MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES CIRCULANTES

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Demostramos que el conjunto de las matrices circulantes tiene estructura de espacio vectorial, hallamos su dimensión y una base.

Enunciado

Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dada por $T(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_{n-1}, x_0, \ldots, x_{n-2})$. Se llama matriz *circulante* de orden n determinada por $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ y la representamos por $\text{circ}\{x\}$, a la matriz cuyos filas en el orden natural son $v, T(v), \ldots, T^{n-1}(x)$, es decir

$$\text{circ }\{x\} = \begin{bmatrix} x \\ T(x) \\ \vdots \\ T^{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

1) Escribir de forma explícita una matriz circulante genérica.
2) Sea $\text{Circ}(n) = \{\text{circ}\{x\} : x \in \mathbb{C}^n\}$ el conjunto de todas las matrices circulantes de orden n. Demostrar que es subespacio vectorial de $\mathbb{C}^{n\times n}$.
3) Demostrar que la aplicación $\Phi : \mathbb{C}^n \to \text{Circ}(n)$ dada por $\Phi(x) = \text{circ}\{x\}$ es isomorfismo de espacios vectoriales.
4) Hallar la dimensión y una base de $\text{Circ}(n)$. Escribir explícitamente esta base para $n = 3$.

Solución

1) Una matriz circulante genérica es

$$\text{circ }\{x\} = \begin{bmatrix} x \\ T(x) \\ \vdots \\ T^{n-2}(x) \\ T^{n-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & \ldots & x_{n-3} & x_{n-2} \\ \vdots & & & \vdots & \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} & x_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

2) Se verifica $0 = \text{circ}\{0\} \in \text{Circ}(n)$. Por otra parte y para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y para todo par de matrices $\text{circ}\{x\}$, $\text{circ}\{y\}$ de $\text{Circ}(n)$:

$$\text{circ}\{x\} + \text{circ}\{y\} = \text{circ}\{x + y\} \in \text{Circ}(n), \quad \lambda\text{circ}\{x\} = \text{circ}\{\lambda x\} \in \text{Circ}(n),$$

Key words and phrases. Espacio vectorial, matrices circulantes.

por tanto $\text{Circ}(n)$ es subespacio de $\mathbb{C}^{n\times n}$.

3) Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y para todo $x, y \in \mathbb{C}$ se verifica

$$\Phi(x+y) = \text{circ}\{x+y\} = \text{circ}\{x\} + \text{circ}\{y\} = \Phi(x) + \Phi(y),$$
$$\Phi(\lambda x) = \text{circ}\{\lambda x\} = \lambda \text{circ}\{x\} = \lambda \Phi(\lambda x).$$

Por tanto, Φ es lineal. Es inyectiva pues

$$\ker \Phi = \{x \in \mathbb{C}^n : \Phi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{C}^n : \text{circ}\{x\} = 0\} = \{0\}.$$

Por otra parte, Φ es sobreyectiva por su propia construcción. Concluimos que Φ es isomorfismo.

4) Al ser Φ isomorfismo, $\dim \text{Circ}(n) = \dim \mathbb{C}^n = n$ y como los isomorfismos transforman bases en bases, si $B_c = \{e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$ una base de $\text{Circ}(n)$ es $B_{\text{Circ}(n)} = \{\Phi(e_0), \Phi(e_1), \ldots, \Phi(e_{n-1})\}$. Para $n = 3$, los vectores de una base de $\text{Circ}(3)$ son

$$\Phi(e_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \Phi(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \Phi(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`