MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE n SUCESOS

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Demostramos una fórmula para hallar la probabilidad de la unión de n sucesos.

Enunciado
Sea (E, Ω, p) un espacio de probabilidad. Se trata de demostrar la fórmula:

$$p\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} p\left(A_i\right) - \sum_{i,j=1,\ i<j}^{n} p\left(A_i \cap A_j\right) +$$

$$\sum_{i,j,k=1,\ i<j<k}^{n} p\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) + \ldots + (-1)^{n+1} p\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right),$$

para $A_1, \ldots, A_n \in \Omega$. Se pide:
1) Demostrar la fórmula para $n = 2$.
2) Demostrar la fórmula para $n = 3$.
3) Usando el método de inducción, demostrar que la fórmula es válida para todo $n \geq 2$.

Solución
1) Tenemos

$$A_1 = A_1 \cap E = A_1 \cap \left(A_2 \cup A_2^c\right) = \left(A_1 \cap A_2\right) \cup \left(A_1 \cap A_2^c\right),$$

$$A_2 = A_2 \cap E = A_2 \cap \left(A_1 \cup A_1^c\right) = \left(A_1 \cap A_2\right) \cup \left(A_2 \cap A_1^c\right).$$

Además, A_1 está expresado como unión de los sucesos incompatibles $A_1 \cap A_2$ y $A_1 \cap A_2^c$ y por tanto,

$$p\left(A_1\right) = p\left(A_1 \cap A_2\right) + p\left(A_1 \cap A_2^c\right). \qquad [1]$$

De la misma manera,

$$p\left(A_2\right) = p\left(A_1 \cap A_2\right) + p\left(A_2 \cap A_1^c\right). \qquad [2]$$

Por otra parte,

$$A_1 \cup A_2 = \left(A_1 \cap A_2\right) \cup \left(A_1 \cap A_2^c\right) \cup \left(A_2 \cap A_1^c\right)$$

está expresado como unión de tres sucesos incompatibles y por tanto,

$$p\left(A_1 \cup A_2\right) = p\left(A_1 \cap A_2\right) + p\left(A_1 \cap A_2^c\right) + p\left(A_2 \cap A_1^c\right). \qquad [3]$$

Key words and phrases. Probabilidad, unión, n sucesos.

Sumando miembro a miembro [1] y [2] y pasando un $p\left(A_1 \cap A_2\right)$ al primer miembro

$$p\left(A_1\right)+p\left(A_2\right)-p\left(A_1 \cap A_2\right)=p\left(A_1 \cap A_2\right)+p\left(A_1 \cap A_2^c\right)+p\left(A_2 \cap A_1^c\right),$$

y usando la igualdad [3] queda

$$p\left(A_1 \cup A_2\right)=p\left(A_1\right)+p\left(A_2\right)-p\left(A_1 \cap A_2\right)=\sum_{i=1}^{2} p\left(A_i\right)+(-1)^{2+1} p\left(A_1 \cap A_2\right).$$

2) Usando la fórmula deducida en el apartado anterior,

$$\begin{gathered}
p\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right)=p\left[A_1 \cup\left(A_2 \cup A_3\right)\right]= \\
p\left(A_1\right)+p\left(A_2 \cup A_3\right)-p\left[A_1 \cap\left(A_2 \cup A_3\right)\right] \\
=p\left(A_1\right)+p\left(A_2\right)+p\left(A_3\right)-p\left(A_2 \cap A_3\right)-p\left[\left(A_1 \cap A_2\right) \cup\left(A_1 \cap A_3\right)\right] \\
=p\left(A_1\right)+p\left(A_2\right)+p\left(A_3\right)-p\left(A_2 \cap A_3\right) \\
-\left[p\left(A_1 \cap A_2\right)+p\left(A_1 \cap A_3\right)-p\left(\left(A_1 \cap A_2\right) \cap\left(A_1 \cap A_3\right)\right)\right] \\
=p\left(A_1\right)+p\left(A_2\right)+p\left(A_3\right)-p\left(A_2 \cap A_3\right) \\
-p\left(A_1 \cap A_2\right)-p\left(A_1 \cap A_3\right)+p\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \\
=\sum_{i=1}^{3} p\left(A_i\right)-\sum_{i, j=1,\ i<j}^{3} p\left(A_i \cap A_j\right)+(-1)^{3+1} p\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right).
\end{gathered}$$

3) Sea la fórmula cierta para $n \geq 3$ y veamos que es cierta para $n+1$:

$$\begin{gathered}
p\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}\right)=p\left[\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) \cup A_{n+1}\right] \\
=p\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right)+p\left(A_{n+1}\right)-p\left[\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) \cap A_{n+1}\right] \\
=p\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right)+p\left(A_{n+1}\right)-p\left[\left(A_1 \cap A_{n+1}\right) \cup \ldots \cup\left(A_n \cap A_{n+1}\right)\right] \\
=\sum_{i=1}^{n} p\left(A_i\right)-\sum_{i, j=1,\ i<j}^{n} p\left(A_i \cap A_j\right)+\sum_{i, j, k=1,\ i<j<k}^{n} p\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) \\
+\ldots+(-1)^n p\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right)+p\left(A_{n+1}\right) \\
-\sum_{i=1}^{n} p\left(A_i \cap A_{n+1}\right)+\sum_{i, j=1,\ i<j}^{n} p\left(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}\right) \\
-\sum_{i, j, k=1,\ i<j<k}^{n} p\left(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}\right) \\
+\ldots-(-1)^{n+1} p\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}\right).
\end{gathered}$$

Agrupando las probabilidades de las intersecciones de un conjunto, de dos, etc. obtenemos

$$p\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}\right)=\sum_{i=1}^{n+1} p\left(A_i\right)-\sum_{i, j=1,\ i<j}^{n+1} p\left(A_i \cap A_j\right)$$

$$+\sum_{i, j, k=1,\ i<j<k}^{n+1} p\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right)+\ldots+(-1)^{(n+1)+1} p\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}\right),$$

y la fórmula es cierta para $n + 1$. □

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`