MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

ÁLGEBRAS UNIFORMEMENTE DENSAS: TEOREMA DE STONE-WEIERSTRASS

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Aplicamos el teorema de Stone-Weierstrass para encontrar álgebras uniformemente densas.

Enunciado
Sea X un espacio topológico compacto y $C(X)$ el espacio vectorial de las funciones reales continuas $f : X \to \mathbb{R}$ con la norma de la convergencia uniforme
$$\|f\|_\infty = \text{máx}\,\{|f(x)| : x \in X\}\,.$$
Es claro que una sucesión f_n de $C(X)$ converge uniformemente a $f \in C(X)$ si y sólo si f_n converge a f con la norma anterior. El teorema de Stone-Weierstrass asegura que si $\mathcal{F}$ es un álgebra de $C(X)$ que separa puntos y contiene a las funciones constantes, entonces es uniformemente densa en $C(X)$ (es decir, es densa con la norma de la convergencia uniforme).

Esto, naturalmente equivale a decir que para toda función $f \in C(X)$ existe una sucesión f_n en $\mathcal{F}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente. Se pide:

1) Demostrar que el conjunto $\mathbb{R}[x]$ de las funciones polinómicas es familia uniformemente densa en $C([a,b])$. Concluir.
2) Ídem para $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y la familia $\mathcal{F} = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ de las funciones polinómicas.
3) Demostrar que el subespacio vectorial de $C[0,1]$ generado por las funciones $\{e^{nx} : n \in \mathbb{Z}\}$ es uniformemente densa en $C[0,1]$.
4) Demostrar que el teorema de Stone-Weirstrass es aplicable al intervalo $[a,b]$ con
$$\mathcal{F} = \text{Lip}\ ([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ con } f \text{ lipschitziana}\}.$$

Solución
1) Recordamos que si A y B son conjuntos y $\mathcal{F}$ es una familia de funciones de A en B, se dice que $\mathcal{F}$ separa puntos si para cada par de elementos $x, y \in A$ con $x \neq y$ existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

El intervalo $[a,b]$ es compacto, $\mathbb{R}[x]$ es un álgebra de $C([a,b])$ y contiene a las funciones constantes. Por otra parte si $\alpha, \beta \in [a,b]$ con $\alpha \neq \beta$ el polinomio $p(x) = x$ satisface $p(\alpha) \neq p(\beta)$. Por el teorema de Stone-Weierstrass $\mathbb{R}[x]$ es álgebra uniformemente densa en $C([a,b])$. Concluimos que para toda

Key words and phrases. Álgebras uniformemente densas, teorema Stone-Weierstrass.

función continua f en $[a,b]$ existe una sucesión de polinomios p_n tales que $p_n \to f$ en $[a,b]$ uniformemente.
Nota. Este caso particular del teorema de Stone-Weierstrass se conoce como *Teorema de Weierstrass.*

2) De nuevo, K es compacto por hipótesis, $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ es un álgebra de $C(K)$ y contiene a las funciones constantes. Por otra parte si $\alpha,\beta\in K$ con

$$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\neq\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n),$$

existe k tal que $\alpha_k\neq\beta_k$. Eligiendo $p(x_1,\ldots,x_n)=x_k$, obtenemos $p(\alpha)\neq p(\beta)$, i.e. $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ es familia uniformemente densa en $C(K)$.

3) El subespacio vectorial $\mathcal{F}$ generado por $\{e^{nx}:n\in\mathbb{Z}\}$ está formado por las funciones de la forma

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\lambda_1e^{n_1x}+\lambda_2e^{n_2x}+\cdots+\lambda_me^{n_mx}\quad(\lambda_i\in\mathbb{R},n_i\in\mathbb{Z}).$$

$\mathcal{F}\subset C[0,1]$ pues las funciones de $\mathcal{F}$ son continuas. Es fácil demostrar que forman un álgebra. Contiene a las funciones constantes pues $f(x)=C=Ce^{0x}\in\mathcal{F}$. Por último, si $\alpha,\beta\in[0,1]$ con $\alpha\neq\beta$ entonces, $f(x)=e^x=1e^{1x}\in\mathcal{F}$ y $f(\alpha)=e^\alpha\neq e^\beta=f(\beta)$. Concluimos que $\mathcal{F}$ es uniformemente densa en $C([0,1])$.

4) (i) Lip $[a,b]$ *es subespacio vectorial de* $C[a,b]$. En efecto, sabemos que toda función lipschitziana es uniformemente continua y por tanto continua, luego Lip $[a,b]\subset C[a,b]$. La función nula es claramente lipschitziana. Además, para todo $x,y\in[a,b]$:

$$f,g\in\text{Lip }[a,b]\Rightarrow\begin{cases}\exists k_1>0:|f(x)-f(y)|\le k_1|x-y|\\\exists k_2>0:|g(x)-g(y)|\le k_2|x-y|\end{cases}$$

$$\Rightarrow|(f+g)(x)-(f+g)(y)|=|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)|$$

$$\le|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|=(k_1+k_2)|x-y|\Rightarrow f+g\in\text{Lip }[a,b].$$

$$\lambda\in\mathbb{R},\ f\in\text{Lip }[a,b]\Rightarrow\exists k>0:|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$$

$$\Rightarrow|(\lambda f)(x)-(\lambda f)(y)|=|\lambda f(x)-\lambda f(y)|=|\lambda|\,|f(x)-f(y)|$$

$$\le k|\lambda|\,|x-y|\Rightarrow\lambda f\in\text{Lip }[a,b].$$

(ii) Lip $[a,b]$ *es subanillo de* $C[a,b]$. En efecto, $\emptyset\neq$ Lip $[a,b]\subset C[a,b]$. Además, para todo $x,y\in[a,b]$:

$$f,g\in\text{Lip }[a,b]\Rightarrow\begin{cases}\exists k_1>0:|f(x)-f(y)|\le k_1|x-y|\\\exists k_2>0:|g(x)-g(y)|\le k_2|x-y|\end{cases}$$

$$\Rightarrow|(f-g)(x)-(f-g)(y)|=|f(x)-g(x)-f(y)+g(y)|$$

$$\le|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|=(k_1+k_2)|x-y|\Rightarrow f-g\in\text{Lip }[a,b].$$

Si f,g son lispschitzianas en $[a,b]$, son continuas en $[a,b]$ y por tanto están acotadas, es decir existe $M>0$ tal que $|f|\le M$ y $|g|\le M$. Entonces,

$$f,g\in\text{Lip }[a,b]\Rightarrow|(fg)(x)-(fg)(y)|=|f(x)g(x)-f(y)g(y)|$$

$$\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)|$$
$$\leq M\,(|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|) \leq M(k_1 + k_2)|x - y| \Rightarrow fg \in \text{Lip }[a, b].$$

Lip $[a, b]$ es por tanto subanillo de $C[a, b]$ (además, conmutativo y unitario).

Ahora, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo par de funciones $f, g \in \text{Lip }[a, b]$ se verifica $\lambda(fg) = (\lambda f)g = f(\lambda g)$ con lo cual podemos concluir que Lip $[a, b]$ es un álgebra. Claramente contiene a las funciones constantes y separa puntos pues $id \in \text{Lip }[a, b]$ e $id(\alpha) \neq id(\beta)$ si $\alpha \neq \beta$. Esto completa la demostración de que se verifican las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass y en consecuencia Lip $[a, b]$ es álgebra uniformemente densa en $C[a, b]$. □

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`