$.
(b) $V - f$ es creciente en $[a,b]$.

2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que: f es de variación acotada en $[a, b] \Leftrightarrow f$ se puede expresar como diferencia de dos funciones crecientes.

SOLUCIÓN. 1. (a) Para $a < x_1 < x_2 \le b$, y usando conocidas propiedades de las funciones de variación acotada,

$$V_f(a, x_2) = V_f(a, x_1) + V_f(x_1, x_2) \Rightarrow V(x_2) - V(x_1) = V_f(x_1, x_2) \ge 0,$$

lo cual implica que V es creciente en $[a, b]$.
(b) Llamemos $H(x) = V(x) - f(x)$. entonces,

$$\begin{aligned} a \le x_1 < x_2 \le b \Rightarrow H(x_2) - H(x_1) &= V(x_2) - V(x_1) - [f(x_2) - f(x_1)] \\ &= V_f(x_1, x_2) - [f(x_2) - f(x_1)] \underbrace{\ge}_{f(x_2)-f(x_1)\le V_f(x_1,x_2)} 0, \end{aligned}$$

por tanto $V - f$ es creciente

2. $\Rightarrow$) Si f es de variación acotada en $[a, b]$ podemos expresar $f = V - (V - f)$, y por el apartado anterior V y $V - f$ son crecientes.
$\Leftarrow$) Sea $f = f_1 - f_2$ en $[a, b]$ con f_1 y f_2 crecientes. Sabemos que toda función monótona es de variación acotada y que la diferencia de funciones de variación acotada también lo es, de lo cual se deduce f que es de variación acotada en $[a, b]$. $\square$

80. Funciones holomorfas en un disco

Determinar todas las funciones holomorfas en el disco

$$D(1, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$$

y que satisfacen en tal disco la condición

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2 + 2n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

SOLUCIÓN. Denotando $z_n = n/(n + 1)$,

$$|z_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| < 1 \Rightarrow z_n \in D(1, 1).$$

Despejando n, tenemos $n = z_n/(1 - z_n)$. Entonces,

$$f(z_n) = 1 - \frac{1}{2\left(\dfrac{z_n}{1-z_n}\right)^2 + 2\left(\dfrac{z_n}{1-z_n}\right) + 1}$$

$$= 1 - \frac{(1-z_n)^2}{2z_n^2 + 2z_n(1-z_n) + (1-z_n)^2} = 1 - \frac{(1-z_n)^2}{1+z_n^2} = \frac{2z_n}{1+z_n^2}.$$

La función $f(z) = 2z/(1 + z^2)$ no es holomorfa exactamente en $z = \pm i \notin D(1, 1)$, luego es holomorfa en $D(1, 1)$ y satisface trivialmente la condición (1). Veamos que es la única, para ello recordemos el siguiente teorema:

Teorema. Sean f y g holomorfas en un dominio D tales que $f(z_n) = g(z_n)$ sobre una sucesión de puntos distintos de D tales que existe $l = \text{lím}\, z_n \in D$. Entonces, $f = g$.

La sucesión de puntos distintos $z_n = n/(n+1)$ de $D(1,1)$ satisfacen $\text{lím}\, z_n = 1 \in D(1,1)$, lo cual implica por el teorema anterior, que la única función que satisface las hipótesis del problema es $f(z) = 2z/(1+z^2)$. □

81. Ecuación diferencial de la ley de absorción de Lambert

La ley de absorción de Lambert asegura que la tasa de absorción de luz relativa a una profundidad x de un material translúcido es proporcional a la intensidad I en tal profuncidad x. Es decir,

$$\frac{dI}{dx} = -kI \quad \text{(Ley de absorción de Lambert).}$$

Supongamos que la intensidad I a una profundidad de 30 pies es $4/9$ de la intensidad en la superficie. Encontrar la intensidad a 60 pies y a 120 pies.

SOLUCIÓN. Resolvamos la ecuación diferencial correspondiente:

$$\frac{dI}{dx} = -kI, \quad \frac{dI}{I} = -kdx, \quad \log|I| = -kx + K, \quad I = e^K e^{-kx}.$$

La solución general es por tanto $I = Ce^{-kx}$. Para $x = 0$ obtenemos la intensidad en la superficie

$$I_0 = I(0) = C.$$

Por otra parte,

$$I(30) = \frac{4}{9} I_0 \Leftrightarrow I_0 e^{-30k} = \frac{4}{9} I_0 \Leftrightarrow e^{-30k} = \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow -30k = \log\frac{4}{9} \Leftrightarrow k = \frac{\log(9/4)}{30}.$$

Entonces,

$$I(60) = I_0 e^{-2\log(9/4)} = I_0 e^{-\log(9/4)^2} = \frac{16 I_0}{81},$$

$$I(120) = I_0 e^{-4\log(9/4)} = I_0 e^{-\log(9/4)^4} = \frac{4^4 I_0}{9^4}.$$

□

82. Derivada de un determinante

Sea I un intervalo de la recta real. Se considera la matriz de orden n :

$$A(t) = [F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t)]$$

en donde

$$F_i(t) = \begin{pmatrix} f_{1j}(t) \\ f_{2j}(t) \\ \vdots \\ f_{nj}(t) \end{pmatrix} \quad \forall t \in I \text{ con las } f_{ij} \text{ derivables en } I.$$

1. Demostrar que para todo $t \in (a, b)$ se verifica

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \det \left[F_1'(t), F_2(t), \ldots, F_n(t)\right] + \det \left[F_1(t), F_2'(t), \ldots, F_n(t)\right]$$
$$+ ... + \det \left[F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n'(t)\right].$$

2. Escribir explícitamente la fórmula anterior de la derivada de un determinante para $A(t) = [f_{ij}(t)]$.
3. Calcular la derivada de la función determinante

$$A : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad A(t) = \begin{vmatrix} \sin t & \sqrt{t} \\ \log t & 1/t \end{vmatrix}.$$

SOLUCIÓN. 1. Por definición,

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\det A(t+h) - \det A(t)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\det \left[F_1(t+h), \ldots, F_n(t+h)\right] - \det \left[F_1(t), \ldots, F_n(t)\right]}{h}.$$

Sumando y restando $\det \left[F_1(t), F_2(t+h), \ldots, F_n(t+h)\right]$,

$$\frac{d}{dt} \det A(t)$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\det \left[F_1(t+h), F_2(t+h), \ldots, F_n(t+h)\right] - \det \left[F_1(t), F_2(t+h), \ldots, F_n(t+h)\right]}{h}$$
$$+ \lim_{h \to 0} \frac{\det \left[F_1(t), F_2(t+h), \ldots, F_n(t+h)\right] - \det \left[F_1(t), \ldots, F_n(t)\right]}{h}.$$

$$\frac{d}{dt} \det A(t)$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\det \left[F_1(t+h), F_2(t+h), \ldots, F_n(t+h)\right] - \det \left[F_1(t), F_2(t+h), \ldots, F_n(t+h)\right]}{h}$$
$$+ \lim_{h \to 0} \frac{\det \left[F_1(t), F_2(t+h), \ldots, F_n(t+h)\right] - \det \left[F_1(t), \ldots, F_n(t)\right]}{h}.$$

El primer sumando es

$$\det \left(\lim_{h \to 0} \frac{F_1(t+h) - F_1(t)}{h}, \ \lim_{h \to 0} F_2(t+h), \ldots, \ \lim_{h \to 0} F_n(t+h) \right)$$
$$= \det \left[F_1'(t), F_2(t), \ldots, F_n(t)\right].$$

Ahora, sumamos y restamos al segundo sumando

$$\det \left[F_1(t), \ F_2(t), \ F_3(t+h), \ldots, \ F_n(t+h)\right],$$

obteniendo el sumando

$$\det\left[F_1(t),\ F_2'(t),\ F_3(t),\ \ldots,\ F_n(t)\right].$$

Podemos reiterar el proceso hasta obtener

$$\det\left[F_1(t), F_2(t), \ldots, F_{n-1}(t), F_n'(t)\right].$$

2. Tenemos

$$\det A(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \ldots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \ldots & f_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \ldots & f_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

por tanto la fórmula del apartado anterior se puede escribir en la forma

$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \begin{vmatrix} f_{11}'(t) & f_{12}(t) & \ldots & f_{1n}(t) \\ f_{21}'(t) & f_{22}(t) & \ldots & f_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{n1}'(t) & f_{n2}(t) & \ldots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}'(t) & \ldots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}'(t) & \ldots & f_{2n}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}'(t) & \ldots & f_{nn}(t) \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \ldots & f_{1n}'(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \ldots & f_{2n}'(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \ldots & f_{nn}'(t) \end{vmatrix}.$$

3. Usando la fórmula del apartado anterior,

$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sqrt{t} \\ 1/t & 1/t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin t & 1/(2\sqrt{t}) \\ \log t & -1/t^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{t}(\cos t - \sqrt{t}) - \frac{\sin t}{t^2} - \frac{\log t}{2\sqrt{t}}.$$

□

83. Cambio de referencia en el espacio afín

1. Sean $\mathcal{R} = \{O, B\}$ y $\mathcal{R}' = \{O', B'\}$ dos referencias en un espacio afín $\mathbb{A}$ de dimensión n. Demostrar que se verifica

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & p_{11} & \ldots & p_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & p_{1n} & \ldots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \qquad (*)$$

en donde,
$(x_1, \ldots, x_n)^T$ son las coordenadas de $M \in \mathbb{A}$ en la referencia $\mathcal{R}$,
$(x_1', \ldots, x_n')^T$ las coordenadas del mismo M en la referencia $\mathcal{R}'$,
$(a_1, \ldots, a_n)^T$ son las coordenadas de O en la referencia $\mathcal{R}$,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{1n} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$ es la matriz de cambio de B a B'.

A la ecuación $(*)$ se la llama *ecuación matricial del cambio de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.*

2. En un espacio afín $\mathbb{A}$ de dimensión 2 se consideran las referencias afines $\mathcal{R} = \{O, e_1, e_2\}$ y $\mathcal{R}' = \{O', e_1', e_2'\}$ tales que el vector de coordenadas de O' en $\mathcal{R}$ es $(2, -3)^T$ y además

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + 4e_2 \\ e_2' = 3e_1 - e_2. \end{cases}$$

Escribir la ecuación matricial del cambio de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ y hallar la ecuación de una recta r en la referencia $\mathcal{R}'$, cuya ecuación en la referencia $\mathcal{R}$ es $2x_1 - x_2 = 5$.

SOLUCIÓN. 1. Para todo $M \in \mathbb{A}$ se verifica

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \qquad (1)$$

Sean $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, $B' = \{e_1', \dots, e_n'\}$. Por definición de coordenadas en una referencia afín y usando (1),

$$x_1e_1 + \dots + x_ne_n = a_1e_1 + \dots + a_ne_n + x_1'e_1' + \dots + x_n'e_n'. \qquad (2)$$

La relación entre las bases B y B' es

$$\begin{cases} e_1' = p_{11}e_1 + \dots + p_{1n}e_n \\ \qquad \dots \\ e_n' = p_{n1}e_1 + \dots + p_{nn}e_n. \end{cases}$$

Sustituyendo en (2) obtenemos

$$x_1e_1 + \dots + x_ne_n = a_1e_1 + \dots + a_ne_n$$
$$+x_1'(p_{11}e_1 + \dots + p_{1n}e_n) + \dots + x_n'(p_{n1}e_1 + \dots + p_{nn}e_n).$$

Igualando coordenadas,

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + p_{11}x_1' + \dots + x_n'p_{n1} \\ \qquad \dots \\ x_n = a_n + p_{1n}x_1' + \dots + x_n'p_{nn}, \end{cases}$$

relaciones que equivalen a la igualdad matricial $(*)$.

2. Según el apartado anterior, la ecuación matricial del cambio de referencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{bmatrix},$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_1' + 3x_2' \\ x_2 = -3 + 4x_1' - x_2'. \end{cases}$$

Sustituyendo en $2x_1 - x_2 = 5$ obtenemos $2(2+x_1'+3x_2')-(-3+4x_1'-x_2') = 5$ o equivalentemente $-2x_1' + 7x_2' + 2 = 0$, que es la ecuación pedida. $\square$

84. Cardinales infinitos: elementos no regulares

1. Se consideran los conjuntos $X = \{a\}$, $Y = \{b, c\}$, $\mathbb{N}$ y los cardinales

$$x = |X|\,,\ y = |Y|\,,\ z = |\mathbb{N}|\,.$$

Demostrar que la aplicación $f : X \times \mathbb{N} \to Y \times \mathbb{N}$

$$f(a, n) = \begin{cases} (b, p) & \text{si} \quad n = 2p \text{ es par} \\ (c, p) & \text{si} \quad n = 2p + 1 \text{ es impar} \end{cases}$$

es biyectiva. Concluir que z no es elemento regular para el producto.
2. Demostrar que la aplicación

$$f : \mathbb{N} \times \{0, 1\} \to \mathbb{N}, \quad f(n, u) = \begin{cases} 2n & \text{si} \quad u = 0 \\ 2n + 1 & \text{si} \quad u = 1 \end{cases}$$

es biyectiva. Concluir que existen cardinales infinitos no regulares para la suma.

Solución. 1. *Inyectiva.* Si n_1 y n_2 son naturales de distinta paridad, claramente no puede ocurrir $f(a, n_1) = f(a, n_2)$ pues $b \neq c$. Si $n_1 = 2p_1$ y $n_2 = 2p_2$ son pares,

$$f(a, n_1) = f(a, n_2) \Rightarrow (b, p_1) = (b, p_2) \Rightarrow p_1 = p_2$$

$$\Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow (a, n_1) = (a, n_2).$$

Análogo razonamiento si n_1 y n_2 son impares.
Sobreyectiva. Todo elemento de $Y \times \mathbb{N}$ es de la forma (b, n) o (c, n) con n natural. Pero

$$(b, n) = f(a, 2n), \quad (c, n) = f(a, 2n + 1),$$

luego f es sobreyectiva. Tenemos pues que

$$xz = |X \times \mathbb{N}| = |Y \times \mathbb{N}| = yz$$

y sin embargo $x \neq y$, lo cual prueba que z es cardinal infinito y no regular para el producto.

2. *Inyectiva.* Sean (n_1, u_1) y (n_2, u_2) elementos de $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Si $u_1 \neq u_2$, claramente $f(n_1, u_1) \neq f(n_2, u_2)$. Si $u_1 = u_2 = 0$,

$$f(n_1, u_1) = f(n_2, u_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow (n_1, u_1) = (n_2, u_2).$$

Análogo razonamiento si $u_1 = u_2 = 1$.
Sobreyectiva. Si $m \in \mathbb{N}$, o bien $m = 2n$, o bien $m = 2n + 1$ para algún n. Pero

$$m = 2n = f(n, 0), \quad m = 2n + 1 = f(n, 1)$$

luego f es sobreyectiva.
Llamemos $x = |\mathbb{N}|$. Dado que

$$x = |\mathbb{N} \times \{0\}| = |\mathbb{N} \times \{1\}|, \quad (\mathbb{N} \times \{0\}) \cap (\mathbb{N} \times \{1\}) = \emptyset,$$

podemos escribir

$$x + x = |(\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times \{1\})| = |\mathbb{N} \times \{0, 1\}| \underbrace{=}_{f \text{ biyectiva}} x.$$

Es decir, tenemos $x + x = x + 0$ y $x \neq 0$ lo cual implica que x es cardinal infinito y no regular para la suma. □

85. Distancia de un plano y de una curva al origen

Usando técnicas de cálculo diferencial,
1. Calcular la mínima distancia del plano $\alpha : 2x - y + 2z = 2$ al origen y el punto en el que dicha distancia mínima se obtiene.
2. Calcular la mínima distancia del conjunto

$$A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, \ x + y + z = 1\}$$

al origen y el punto en el que dicha distancia mínima se obtiene.

SOLUCIÓN. 1. Todo punto P del plano α se puede expresar en la forma $P = (\lambda, 2\lambda + 2\mu - 2, \mu)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La función cuadrado de la distancia de P al origen O es

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(\lambda, \mu) = d^2(P, O) = \lambda^2 + (2\lambda + 2\mu - 2)^2 + \mu^2.$$

Hallemos los puntos críticos de f.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \mu} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + 2(2\lambda + 2\mu - 2) \cdot 2 = 0 \\ 2(2\lambda + 2\mu - 2) \cdot 2 + 2\mu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10\lambda + 8\mu = 8 \\ 8\lambda + 10\mu = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\lambda + 4\mu = 4 \\ 4\lambda + 5\mu = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 4/9 \\ \mu = 4/9. \end{cases}$$

Por consideraciones geométricas, en $(\lambda, \mu) = (4/9, 4/9)$ obtenemos mínimo absoluto para la función f y por tanto para la función $d(P, O)$. Sustituyendo obtenemos el punto $P_0 = (4/9, -2/9, 4/9)$ del plano α para el cual la distancia al origen es mínima, siendo esta distancia

$$d(P_0, O) = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{-2}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

2. Los puntos (x, y) del plano que satisfacen la condición $x^2 + y^2 = 1$, son exactamente los de la forma $(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, luego los puntos Q de A son los de la forma

$$Q = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t) \text{ con } t \in [0, 2\pi].$$

La función cuadrado de la distancia de Q al origen O es

$$g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad g(t) = d^2(Q, O) = \cos^2 t + \sin^2 t + (1 - \sin t - \cos t)^2$$

$$= 1 + 1 + \sin^2 t + \cos^2 t - 2\sin t - 2\cos t + 2\sin t \cos t$$

$$= 3 - 2\sin t - 2\cos t + \sin 2t.$$

Hallemos los puntos críticos de g. Tenemos

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow -2\cos t + 2\sin t + 2\cos 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cos t + \sin t + \cos^2 t - \sin^2 t = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cos t + \sin t + (\cos t + \sin t)(\cos t - \sin t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t - \sin t = 0 \\ \qquad \vee \\ \cos t + \sin t - 1 = 0. \end{cases}$$

Por una parte tenemos en $[0, 2\pi]$:

$$\cos t - \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t = \cos t \Leftrightarrow t = \pi/4 \ \vee \ t = 5\pi/4.$$

Por otra parte es claro que la condición $\cos t + \sin t = 1$ se verifica exclusivamente en $[0, 2\pi]$ para $t = 0$, o $t = \pi/2$ o $t = 2\pi$. Hallemos los valores de g en los puntos críticos del interior de $[0, 2\pi]$ y en los extremos:

$$g(\pi/4) = 3 - 2\sin(\pi/4) - 2\cos(\pi/4) + \sin(\pi/2) = 3 - 2\sqrt{2} + 1 = 4 - 2\sqrt{2},$$

$$g(5\pi/4) = 3 - 2\sin(5\pi/4) - 2\cos(5\pi/4) + \sin(5\pi/2) = 3 + 2\sqrt{2} + 1 = 4 + 2\sqrt{2},$$

$$g(\pi/2) = 3 - 2\sin(\pi/2) - 2\cos(\pi/2) + \sin \pi = 3 - 2 - 0 + 0 = 1,$$

$$g(0) = 3 - 2\sin 0 - 2\cos 0 + \sin 0 = 3 = g(2\pi).$$

El mínimo absoluto de g se obtiene por tanto en $t = \pi/4$. Sustituyendo, obtenemos el punto Q_0 de A para el cual el cuadrado de la distancia al origen es mínima

$$Q_0 = \left(\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}, 1 - \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}\right) = (0{,}1,0),$$

y la distancia mínima es $d(Q_0, O) = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$. $\square$

86. Grupo de Klein y sus automorfismos

Se considera el grupo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$.
(a) Demostrar que el simétrico de cada elemento coincide con el propio elemento.
(b) Demostrar que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ no es cíclico.
(c) Denotemos $K = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $e = (0,0)$, $a = (1,0)$, $b = (0,1)$, $c = (1,1)$. Escribir la tabla de K con notación multiplicativa. Al grupo $(K, \cdot)$ se le llama *grupo de Klein.*
Nota. Por supuesto que no hay diferencia entre $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ y $(K, \cdot)$ salvo la notación.
(d) Determinar todos los automorfismos del grupo de Klein.

SOLUCIÓN. (a) Tenemos $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ y se cumple

$$(0,0) + (0,0) = (0,0), \quad (1,0) + (1,0) = (0,0),$$

$$(0,1) + (0,1) = (0,0), \quad (1,1) + (1,1) = (1,1),$$

lo cual implica que

$$-(0,0) = (0,0),\ -(1,0) = (1,0),\ -(0,1) = (0,1),\ -(1,1) = (1,1),$$

es decir el simétrico de cada elemento coincide con el propio elemento.

(b) El elemento neutro es de orden 1 y se cumple

$$(1,0) + (1,0) = (0,0),\ (0,1) + (0,1) = (0,0),\ (1,1) + (1,1) = (0,0)$$

es decir, los restantes elementos son de orden 2, por tanto $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ no es cíclico.

(c) La tabla de Cayley de $(K, +)$ es

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(d) Si $f : K \to K$ es automorfismo necesariamente $f(e) = e$ y al ser

$$\{a, b, c\} = \{f(a), f(a), f(c)\}$$

tenemos 6 posibles elecciones: las permutaciones de $\mathcal{S}_3$. Por ejemplo, para la permutación

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

obtenemos el posible automorfismo

$$f(e) = e, \quad f(a) = a, \quad f(b) = c, \quad f(c) = b,$$

es fácil verificar $f(xy) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in K$ y lo mismo para cada permutación de $\mathcal{S}_3$. En consecuencia, el grupo de los automorfismos del grupo de Klein $\operatorname{Aut}(K)$, es isomorfo al grupo simétrico $\mathcal{S}_3$. $\square$

87. Singularidades y residuos de $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}$

Se considera la función

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}.$$

Determinar sus singularidades, clasificarlas y hallar sus residuos.

solución. La función no es analítica para $z^3 + z^2 - z - 1 = 0$. Descomponiendo obtenemos $(z+1)^2(z-1) = 0$, con lo cual los puntos singulares son $z = 1$ y $z = -1$. Entonces,

$$\lim_{z\to 1} f(z) = \frac{\sin 1}{0} = \infty, \quad \lim_{z\to -1} f(z) = \frac{\sin(-1)}{0} = \infty,$$

por tanto son polos. Hallemos sus órdenes,

$$\lim_{z\to 1} f(z)(z-1) = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)\sin z}{(z+1)^2(z-1)} = \lim_{z\to 1} \frac{\sin z}{(z+1)^2} = \frac{\sin 1}{4} \neq 0,$$

$$\lim_{z\to -1} f(z)(z+1)^2 = \lim_{z\to -1} \frac{(z+1)^2 \sin z}{(z+1)^2(z-1)} = \lim_{z\to -1} \frac{\sin z}{z-1} = \frac{\sin(-1)}{-2} = \frac{\sin 1}{2} \neq 0,$$

por tanto $z = 1$ es polo simple y $z = -1$ es polo doble. Hallemos sus residuos:

$$\operatorname{Res}\,[f, z = 1] = \lim_{z\to 1} f(z)(z-1) = \frac{\sin 1}{4}.$$

$$\operatorname{Res}\,[f, z = -1] = \frac{1}{1!} \lim_{z\to -1} \left(f(z)(z+1)^2\right)' = \lim_{z\to -1} \left(\frac{\sin z}{z-1}\right)'$$

$$= \lim_{z\to -1} \frac{(z-1)\cos z - \sin z}{(z-1)^2} = \frac{-2\cos(-1) - \sin(-1)}{4} = \frac{\sin 1 - 2\cos 1}{4}.$$

$\square$

88. Singularidades y residuos de $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{z-1}$

Se considera la función

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z-1}.$$

Determinar sus singularidades, clasificarlas y hallar sus residuos.

solución. La función no es analítica en $z = 0$ y en $z = 1$, y estas son por tanto sus singularidades.

Caso $z = 1$. Tenemos $\lim_{z\to 1} f(z) = e/0 = \infty$, es decir $z = 1$ es un polo, y

$$\lim_{z\to 1} f(z)(z-1) = \lim_{z\to 1} e^{1/z} = e \neq 0,$$

con lo cual es polo simple y además

$$\text{Res}\,[f, z = 1] = \lim_{z\to 1} f(z)(z-1) = e.$$

Caso $z = 0$. Consideremos x real. Tenemos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x-1} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{x-1} = -\infty.$$

Es decir, no existe $\lim_{z\to 0} f(z)$, luego $z = 0$ es singularidad esencial. Para hallar el residuo de f en $z = 0$, desarrollamos f en serie de Laurent en un entorno de 0. Tenemos para $0 < |z| < 1$

$$f(z) = e^{1/z} \cdot \frac{1}{z-1} = \left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots\right)\left(-1 - z - z^2 - z^3 - \cdots\right)$$

$$= \cdots + \left(-\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \cdots\right)\frac{1}{z} + \cdots = \cdots + (1-e)\,\frac{1}{z} + \cdots ,$$

Entonces

$$\text{Res}\,[f, z = 0] = \text{coef}\,\frac{1}{z} = 1 - e.$$

□

89. Singularidad y residuo en el origen de $f(z) = \dfrac{1}{2 + z^2 - 2\cosh z}$

Usando desarrollo en serie de Laurent, clasificar la singularidad en el origen de la función

$$f(z) = \frac{1}{2 + z^2 - 2\cosh z}$$

y hallar su residuo en tal punto.

SOLUCIÓN. Claramente el denominador se anula en $z = 0$, por tanto presenta una singularidad en dicho punto. El desarrollo en serie de la función coseno hiperbólico es

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots ,$$

y por tanto, para $z \neq 0$,

$$f(z) = \frac{1}{2 + z^2 - 2\left(1 + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \dfrac{z^6}{6!} + \cdots\right)} = \frac{1}{-\dfrac{2z^4}{4!} - \dfrac{2z^6}{6!} - \dfrac{2z^8}{8!} - \cdots}.$$

Efectuando la división según potencias crecientes obtenemos para $z \neq 0$ un desarrollo de Laurent del tipo

$$f(z) = \frac{A_{-4}}{z^4} + \frac{A_{-2}}{z^2} + A_0 + A_2 z^2 + \cdots \quad (A_{-4} \neq 0).$$

En consecuencia, la singularidad de f en el origen es un polo cuádruple y su residuo es

$$\text{Res}\,[f, z = 0] = \text{coef}\,\frac{1}{z} = 0.$$

□

90. Integral $\int_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta}$

Demostrar que para a,b,c reales positivos con $a^2>b^2+c^2$ se verifica

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}.$$

solución. Efectuando el cambio $z=e^{i\theta}$ obtenemos

$$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta,$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+1/z}{2}=\frac{z^2+1}{2z},$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z-1/z}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}.$$

Cuando θ recorre $[0,2\pi]$, z recorre la circunferencia $|z|=1$ en sentido antihorario, por tanto

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta+c\sin\theta}=\int_{|z|=1}\frac{dz/iz}{a+b\dfrac{z^2+1}{2z}+c\dfrac{z^2-1}{2iz}}$$

$$=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz/z}{\dfrac{2aiz+bi(z^2+1)+c(z^2+1)}{2iz}}=2\int_{|z|=1}\frac{dz}{(c+bi)z^2+2aiz+bi-c}.$$

Los puntos singulares de la función integrando f son los que anulan al denominador:

$$(c+bi)z^2+2aiz+bi-c=0\Leftrightarrow z=\frac{-2ai\pm\sqrt{-4a^2-4(c+bi)(bi-c)}}{2(c+bi)}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-2ai\pm\sqrt{-4a^2+4(b^2+c^2)}}{2(c+bi)}\Leftrightarrow z=\frac{-2ai\pm\sqrt{4(b^2+c^2-a^2)}}{2(c+bi)}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-2ai\pm 2i\sqrt{a^2-b^2-c^2}}{2(c+bi)}\Leftrightarrow z=\frac{(-a\pm\sqrt{a^2-b^2-c^2})i}{c+bi}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-b^2-c^2}}{b-ci}.$$

Los puntos singulares (polos simples) son por tanto:

$$z_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2-c^2}}{b-ci},\quad z_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-b^2-c^2}}{b-ci}.$$

Veamos si pertenecen al interior geométrico de $|z|=1$:

$$|z_1|<1\Leftrightarrow\frac{\left|-a+\sqrt{a^2-b^2-c^2}\right|}{|b-ci|}<1\Leftrightarrow\frac{a-\sqrt{a^2-b^2-c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}<1$$

$$\Leftrightarrow a<\sqrt{a^2-b^2-c^2}+\sqrt{b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 < a^2 - b^2 - c^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}\sqrt{b^2 + c^2}$$
$$\Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}\sqrt{b^2 + c^2},$$

y la última desigualdad es trivial. Por otra parte,

$$|z_2| > 1 \Leftrightarrow \frac{\left|-a - \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}\right|}{|b - ci|} > 1 \Leftrightarrow \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}} > 1$$
$$\Leftrightarrow a > \sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{a^2 - b^2 - c^2}$$
$$\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2 + a^2 - b^2 - c^2 - 2\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}\sqrt{b^2 + c^2}$$
$$\Leftrightarrow 0 > -2\sqrt{b^2 + c^2}\sqrt{a^2 - b^2 - c^2},$$

y la última desigualdad es trivial. El único polo en el interior geométrico de $|z| = 1$ es por tanto z_1 con lo cual

$$I = 2\int_{|z|=1} \frac{dz}{(c + bi)z^2 + 2aiz + bi - c} = 4\pi i \text{Res}\,[f, z = z_1].$$

Ahora bien,

$$\text{Res}\,[f, z = z_1] = \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_1}{(c + bi)(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{(c + bi)} \lim_{z \to z_1} \frac{1}{z_1 - z_2}$$
$$= \frac{1}{(c + bi)} \cdot \frac{1}{\dfrac{2\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}{b - ci}} = \frac{1}{2i\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}.$$

Entonces,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta + c\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}.$$

□

91. Suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$

Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$.

(a) Demostrar que es convergente.

(b) Hallar su suma.

SOLUCIÓN. □

(a) La serie es de términos positivos. Aplicando el criterio de D'Alembert

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n + 1}{2^{n+1}(n + 2)} : \frac{2^n(n + 1)}{n} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n + 2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1,$$

por tanto la serie es convergente.

(b) Consideremos la función

$$f:(-1,1)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n.$$

Se comprueba inmediatamente por el criterio de D'Alembert que la serie funcional anterior es absolutamente convergente para $|x|<1$, y por tanto f está bien definida. La suma de la serie pedida será por tanto

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}=f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Podemos escribir para $x\in(-1,1)$ y no nulo:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=\frac{1}{1-x}-1-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Llamemos

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Aplicando el criterio de D'Alembert verificamos inmediatamente que g está definida en $(-1,1)$ y al venir dada por una serie de potencias se puede derivar término a término:

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1.$$

Integrando, $g(x)=-\log|1-x|-x+C$. Para $x=0$ obtenemos $0=g(0)=\log 1-0+C$, con lo cual, $C=0$. Queda para $x\in(-1,1)$ y no nulo

$$f(x)=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}(-\log|1-x|-x).$$

Entonces,

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}=f\left(\frac{1}{2}\right)=1-2\left(-\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=2(1-\log 2).$$

92. Cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{5},i)$

Denominemos por $\mathbb{Q}(\sqrt{5},i)$ al menor subcuerpo de $\mathbb{C}$ que contiene a $\mathbb{Q}\cup\{\sqrt{5},i\}$. Demostrar que

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5},i)=\{p+qi+r\sqrt{5}+s\sqrt{5}i:\ p,q,r,s\in\mathbb{Q}\}.$$

SOLUCIÓN. Denominemos por K al cuerpo pedido. Necesariamente K ha de contener a 1, $\sqrt{5}$, i, $\sqrt{5}i$. Como también ha de contener a los racionales, necesariamente,

$$K \supset K' = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha = p + qi + r\sqrt{5} + s\sqrt{5}i \text{ con } p, q, r, s \in \mathbb{Q}\}.$$

Si demostramos que K' es cuerpo estará demostrado que $K' = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$. Efectivamente,

1. Veamos que K' es subanillo de $\mathbb{C}$. (a) $\alpha = 0 + 0i + 0\sqrt{5} + 0\sqrt{5}i \in K'$, por tanto $K' \neq \emptyset$. (b) Para todo $\alpha = p + qi + r\sqrt{5} + s\sqrt{5}i$ y $\alpha' = p' + q'i + r'\sqrt{5} + s'\sqrt{5}i$ tenemos

$$\alpha - \alpha' = (p - p') + (q - q')i + (r - r')\sqrt{5} + (s - s')\sqrt{5}i$$

con $p - p', q - q', r - r', s - s'$ racionales, por tanto $\alpha - \alpha' \in K'$. (c) Para todo $\alpha = p + qi + r\sqrt{5} + s\sqrt{5}i$ y $\alpha' = p' + q'i + r'\sqrt{5} + s'\sqrt{5}i$ tenemos

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' &= (p + qi + r\sqrt{5} + s\sqrt{5}i)(p' + q'i + r'\sqrt{5} + s'\sqrt{5}i) \\ &= (pp' - qq' + 5rr' - 5ss') \cdot 1 + (p'q + pq' + 5sr' + 5rs')i \\ &\quad + (p'r - sq' + pr' - qs')\sqrt{5} + (p's + rq' + qr' + ps')\sqrt{5}i, \end{aligned}$$

y los coeficientes de 1, i, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}i$ son racionales, por tanto $\alpha\alpha' \in K'$.

2. Veamos que todo $\alpha = p + qi + r\sqrt{5} + s\sqrt{5}i \in K'$ no nulo tiene inverso en K'. Para ello, probemos previamente que

$$\alpha = 0 \Leftrightarrow (p, q, r, s) = (0, 0, 0, 0).$$

$\Leftarrow$) Esta implicación es trivial.
$\Rightarrow$) Tenemos igualando partes reales e imaginarias

$$\begin{aligned} p + qi + r\sqrt{5} + s\sqrt{5}i = 0 &\Rightarrow (p + r\sqrt{5}) + (q + s\sqrt{5})i = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} p + r\sqrt{5} = 0 \\ q + s\sqrt{5} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Si $r = 0$, entonces $p = 0$. Si $r \neq 0$ tendríamos $\sqrt{5} = -p/r$ lo cual es absurdo pues $\sqrt{5}$ es irracional. Concluimos que $p = r = 0$. De manera análoga se demuestra que $q = s = 0$.

Sea $0 \neq \alpha \in K'$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{(p + r\sqrt{5}) + (q + s\sqrt{5})i} = \frac{(p + r\sqrt{5}) - (q + s\sqrt{5})i}{(p + r\sqrt{5})^2 + (q + s\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{p + r\sqrt{5} - qi - s\sqrt{5}i}{\underbrace{(p^2 + q^2 + 5r^2 + 5s^2)}_{x} + \underbrace{2(pr + qs)}_{y}\sqrt{5}} \\ &= \frac{(p + r\sqrt{5} - qi - s\sqrt{5}i)(x - y\sqrt{5})}{x^2 - 5y^2}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Tenemos que $x,y\in\mathbb{Q}$ y dado que $(p,q,r,s)\neq(0,0,0,0)$, se verifica $x^2\neq 0$. No puede ser $x^2-5y^2=0$, pues en tal caso, $x^2=5y^2\neq 0$ y $x/y=\sqrt{5}$ lo cual es absurdo al ser $\sqrt{5}$ irracional. Es claro que operando y agrupando en (1), obtenemos que $1/\alpha$ es de la forma

$$\frac{1}{\alpha}=A+Bi+C\sqrt{5}+D\sqrt{5}i \text{ con } A,B,C,Q\in\mathbb{Q}$$

lo cual demuestra que $1/\alpha\in K'$. □

93. Puntos de inflexión de una familia de curvas

Sea el conjunto de funciones $f_a(x)=\dfrac{x^3+a}{(x+1)^2}$, donde $a\in\mathbb{R}-\{1\}$.

(a) Determinar las funciones de este conjunto cuya representación gráfica admite un punto de inflexión en el cual la tangente es paralela al eje de abscisas.

(b) Probar que todas las funciones de este conjunto tienen una asíntota oblicua común, de la cual se pide la ecuación.

Solución. (a) Hallemos la derivada segunda de f_a. Para todo $x\neq -1$:

$$f_a'(x)=\frac{3x^2(x+1)^2-2(x+1)(x^3+a)}{(x+1)^4}=\frac{3x^2(x+1)-2(x^3+a)}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{x^3+3x^2-2a}{(x+1)^3},$$
$$f_a''(x)=\frac{(3x^2+6x)(x+1)^3-3(x+1)^2(x^3+3x^2-2a)}{(x+1)^6}$$
$$=\frac{(3x^2+6x)(x+1)-3(x^3+3x^2-2a)}{(x+1)^4}=\frac{6(x-a)}{(x+1)^4}.$$

Los posibles puntos de inflexión se obtienen para los x tales que $f_a''(x)=0$ es decir para $x=-a$ con $a\neq 1$. Para valores $x<-a$ suficientemente próximos a a, claramente $f_a''(x)<0$ y para valores $x>-a$ suficientemente próximos a a, claramente $f_a''(x)>0$. Cambia la concavidad, en consecuencia en $x=-a$ con $a\neq 1$ hay punto de inflexión para f_a. En estos puntos de inflexión la tangente es paralela al eje de abscisas sii $f_a'(-a)=0$. Entonces,

$$f_a'(-a)=0\Leftrightarrow\frac{-a^3+3a^2-2a}{(-a+1)^3}=0\Leftrightarrow\frac{-a(a-1)(a-2)}{(-a+1)^3}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{a(a-2)}{(-a+1)^2}=0\underbrace{\Leftrightarrow}_{a\neq 1}a(a-2)\Leftrightarrow a=0\ \vee\ a=2.$$

Las funciones pedidas son por tanto f_0 y f_2.

(b) Para todo $a\in\mathbb{R}-\{1\}$,

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f_a(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+a}{x(x+1)^2}=1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f_a(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+a}{(x+1)^2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2 - x + a}{(x+1)^2} = -2,$$

por tanto $y = x - 2$ es asíntota oblicua de f_a para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$. $\square$

94. Menor subanillo que contiene a un conjunto

Sean R un anillo y $\mathcal{F}$ una familia de subanillos de R.
1. Demostrar que $R_1 = \bigcap_{S\in\mathcal{F}} S$ es subanillo de R.
2. Sea G un subconjunto de R y denotemos

$$R[G] = \bigcap_{S\in\mathcal{C}} \text{ con } \mathcal{C} = \{S \text{ subanillo de } R : G \subset S\}.$$

Demostrar que $R[G]$ es el menor subanillo de R respecto de la inclusión que contiene a G.
3. Demostrar que $R[G]$ está constituido por todos los elementos de R que son sumas finitas de productos finitos de elementos de $G \cup (-G)$.

SOLUCIÓN. **1**. Usamos el teorema de caracterización de subanillos. Como $0 \in S$ para todo $S \in \mathcal{F}$ deducimos que $0 \in R_1$ y por tanto $R_1 \neq \emptyset$. Si $a, b \in R_1$ entonces $a, b \in S$ para todo $S \in \mathcal{F}$ y por tanto $a - b \in S$ para todo $S \in \mathcal{F}$ por ser S subanillo. Es decir, $a - b \in R_1$. Análogamente, si $a, b \in R_1$ entonces $a, b \in S$ para todo $S \in \mathcal{F}$ y por tanto $ab \in S$ para todo $S \in \mathcal{F}$ por ser S subanillo. Es decir, $ab \in R_1$.

2. Por el apartado anterior, $R[G]$ es subanillo de R. Como $G \subset S$ para todo $S \in \mathcal{C}$, tenemos $G \subset \bigcap_{S\in\mathcal{C}} = R[G]$. Por otra parte, si T es un subanillo de R que contiene a G entonces $T \in \mathcal{C}$ y por tanto $R[G] = \bigcap_{S\in\mathcal{C}} S \subset T$. La propiedad queda demostrada.

3. Llamemos X al conjunto de los elementos de R que son sumas finitas de productos finitos de elementos de $G \cup (-G)$ y veamos primeramente que X es subanillo de R contiene a G. Es claro que $G \subset X$ pues si $x \in G$, x es suma finita de productos finitos de elementos de $G \cup (-G)$ (un sumando y un factor: el x).
X es subanillo de R. En efecto, 0 es (según un conocido convenio) una suma vacía y por tanto pertenece a P es decir, $P \neq \emptyset$. Denotemos $G\cup(-G) = \{g_i\}$ y sean $a, b \in X$, entonces

$$a = \sum_{\text{finita}} \left(\prod_{\text{finito}} g_i \right),\; b = \sum_{\text{finita}} \left(\prod_{\text{finito}} g'_j \right) \text{ con } g_i, g'_j \in G \cup (-G),$$

$$a - b = \sum_{\text{finita}} \left(\prod_{\text{finito}} g_i \right) - \sum_{\text{finita}} \left(\prod_{\text{finito}} g'_j \right)$$

Si $g_1,\dots,g_m\in G\cup(-G)$ tenemos $-(g_1g_2\dots g_m=(-g_1)g_2\dots g_m\in G\cup(-G)$. Por tanto

$$a-b=\sum_{\text{finita}}\left(\prod_{\text{finito}} g_i\right)+\sum_{\text{finita}}\left(\prod_{\text{finito}} g_j''\right)\ \text{con } g_i,g_j'\in G\cup(-G)$$

y por ser $a-b$ suma finita de productos finitos de $G\cup(-G)$, pertenece a X. Es claro que al aplicar la propiedad distributiva de R, ab es suma finita de productos finitos de $G\cup(-G)$ y por tanto pertenece a X.
Como $R[G]\subset X$ (por el apartado anterior), basta demostrar que $X\subset R[G]$. Pero esto es claro pues al ser $G\subset X$ y $G\subset R[G]$ (subanillo), el producto finito de elementos de G está en $R[G]$ y la suma finita de elementos de G también está en $R[G]$. □

95. Ecuación diferencial transformable en exacta por simplificación

Resolver la ecuación diferencial $(xy+y\log y)dx+(xy+x\log x)dy=0$.

SOLUCIÓN. Fácilmente comprobamos que la ecuación no es diferencial exacta, ahora bien dividiendo entre xy obtenemos la ecuación

$$\left(1+\frac{\log y}{x}\right)dx+\left(1+\frac{\log x}{y}\right)dy=0.$$

Se verifica $P_y=Q_x=1/(xy)$ y por tanto al ecuación se transforma en una diferencial exacta. Busquemos u tal que $u_x=P$ y $u_y=Q$. Tenemos

$$u_x=P\Rightarrow u=\int Pdx=\int\left(1+\frac{\log y}{x}\right)dx=x+(\log y)(\log x)+\varphi(y).$$

Usando $u_y=Q$:

$$1+\frac{\log x}{y}+\varphi'(y)=\frac{\log x}{y}\Rightarrow\varphi'(y)=0\Rightarrow\varphi(y)=y+C.$$

La solución general es por tanto

$$y+x+(\log y)(\log x)+C=0.$$

□

96. Sensibilidad a condiciones iniciales en métricas equivalentes

Sea (X,d) un espacio métrico sin puntos aislados. Esto asegura que todo entorno de cualquier $x\in X$ contiene algún punto distinto de X. Sea $f:X\to X$ una aplicación es decir, un sistema dinámico. Se dice que f *es sensible a condiciones iniciales* si existe un $\eta>0$ tal que para todo $x\in X$ y para todo $\epsilon>0$ existe $y\in X$ con $d(x,y)<\epsilon$ tal que para algún $\mathbb{N}_0$ $d\left(f^n(x),f^n(y)\right)>\eta$. Al número η se le llama *constante de sensibilidad* del sistema.

Sea ahora $X = (1, +\infty)$.
(a) Demostrar que $D : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $D(x, y) = |\log x - \log y|$ define una distancia en X.
(b) Demostrar que D es equivalente a la distancia usual en X: $d(x, y) = |x - y|$.
(c) Demostrar que el sistema dinámico $f : (X, d) \to (X, d)$ dado por $f(x) = 2x$ es sensible a condiciones iniciales.
(d) Demostrar que el sistema dinámico $f : (X, D) \to (X, D)$ dado por $f(x) = 2x$ no es sensible a condiciones iniciales. Concluir.

SOLUCIÓN. (a) Existe $\log t$ para todo $t \in X$ y $D(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$. Tenemos $D(x, y) = 0 \Leftrightarrow |\log x - \log y| = 0 \Leftrightarrow \log x = \log y \Leftrightarrow x = y$. Para todo $x, y \in X$ se verifica $D(x, y) = |\log x - \log y| = |\log y - \log x| = D(x, y)$. Por último, para todo $x, y, z \in X$ tenemos

$$D(x, y) = |(\log x - \log z) + (\log z - \log y)|$$
$$\leq |\log x - \log z| + |\log z - \log y| = D(x, z) + D(z, y).$$

Concluimos que D es distancia en X.

(b) Consideremos una bola $B_D(x, \epsilon) = \{y \in X : |\log x - \log y| < \epsilon\}$ y veamos que existe una bola $B_d(x, \delta)$ tal que $B_d(x, \delta) \subset B_D(x, \epsilon)$. Efectivamente, por ser log una función continua en x dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo y que cumpla $|x - y| < \delta$ se verifica $|\log x - \log y| < \epsilon$, es decir $D(x, y) < \epsilon$, luego para todo $y \in B_d(x, \delta)$ es $y \in B_D(x, \epsilon)$.

Recíprocamente, consideremos una bola $B_d(x, \epsilon)$ y veamos que existe una bola $B_D(x, \delta)$ tal que $B_D(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$. Efectivamente, como la función exponencial es continua dado un $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\log y$ cumple $|\log x - \log y| < \delta$ entonces $\left|e^{\log x} - e^{\log y}\right| = |x - y| < \epsilon$, es decir $d(x, y) < \epsilon$ siempre que $D(x, y) < \delta$ luego $B_D(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$.

(c) Para todo $x, y \in X$ tenemos

$$d\left(f^n(x), f^n(y)\right) = |2^n x - 2^n y| = 2^n |x - y| \underbrace{\to}_{\text{si } x \neq y} +\infty$$

lo cual implica claramente que f es sensible a condiciones iniciales.

(d) Para todo $x, y \in X$ tenemos

$$D\left(f^n(x), f^n(y)\right) = |\log\left(2^n x\right) - \log\left(2^n y\right)|$$
$$= \left|\log \frac{2^n x}{2^n y}\right| = |\log x - \log y| = D(x, y)$$

lo cual implica claramente que f no es sensible a condiciones iniciales. Concluimos por tanto que la sensibilidad a condiciones iniciales no se conserva necesariamente por métricas equivalentes. $\square$

97. Factorización en $\mathbb{C}[x]$ de $p(x) = (x+1)^n + (x-1)^n$

Descomponer $p(x) = (x+1)^n + (x-1)^n \in \mathbb{C}[x]$ en factores lineales.

SOLUCIÓN. Hallemos las raíces complejas de $p(x)$. Tenemos

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^n + (x-1)^n = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = \sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{e^{\pi i}} = e^{\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i} = z_k, \ (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Despejando x obtenemos las raíces

$$x_k = \frac{z_k + 1}{z_k - 1} = \frac{e^{\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i} + 1}{e^{\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)i} - 1}.$$

Llamando $\alpha = \pi/n + 2k\pi/n$ tenemos

$$x_k = \frac{e^{\alpha i} + 1}{e^{\alpha i} - 1} = \frac{e^{(-\alpha/2)i}}{e^{(-\alpha/2)i}} \cdot \frac{e^{\alpha i} + 1}{e^{\alpha i} - 1} = \frac{e^{(\alpha/2)i} + e^{(-\alpha/2)i}}{e^{(\alpha/2)i} - e^{(-\alpha/2)i}}.$$

Por otra parte

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{e^{(\alpha/2)i} + e^{(-\alpha/2)i}}{2} : \frac{e^{(\alpha/2)i} - e^{(-\alpha/2)i}}{2i}$$

$$\Rightarrow x_k = \frac{1}{i}\cot\frac{\alpha}{2} = -i\cot\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = - - i\cot\frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

Teniendo en cuenta que el coeficiente de mayor grado de $p(x)$ es 2 queda

$$p(x) = (x+1)^n + (x-1)^n = 2\prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k)$$

Es decir,

$$\boxed{(x+1)^n + (x-1)^n = 2\prod_{k=0}^{n-1}\left(x + i\cot\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$$

$\square$

98. Grupos topológicos

Sea $(G, \cdot)$ un grupo y T una topología definida en G. Decimos que $(G, \cdot, T)$ es un *grupo topológico* si son continuas la aplicaciones

$$G \times G \to G, \quad (x, y) \to xy$$

$$G \to G, \quad x \to x^{-1}$$

en donde en $G \times G$ se considera la topología producto. Es decir, han de ser continuas la operación del grupo y la operación inversión. Abreviadamente escribimos simplemente G para designar a un grupo topológico.

(a) Demostrar que todo grupo G es un grupo topológico con la topología discreta en G.
(b) Demostrar que todo subgrupo de un grupo topologico es un grupo topológico con respecto a la topología inducida.
(c) Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Demostrar que el grupo aditivo $(E,+)$ es grupo topológico cuando en E se considera la topología inducida por la norma.
Nota. Caso particular importante es el grupo topológico aditivo $\mathbb{R}^n$ con la topología inducida por la distancia euclídea.
(d) Sea $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ el grupo lineal de orden n, es decir

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ es invertible}\}$$

con la operación producto. Demostrar que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es grupo topológico con la topoloía inducida por la métrica

$$d(A,B) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \ A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

SOLUCIÓN. (a) Sabemos que el producto de una cantidad finita de espacios topológicos discretos es discreto en la topología producto. Esto implica trivialmente la continuidad de la aplicación operación del grupo y de la operación tomar inversos.
(b) Si H es un subgrupo de un grupo topologíco G, la restricción de la multiplicación y la inversión a H son funciones continuas y como H es un subespacio topológico con la topología inducida tenemos que es un grupo topológico.
(c) Demostremos que la aplicación $E \times E \to E$, dada por $(x,y) \to x+y$ es uniformemente continua, con lo cual será continua. En efecto, sea $\epsilon > 0$ y elijamos $\delta = \epsilon/2$. Entonces,

$$\begin{cases} \|x - x'\| < \delta \\ \|y - y'\| < \delta \end{cases} \Rightarrow \left\|(x+y) - (x'+y')\right\|$$

$$\leq \left\|x - x'\right\| + \left\|y - y'\right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Demostremos que para todo $a \in \mathbb{K}$, la función $E \to E$ dada por $x \to ax$ es uniformemente continua, con lo cual será continua en particular $x \to (-1)x = -x$. Si $a = 0$, el resultado es trivial. Si $a \neq 0$, sea $\epsilon > 0$. Entonces, eligiendo $\delta = \epsilon / |a|$:

$$\left\|x - x'\right\| < \delta \Rightarrow \left\|ax - ax'\right\| = |a| \left\|x - x'\right\| < |a| \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon.$$

Concluimos que E es grupo topológico.
(d) Podemos identificar $\mathbb{R}^{n\times n}$ con $\mathbb{R}^{n^2}$ en la forma estándar

$$\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n^2}, \quad A = [a_{ij}] \to a = (a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}),$$

con lo cual podemos considerar $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ y la distancia dada es la distancia euclidea en $\mathbb{R}^{n^2}$, es decir

$$d(a,b) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

En la operación producto ab intervienen sumas y productos de las variables a_{ij} y b_{ij} y en a^{-1}, sumas, productos e inversos de números no nulos; que con la distancia euclídea sabemos que son operaciones continuas. Concluimos que las operaciones producto e inversión son continuas en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. $\square$

99. Convergencia de una serie según parámetro

Analizar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \log\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right|^p$ según el parámetro $p \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN. Dado que $0 < 1/n < \pi/2$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, se verifica $\cos(1/n) > 0$ y por tanto la serie está bien definida. Se verifica

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} \underbrace{=}_{\text{indet. } 0/0} \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1 \Rightarrow \log x \underbrace{\sim}_{x\to 1} x - 1.$$

Tenemos por tanto

$$n \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \cos\frac{1}{n} \to 1 \Rightarrow \log\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underbrace{\sim}_{n\to+\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Por otra parte sabemos que $1 - \cos x \underbrace{\sim}_{x\to 0} x^2/2$ en consecuencia

$$\left(\cos\frac{1}{n}\right) - 1 \underbrace{\sim}_{n\to+\infty} -\frac{1}{2n^2}.$$

En consecuencia la convergencia de la serie dada equivale a la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| -\frac{1}{2n^2}\right|^p = \frac{1}{2^p} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}.$$

Por el conocido teorema de las series de Riemann, la serie es convergente sii $2p > 1$, es decir sii $p > 1/2$. $\square$

100. Límite de una sucesión recurrente aplicando el criterio de Stolz

Se considera la sucesión a_n definida como

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}. \end{cases}$$

Demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{2}$.

SOLUCIÓN. Elevando al cuadrado tenemos:

$$a_{n+1}^2=(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+a_n=a_n^2+a_n.$$

La sucesión es claramente creciente y de términos positivos, luego tiene límite $L\in(0,+\infty]$. Si L es finito, tomando límites en $a_{n+1}^2=a_n^2+a_n$ obtenemos $L^2=L^2+L$ y por tanto $L=0$, lo cual es absurdo. En consecuencia $\lim a_n=+\infty$. Por otra parte,

$$a_{n+1}^2=a_n^2+a_n\Rightarrow\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2=1+\frac{1}{a_n}\Rightarrow(\lim a_n)^2=1+0=1\Rightarrow\lim a_n=1.$$

Además

$$a_{n+1}^2=a_n^2+a_n\Rightarrow a_{n+1}^2-a_n^2=a_n\Rightarrow(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=a_n$$

$$\Rightarrow a_{n+1}-a_n=\frac{a_n}{a_{n+1}+a_n}\Rightarrow a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}+1}$$

$$\Rightarrow\lim(a_{n+1}-a_n)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Por último

$$\frac{1}{2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-n}\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Crit. Stolz}}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}.$$

□

Más fascículos en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).
E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`