MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

CARDINAL DE LA UNIÓN DE n CONJUNTOS

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Demostramos una fórmula para hallar el cardinal de la unión de n conjuntos.

Enunciado
Dado un conjunto A denotamos por $|A|$ a su cardinal. Sean los n conjuntos finitos $A_1,\ldots,A_n$ que podemos suponer contenidos en un conjunto universal U finito. Se trata de demostrar la fórmula

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i,j=1,\ i<j}^{n}|A_i\cap A_j| +$$

$$\sum_{i,j,k=1,\ i<j<k}^{n}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \ldots + (-1)^{n+1}\,|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|\,.$$

Se pide:
1) Demostrar la fórmula para $n=2$.
2) Demostrar la fórmula para $n=3$.
3) Usando el método de inducción, demostrar que la fórmula es válida para todo $n\geq 2$.

Solución
1) Sabemos que si $B_1,\ldots,B_m$ son m conjuntos finitos y disjuntos dos a dos se verifica

$$|B_1\cup\ldots\cup B_m| = |B_1| + \ldots + |B_m|\,. \qquad [1]$$

Tenemos

$$A_1 = A_1\cap U = A_1\cap(A_2\cup A_2^c) = (A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_2^c)\,,$$

$$A_2 = A_2\cap U = A_2\cap(A_1\cup A_1^c) = (A_1\cap A_2)\cup(A_2\cap A_1^c)\,.$$

Además, A_1 está expresado como unión de los conjuntos disjuntos $A_1\cap A_2$ y $A_1\cap A_2^c$ y por [1],

$$|A_1| = |A_1\cap A_2| + |A_1\cap A_2^c|\,. \qquad [2]$$

De la misma manera,

$$|A_2| = |A_1\cap A_2| + |A_2\cap A_1^c|\,. \qquad [3]$$

Key words and phrases. Cardinal, unión, n conjuntos.

Por otra parte,

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_2 \cap A_1^c)$$

está expresado como unión de tres conjuntos disjuntos dos a dos, y por [1],

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2^c| + |A_2 \cap A_1^c| . \qquad [4]$$

Sumando miembro a miembro [2] y [3] y pasando un $|A_1 \cap A_2|$ al primer miembro

$$|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2^c| + |A_2 \cap A_1^c| ,$$

y usando la igualdad [4] queda

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = \sum_{i=1}^{2} |A_i| + (-1)^{2+1} |A_1 \cap A_2| .$$

2) Usando la fórmula deducida en el apartado anterior,

$$\begin{gathered}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| = \\
|A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| \\
= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| \\
= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| \\
- (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)|) \\
= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| \\
- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
= \sum_{i=1}^{3} |A_i| - \sum_{i,j=1,\ i<j}^{3} |A_i \cap A_j| + (-1)^{3+1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3| .
\end{gathered}$$

3) Sea la fórmula cierta para $n \geq 3$ y veamos que es cierta para $n+1$:

$$\begin{gathered}
|A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| \\
= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \\
= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\
= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i,j=1,\ i<j}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k=1,\ i<j<k}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
+ \ldots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n| + |A_{n+1}| \\
- \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| + \sum_{i,j=1,\ i<j}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| \\
- \sum_{i,j,k=1,\ i<j<k}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| \\
+ \ldots - (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}| .
\end{gathered}$$

Agrupando los cardinales de las intersecciones de un conjunto, de dos, etc. obtenemos

$$\left|A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}\right| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{i,j=1,\ i<j}^{n+1} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{i,j,k=1,\ i<j<k}^{n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{(n+1)+1} p \left|A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}\right|,$$

y la fórmula es cierta para $n+1$. □

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`