MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

UN ESPACIO VECTORIAL NO USUAL

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Construimos un espacio vectorial no usual.

Enunciado
Sea el conjunto $H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$.

1) Demostrar que $(H, \oplus)$ es grupo abeliano, estando $\oplus$ definida mediante

$$(x, y) \oplus (z, w) = (x + z - 2, yw).$$

2) Demostrar que la operación

$$\mathbb{R} \times H \to H, \quad \lambda \otimes (x, y) = (\lambda x - 2\lambda + 2, y^{\lambda})$$

dota al grupo abeliano H del apartado anterior, de estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Solución
1) *Interna.* Dado que para todo $(x, y), (z, w) \in H$, se verifica $x, z \in \mathbb{R}$, también $x + z - 2 \in \mathbb{R}$. Al ser $y, w \in \mathbb{R}_{>0}$ también $yw \in \mathbb{R}_{>0}$ y por tanto, $(x, y) \oplus (z, w) \in H$.
Asociativa. Para todo $(x, y), (z, w), (u, v) \in H$ tenemos

$$(x, y) \oplus [(z, w) \oplus (u, v)] = (x, y) \oplus (z + u - 2, wv) = (x + z + u - 4, ywu),$$

$$[(x, y) \oplus (z, w)] \oplus (u, v) = (x + z - 2, yw) \oplus (u, v) = (x + z + u - 4, ywu).$$

Se verifica la igualdad.
Elemento neutro. El par (a, b) es elemento neutro en H si y sólo si para todo $(x, y) \in H$ se verifica

$$(x, y) \oplus (a, b) = (a, b) \oplus (x, y) = (x, y)$$

o equivalentemente $(x + a - 2, yb) = (a + x - 2, by) = (x, y)$. Es claro que $(a, b) = (2, 1) \in H$ y satisface la relación anterior para todo $(x, y) \in H$. Es por tanto el elemento neutro de H.
Elemento simétrico. El elemento $(x', y') \in H$ es simétrico de $(x, y) \in H$ si y sólo si se verifica

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x', y') \oplus (x, y) = (2, 1)$$

Key words and phrases. Espacio vectorial, no usual.

o equivalentemente $(x+x'-2, yy') = (x'+x-2, y'y) = (2,1)$. Es claro que $(x', y') = (4-x, 1/y)$ es elemento de H y satisface la relación anterior.
Conmutativa. Para todo $(x,y),(z,w) \in H$ tenemos

$$(x,y) \oplus (z,w) = (x+z-2, yw) = (z+x-2, wy) = (z,w) \oplus (x,y).$$

Concluimos pues que $(H, \oplus)$ es grupo abeliano.

2) Para todo $\lambda, x \in \mathbb{R}$ se verifica $\lambda x - 2\lambda + 2 \in \mathbb{R}$ y para todo $y \in \mathbb{R}_{>0}$ existe $y^\lambda > 0$. Es decir, $\lambda \otimes (x,y) \in H$ está bien definida. Veamos ahora que se cumplen los cuatro axiomas de ley externa para espacios vectoriales.
(i) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $(x,y),(z,w) \in H$ tenemos

$$\lambda \otimes [(x,y) \oplus (z,w)] = \lambda \otimes (x+z-2, yw) = \left(\lambda x + \lambda z - 2\lambda - 2\lambda + 2, (yw)^\lambda\right).$$

Por otra parte,

$$[\lambda \otimes (x,y)] \oplus [\lambda \otimes (z,w)] = (\lambda x - 2\lambda + 2, y^\lambda) \oplus (\lambda z - 2\lambda + 2, w^\lambda)$$
$$= (\lambda x - 2\lambda + 2 + \lambda z - 2\lambda + 2 - 2, y^\lambda w^\lambda) = \left(\lambda x + \lambda z - 4\lambda + 2, (yw)^\lambda\right).$$

Se verifica la igualdad.
(ii) Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $(x,y) \in H$ tenemos

$$(\lambda + \mu) \otimes (x,y) = \left((\lambda+\mu)x - 2(\lambda+\mu) + 2, y^{\lambda+\mu}\right).$$

Por otra parte,

$$[\lambda \otimes (x,y)] \oplus [\mu \otimes (x,y)] = \left(\lambda x - 2\lambda + 2, y^\lambda)\right) \oplus (\mu x - 2\mu + 2, y^\mu)$$
$$= (\lambda x - 2\lambda + 2 + \mu x - 2\mu + 2 - 2, y^\lambda y^\mu).$$

Se verifica la igualdad.
(iii) Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $(x,y) \in H$ tenemos

$$\lambda \otimes [\mu \otimes (x,y)] = \lambda \otimes (\mu x - 2\mu + 2, y^\mu) = \left(\lambda(\mu x - 2\mu + 2) - 2\lambda + 2, (y^\mu)^\lambda\right).$$

Por otra parte,

$$(\lambda\mu) \otimes (x,y) = \left((\lambda\mu)x - 2(\lambda\mu) + 2, y^{\lambda\mu}\right).$$

Se verifica la igualdad.
(iv) Para todo $(x,y) \in H$ se verifica

$$1 \otimes (x,y) = (1x - 2 \cdot 1 + 2, y^1) = (x,y).$$

Concluimos que H es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ con las operaciones dadas. $\square$

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`