MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

COMPLETACIÓN DE TODO ESPACIO MÉTRICO

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

RESUMEN. Demostramos que todo espacio métrico tiene una completación y que es única salvo isometrías.

Enunciado
Sea X un espacio métrico. Se dice que el espacio métrico X^* es una *completacion* de X si X^* es completo y X es isométrico a un subespacio denso de X^*. El objetivo de éste problema es demostrar que todo espacio métrico tiene una completación y que ésta es única salvo isometrías.

1) Sea (X, d) un espacio métrico y sea $C[X]$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en X. Se define en $C[X]$ la relación

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim d(x_n, y_n) = 0.$$

Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $C[X]$
2) Sean (x_n) e (y_n) dos elementos de $C[X]$. Demostrar que la sucesión de números reales $d(x_n, y_n)$ es convergente.
3) Sea el conjunto cociente $X^* = C[X]/\sim$. Se define la aplicación

$$d^* : X^* \times X^* \to \mathbb{R}, \quad d^*\left([x_n], [y_n]\right) = \lim d(x_n, y_n).$$

Demostrar que está bien definida, es decir que no depende del representante elegido en cada clase.
4) Demostrar que d^* es una distancia en X^*.
5) Para todo $p \in X$ sea la sucesión constante $(p) = (p, p, p, \ldots)$. Consideremos el subconjunto de X^*: $\hat{X} = \{[(p)] : p \in X\}$. Demostrar que X es isométrico a $\hat{X}$. 6) Demostrar que $\hat{X}$ es denso en X^*.
7) Demostrar el siguiente lema:
Sea (M, d) un espacio métrico, (b_n) una sucesión de Cauchy en M y sea (a_n) una sucesión en M tal que $d(a_n, b_n) < 1/n$ para todo n natural. Entonces,
(i) (a_n) es sucesión de Cauchy en M.
(ii) $(a_n) \to p \in M \Leftrightarrow (b_n) \to p \in M$
8) Demostrar que (X^*, d^*) es completo.
9) Demostrar que si Y^* es una completación de X, entonces Y^* es isométrico a X^*.
10) ¿Cuál es la completación de $\mathbb{Q}$ con la distancia usual?

Key words and phrases. completación, espacio métrico.

Solución
1) *Reflexiva.* Para todo $(x_n) \in C[X]$ tenemos $\lim d(x_n, x_n) = \lim 0 = 0$, luego $(x_n) \sim (x_n)$.
Simétrica. Para todo $(x_n), (y_n) \in C[X]$ tenemos

$$(x_n) \sim (y_n) \Rightarrow \lim d(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim d(y_n, x_n) = \lim d(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow (y_n) \sim (x_n).$$

Transitiva. Si $(x_n) \sim (y_n)$ e $(y_n) \sim (z_n)$ se verifica $d(x_n, y_n) \to 0$ y $d(y_n, z_n) \to 0$. Por la desigualdad triangular, $0 \leq d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$. Por el teorema del Sandwich, $d(x_n, z_n) \to 0$ luego $(x_n) \sim (z_n)$.

2) Por la desigualdad triangular

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$$

o bien $d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$ con lo cual

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$$

Como las sucesiones (x_n) e (y_n) son de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existen naturales N_x, N_y tales que $d(x_n, x_m) < \epsilon/2$ si $n, m \geq N_x$ y $d(y_n, y_m) < \epsilon/2$ si $n, m \geq N_y$. Entonces,

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \text{ si } N = \max\{N_x, N_y\}.$$

Esto prueba que la sucesion de números reales $d(x_n, y_n)$ es de Cauchy y por tanto convergente al ser $\mathbb{R}$ completo.

3) Supongamos que $(x_n) \sim (x'_n)$ y que $(y_n) \sim (y'_n)$. Sea $l = \lim d(x_n, y_n)$ y $l' = \lim d(x'_n, y'_n)$. Tenemos que demostrar que $l = l'$. Por la desigualdad triangular,

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n).$$

Sea ahora $\epsilon > 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} &\exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow d(x_n, x'_n) < \epsilon/3, \\ &\exists n_2 \in \mathbb{N} : n \geq n_2 \Rightarrow d(y_n, y'_n) < \epsilon/3, \\ &\exists n_3 \in \mathbb{N} : n \geq n_3 \Rightarrow \left| d(x'_n, y'_n) - l' \right| < \epsilon/3. \end{aligned}$$

Si $n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\}$ se verifica $d(x_n, y_n) < l' + \epsilon$ y por tanto $\lim d(x_n, y_n) = l \leq l' + \epsilon$ para todo ϵ luego $l \leq l'$. De manera simétrica se demuestra que $l' \leq l$ y por tanto, $l = l'$.

4) Para todo $[(x_n)], [(y_n)] \in X^*$ tenemos $d^*\left([(x_n)], [(y_n)]\right) = \lim d(x_n, y_n)$, límite que vimos que existe y que además es ≥ 0 al ser los $d(x_n, y_n) \geq 0$. Por otra parte,

$$d^*\left([(x_n)], [(y_n)]\right) = 0 \Leftrightarrow \lim d(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow (x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow [(x_n)] = [(y_n)].$$

Para todo $[(x_n)], [(y_n)] \in X^*$:

$$d^*\left([(x_n)], [(y_n)]\right) = \lim d(x_n, y_n) = \lim d(y_n, x_n) = d^*\left([(y_n)], [(x_n)]\right),$$

Para todo $[(x_n)], [(y_n)], [(z_n)] \in X^*$:

$$d^*\left([(x_n)], [(y_n)]\right) = \text{lím}\, d(x_n, y_n) \leq \text{lím}\left[d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)\right]$$

$$= \text{lím}\, d(x_n, z_n) + \text{lím}\, d(z_n, y_n) = d^*\left([(x_n)], [(z_n)]\right) + d^*\left([(z_n)], [(y_n)]\right).$$

Concluimos pues que d^* es distancia en X^*.

5) Para todo $p \in X$ la sucesión constante (p) es convergente y por tanto de Cauchy, con lo cual $\hat{X} \subset X^*$. Definamos la aplicación $f : X \to \hat{X}$ dada por $f(p) = [(p)]$. Tenemos,

$$f(p) = f(q) \Rightarrow [(p)] = [(q)] \Rightarrow \text{lím}\ (p - q) = p - q = 0 \Rightarrow p = q$$

es decir, f es inyectiva. Por otra parte para todo $[(p)] \in \hat{X}$ se verifica $[(p)] = f(p)$, luego f es sobreyectiva. Veamos ahora que la biyección f es isometría. En efecto, para todo $p, q \in X$:

$$d^*\left([(p)], [(q)]\right) = \text{lím}\ d(p, q) = d(p, q).$$

6) Basta demostrar que todo punto de X^* es el límite de una sucesión de elementos de $\hat{X}$. Sea pues $x = [(x_n)] \in X^*$ y denotemos por $\hat{x_1}$, $\hat{x_2}$, $\hat{x_3}, \ldots$ los elementos de $\hat{X}$:

$$\hat{x_1} = [(x_1, x_1, x_1, \ldots)],\ \hat{x_2} = [(x_2, x_2, x_2, \ldots)],\ \hat{x_3} = [(x_3, x_3, x_3, \ldots)],\ \ldots$$

Dado que (x_n) es sucesión de Cauchy en X:

$$\lim_{m \to +\infty} d^*(\hat{x_m}, x) = \lim_{m \to +\infty}\left(\lim_{n \to +\infty} d(x_m, x_n)\right) = \lim_{m,\, n \to +\infty} d(x_m, x_n) = 0$$

luego $(\hat{x}_n) \to x$.

7) (i) Por la desigualdad triangular

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, b_m) + (b_m, b_n) + d(b_n, a_n).$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe n_1 natural tal que $1/n_1 < \epsilon/3$ por tanto

$$n, m \geq n_1 \Rightarrow d(a_m, a_n) \leq \epsilon/3 + (b_m, b_n) + \epsilon/3.$$

Como (b_n) es de Cauchy, existe n_2 natural tal que si $n, m \geq n_2$ entonces $d(b_m, b_n) < \epsilon/3$. Si $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$,

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow d(a_m.a_n)\ < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

lo cual implica que (a_n) es de Cauchy.
(ii) $\Rightarrow$) Por hipótesis $(a_n) \to p$, luego $d(a_n, p) \to 0$. Por otra parte $0 \leq d(b_n, a_n) \leq 1/n$, es decir $d(b_n, a_n) \to 0$. De la desigualdad triangular $0 \leq d(b_n, p) \leq d(b_n, a_n) + d(a_n, p)$ obtenemos usando el teorema del Sandwich que $d(b_n, p) \to 0$ o de forma equivalente $(b_n) \to p$.
$\Leftarrow$) Se demuestra de manera análoga.

8) Sea (α_n) una sucesión de Cauchy en X^*. Tenemos que demostrar que converge en X^*. Como $\hat{X}$ es denso en X^*, para todo n natural existe $\hat{x_n} \in \hat{X}$

tal que $d^*(\hat{x_n}, \alpha_n) < 1/n$. Por la parte (i) del apartado anterior, la sucesión $(\hat{x_n})$ es también de Cauchy en X^* con lo cual lo será (x_n) en X por ser X y $\hat{X}$ isométricos. Por el apartado 6, $(\hat{x_n}) \to x \in X^*$ y por la parte (ii) del apartado anterior también $(\alpha_n) \to x$.

9) Sea Y^* una completación de X. Al ser X isométrico a un subespacio denso de Y^*, podemos asumir que X es subespacio de Y^*. Al ser X denso en Y^*, para todo $y \in Y^*$ existe una sucesión (x_n) de X que converge a y con lo cual (x_n) es de Cauchy. Definamos la aplicación

$$g : Y^* \to X^*, \quad g(y) = [(x_n)].$$

La aplicación está bien definida pues si (x'_n) es otra sucesión tal que $(x'_n) \to y$, entonces $d(x_n, x'_n) \to 0$ y por tanto $[(x'_n)] = [(x_n)]$. Sean ahora $y, y' \in Y^*$ con $(x_n) \to y$, $(x'_n) \to y'$. Entonces,

$$g(y) = g(y') \Rightarrow [(x_n)] = [(x'_n)] \Rightarrow \text{lím } d(x_n, x'_n) = 0 \Rightarrow y = y'$$

luego g es inyectiva. También es sobreyectiva. En efecto, si $[(x_n)] \in X^*$ la sucesión (x_n) es de Cauchy en $X \subset Y^*$ por tanto (x_n) converge a un $y \in Y^*$, luego $[(x_n)] = g(y)$. Por último, para todo $y, y' \in Y^*$

$$\begin{aligned} d^*\left(f(y), f(y')\right) &= d^*\left([(x_n)], [(x'_n)]\right) = \text{lím}\, d(x_n, x'_n) \\ &= d\left(\text{lím}\, x_n, \text{lím}\, x'_n\right) = d(y, y') \end{aligned}$$

es decir, g es isometría.

10) De la conocida construcción de los números reales vía sucesiones de Cauchy racionales, deducimos que la completación de $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}^* = \mathbb{R}$. $\square$

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).
E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`