MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

FACTOR INTEGRANTE DE LA FORMA $\mu = \mu(xy^2)$

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Resolvemos una ecuación diferencial usando un factor integrante de la forma $\mu = \mu(xy^2)$.

Enunciado
(a) Demostrar que la ecuación diferencial

$$xdy + ydx + (3x^3y^4)dy = 0 \qquad (E)$$

tiene un factor integrante de la forma $\mu = \mu(xy^2)$ y calcularlo.
(b) Verificar que la ecuación obtenida al multiplicar la ecuación (E) por μ, es una ecuación diferencial exacta.
(c) Resolver la ecuación (E).

Solución
(a) Podemos escribir la ecuación diferencial en la forma $Pdx + Qdy = 0$, siendo

$$P(x, y) = y, \quad Q(x, y) = x + 3x^3y^4.$$

Llamando $z = xy^2$ y multiplicando por $\mu(z)$, obtenemos $\mu(z)Pdx+\mu(z)Qdy = 0$. Obliguemos a que esta ecuación sea diferencial exacta:

$$(\mu(z)P)_y = \mu'(z)2xy \cdot y + \mu(z) \cdot 1,$$

$$(\mu(z)Q)_x = \mu'(z)y^2 \cdot (x + 3x^3y^4) + \mu(z)(1 + 9x^2y^4).$$

$$(\mu(z)P)_y = (\mu(z)Q)_x \Leftrightarrow \mu'(z)\left(2xy^2 - y^2x - 3x^3y^6\right) = \mu(z)\left(9x^2y^4\right).$$

Queda por tanto

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{9x^2y^4}{xy^2 - 3x^3y^6} = \frac{9xy^2}{1 - 3x^2y^4} = \frac{9z}{1 - 3z^2},$$

$$\log|\mu(z)| = -\frac{3}{2}\log\left|1 - 3z^2\right|, \ \mu(z) = e^{-\log(1-3z^2)^{3/2}},$$

$$\mu(z) = \frac{1}{(1 - 3x^2y^4)^{3/2}}.$$

Key words and phrases. Factor integrante, $\mu = \mu(xy^2)$.

(b) Multiplicando la ecuación diferencial dada por el factor integrante hallado, queda en la forma

$$\underbrace{\frac{y}{(1-3x^2y^4)^{3/2}}}_{M}\,dx+\underbrace{\frac{x+3x^3y^4}{(1-3x^2y^4)^{3/2}}}_{N}\,dy=0.$$

Veamos que es diferencial exacta. En efecto

$$\begin{aligned}M_y&=\frac{1\cdot(1-3x^2y^4)^{3/2}-(3/2)(1-3x^2y^4)^{1/2}(-12x^2y^3)y}{(1-3x^2y^4)^3}\\&=\frac{(1-3x^2y^4)^{1/2}\left[1-3x^2y^4+18x^2y^4\right]}{(1-3x^2y^4)^3}=\frac{1+15x^2y^4}{(1-3x^2y^4)^{5/2}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_x&=\frac{(1+9x^2y^4)(1-3x^2y^4)^{3/2}-(3/2)(1-3x^2y^4)^{1/2}(-6xy^4)(x+3x^3y^4)}{(1-3x^2y^4)^3}\\&=\frac{(1-3x^2y^4)^{1/2}\left[(1+9x^2y^4)(1-3x^2y^4)+9xy^4(x+3x^3y^4)\right]}{(1-3x^2y^4)^3}\\&=\frac{1-3x^2y^4+9x^2y^4-27x^4y^8+9x^2y^4+27x^4y^8}{(1-3x^2y^4)^{5/2}}=\frac{1+15x^2y^4}{(1-3x^2y^4)^{5/2}}.\end{aligned}$$

Se verifica $M_y=N_x$, por tanto $Mdx+Ndy=0$ es diferencial exacta.

(c) Encontremos una función $u=u(x,y)$ tal que $u_x=M$ y $u_y=N$, con lo cual la solución general de la ecuación (E) será $u(x,y)=C$ con C constante. Tenemos

$$u_x=M,\ u=\int Mdx=\int\frac{y}{(1-3x^2y^4)^{3/2}}dx=\frac{xy}{\sqrt{1-3x^2y^4}}+\varphi(y).$$

Derivando u respecto de y

$$\begin{aligned}u_y&=x\frac{1\cdot\sqrt{1-3x^2y^4}-\frac{1}{2\sqrt{1-3x^2y^4}}\cdot(-12x^2y^3)y}{1-3x^2y^4}+\varphi'(y)\\&=x\frac{1-3x^2y^4+6x^2y^4}{(1-3x^2y^4)^{3/2}}+\varphi'(y)=\frac{x+3x^3y^4}{(1-3x^2y^4)^{3/2}}+\varphi'(y)=N+\varphi'(y).\end{aligned}$$

Entonces, $u_y=N$ implica que $\varphi'(y)=0$, es decir $\varphi(y)=C$. La solución general de (E) en forma implícita es por tanto

$$\frac{xy}{\sqrt{1-3x^2y^4}}+C=0.$$

□

© *Monografías matemáticas* por Fernando Revilla Jiménez se distribuye bajo la licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional.

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`