PROBLEMAS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS SUPERIORES (FASCÍCULO 3)

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Cada fascículo de estos *Problemas resueltos de matemáticas superiores* consta de 50 problemas resueltos. Pueden considerarse como anexos a mis libros *Problemas resueltos de álgebra* y *Problemas resueltos de análisis matemático*.

Índice

101. Serie de los inversos de los números primos 2
102. Los complejos no pueden ser un cuerpo ordenado 3
103. Límite usando la fórmula de Taylor 4
104. Condición necesaria y suficiente para que $A \cup B^c = B$ 4
105. Condiciones suficientes para que un polinomio sea irreducible en $\mathbb{K}[x]$ 5
106. Teorema de los círculos de Gershgorin 6
107. Derivada $f^{(2016)}(0)$ para $f(x) = x^2 \log(x+1)$ 7
108. Factorización de un polinomio homogéneo en $\mathbb{R}[x, y]$ 8
109. Rango de una función definida en $[0, 1]$ 9
110. Topología cociente en X/R 10
111. Acotación del rango del producto de dos matrices 12
112. Espacio vectorial como suma directa de dos núcleos 12
113. Desigualdad de Schwarz y norma en los espacios prehilbertianos 13
114. Espacio prehilbertiano de las sucesiones finitamente no nulas 14
115. $\langle 2, x\rangle$ no es ideal principal en $\mathbb{Z}[x]$ 15
116. Teorema de la buena ordenación de Zermelo. 15
117. Teorema de los valores extremos sobre un compacto 17
118. Métodos de Jacobi y Gauss-Seidel 18
119. Triedro de Frenet, rectas y planos asociados 21
120. Caracterizaciones de la continuidad en espacios topológicos 22
121. Números armónicos y constante de Euler-Mascheroni 23
122. Determinante de una matriz solución de un sistema diferencial homogéneo 25
123. Variación de las constantes 27
124. Caracterizaciones de cuerpos 27
125. Norma en un anillo unitario 28
126. Una sucesión de Cauchy con la distancia p-ádica 29
127. Anillo de las sucesiones de Cauchy en un anillo normado 30

128. Ideal de las sucesiones nulas en el anillo de las sucesiones de Cauchy 32
129. Norma en el anillo cociente $\widehat{R}$ de las sucesiones de Cauchy sobre el ideal de las nulas 32
130. R como subanillo de $\widehat{R}$ 34
131. Completación de todo anillo normado 34
132. Conservación de normas no arquimediadas por completación 36
133. Cuerpo $\mathbb{Q}_p$ de los números p-ádicos y subanillo $\mathbb{Z}_p$ 37
134. Sucesiones eventualmente constantes con normas no arquimedianas 37
135. Fórmula de Stirling 38
136. Teorema de compactificación de Alexandrov 42
137. Matriz equivalente en forma canónica 44
138. Representación paramétrica regular 46
139. Fórmula de Bayes 47
140. Distribución de Poisson 48
141. Cambio admisible de parámetro 49
142. Curvas regulares 50
143. EDO homogénea con coeficiente analíticos 51
144. Límite de una sucesión por la definición 56
145. Inverso de un elemento en $\mathbb{Q}/\langle x^2+x+1\rangle$ 56
146. Caracterización de $a\ker f$ para un homomorfismo de grupos 57
147. Límite de una sucesión de conjuntos 57
148. Ecuaciones paramétricas de la intersección de una esfera y un plano 59
149. Cuerpo primo 61
150. Cuerpo de ruptura de un polinomio 62

101. Serie de los inversos de los números primos

Denotamos por p_n al enésimo número primo, es decir $p_1=2, p_2=3, p_3=5, p_4=7, \dots$ y al conjunto de todos los números primos lo denotamos por $\mathbb{P}$. La letra p designará siempre un número primo, por ejemplo $\sum_{p\geq N} p$ denota a $p_N+p_{N+1}+p_{N+2}+\cdots$.
Demostrar que la serie

$$\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{p_n}+\cdots$$

de la suma de los inversos de de los números primos es divergente.

SOLUCIÓN. Razonamos por contradicción. Si $\sum_{p\in\mathbb{P}} 1/p$ es convergente de suma S, para $\epsilon = 1/2$ existe N natural tal que

$$S - S_N = \sum_{p>N} \frac{1}{p} < \frac{1}{2}.$$

Sea $Q = \prod_{p\leq N} p$ el producto de los números primos menores o iguales que N. Entonces, los números $1 + nQ$ con $n \in \mathbb{N}$ no son divisibles por primos menores que N. Efectivamente, si $p \leq N$ cumple $p \mid (1 + nQ)$ tendríamos $1 + nQ = pk$ con $k \in \mathbb{N}$. Por otra parte $p \mid Q$, es decir $Q = ps$ con $s \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$1 + nps = pk \text{ o bien } 1 = p(k - ns)$$

lo cual es absurdo. Consideremos ahora

$$P = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{p>N} \frac{1}{p} \right)^j < \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = 1.$$

Se verifica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + nQ} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{p>N} \frac{1}{p} \right)^j$$

porque cada término de la suma de la izquierda aparece en la suma de la derecha al menos una vez. Esto es claro, pues según se demostró, todo divisor primo p de $1+nQ$ es mayor que N. Además, $1/(1+nQ) \leq 1/p$. Deducimos por tanto que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + nQ} \leq 1.$$

Pero la serie de la ecuación anterior diverge pues

$$\sum_{n=1}^{K} \frac{1}{1 + nQ} \geq \frac{1}{2Q} \sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n}$$

para todo K y el lado derecho diverge para $K \to +\infty$ (serie armónica). La contradicción obtenida demuestra el teorema. □

102. Los complejos no pueden ser un cuerpo ordenado

Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y $\leq$ una relación de orden total en K. Decimos que $(K, \leq)$ es un *cuerpo ordenado* si se verifican los axiomas

$$(K1) \quad \forall a, b, c \in K, \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c.$$
$$(K2) \quad \forall a, b \in K, \quad a \geq 0 \text{ y } b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0.$$

Es claro que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son cuerpos ordenados con el orden usual, sin embargo:

Demostrar que ningún orden total en $\mathbb{C}$ le puede dar estructura de cuerpo ordenado.

SOLUCIÓN. Supongamos que $(\mathbb{C},\leq)$ fuera un cuerpo ordenado. Como $i\neq 0$ tenemos $i>0$ o $i<0$.
Primer caso: $i>0$. Entonces

$$i^2=i\cdot i\underbrace{\geq}_{\text{por }(K2)}0\Rightarrow -1\geq 0\underbrace{\Rightarrow}_{\text{por }(K1)}-1+1\geq 0+1\Rightarrow 0\geq 1.$$

Por otra parte

$$-1\geq 0\underbrace{\Rightarrow}_{\text{por }(K2)}(-1)^2\geq 0\Rightarrow 1\geq 0.$$

Al ser $1\neq 0$ tenemos a la vez $0>1$ y $1>0$ lo cual es absurdo.
Segundo caso: $i<0$. Entonces

$$0-i\underbrace{\geq}_{\text{por }(K1)}i-i\Rightarrow -i\geq 0\underbrace{\Rightarrow}_{\text{por }(K2)}(-i)^2\geq 0\Rightarrow -1\geq 0.$$

Por otra parte

$$-1\geq 0\text{ y }-i\geq 0\underbrace{\Rightarrow}_{\text{por }(K2)}(-1)(-i)\geq 0\Rightarrow i\geq 0.$$

No puede ser a la vez $i<0$ e $i\geq 0$, con lo cual obtenemos otro absurdo. □

103. Límite usando la fórmula de Taylor

Calcular $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e^{-8x^2}+\cos 4x}{10x^4}$.

SOLUCIÓN. Usando los conocidos desarrollos de la exponencial y el coseno

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-8x^2}+\cos 4x}{10x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(1+\dfrac{-8x^2}{1!}+\dfrac{(-8x^2)^2}{2!}+o(x^4)\right)+1-\dfrac{(4x)^2}{2!}+\dfrac{(4x)^4}{4!}+o(x^4)}{10x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{64}{3}x^4+o(x^4)}{10x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{64}{3}+\dfrac{o(x^4)}{4}}{10}=\frac{-\dfrac{64}{3}+0}{10}=-\frac{32}{15}.$$

□

104. Condición necesaria y suficiente para que $A\cup B^c=B$

Sean A y B subconjuntos de un conjunto universal U. Determinar condiciones necesarias y suficientes para que se verifique la igualdad $A\cup B^c=B$.

SOLUCIÓN. Tenemos las implicaciones

$$A\cup B^c=B\Rightarrow (A\cup B^c)\cup B=B\cup B$$
$$\Rightarrow A\cup(B^c\cup B)=B\Rightarrow A\cup U=B\Rightarrow U=B.$$

Es decir, necesariamente ha de ser $B=U$. Por otra parte, si $B=U$,

$$A\cup U^c=U\Rightarrow A\cup\emptyset=U\Rightarrow A=U.$$

Por tanto, para que se cumpla $A \cup B^c = B$ es necesario que $A = B = U$. También es suficiente pues $U \cup U^c = U \cup \emptyset = U$. $\square$

105. Condiciones suficientes para que un polinomio sea irreducible en $\mathbb{K}[x]$

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $p(x) \in \mathbb{K}[x]$.
(a) Demostrar que si grado $p(x) = 1$, entonces $p(x)$ es irreducible.
(b) Demostrar que si $p(x)$ es un polinomio cuadrático o cúbico sin raíces en $\mathbb{K}$, entonces $p(x)$ es irreducible.
(c) Demostrar que los siguientes polinomios de $\mathbb{Z}_2[x]$ son irreducibles:

$$x,\ x+1,\ x^2+x+1,\ x^3+x+1,\ x^3+x^2+1.$$

(d) Descomponer $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ en producto de factores irreducibles.
(e) Descomponer $p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ en producto de factores irreducibles.

SOLUCIÓN. (a) Si $p(x) = q(x)h(x)$ entonces,

$$1 = \text{grado } p(x) = \text{grado } q(x) + \text{grado } h(x).$$

Esto implica que grado $q(x) = 0$ o bien grado $h(x) = 0$, es decir o bien $q(x)$ o bien $h(x)$ es una unidad y por tanto $p(x)$ es irreducible.

(b) Si grado $p(x) = 2$ o 3 y $p(x)$ no tiene ceros en $\mathbb{K}$, entonces no tiene factores de grado 1. Si $p(x) = q(x)h(x)$ tendríamos o bien

$$2 = \text{grado } q(x) + \text{grado } h(x) \text{ o bien, } 3 = \text{grado } q(x) + \text{grado } h(x).$$

Pero al ser los grados de $q(x)$ y $h(x)$ distintos de 1, lo cual implica en ambos casos que o bien el grado de $q(x)$ o el de $h(x)$ ha de ser cero luego $p(x)$ es irreducible.

(c) Los dos primeros polinomios son de primer grado. Los restantes son de grado 2 o 3 y claramente no tienen raíces en $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. Por lo demostrado en los apartados (a) y (b), concluimos que todos los polinomios dados son irreducibles.

(d) Tenemos $p(1) = 0$. Aplicando el algoritmo de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow p(x) = (x-1)(\underbrace{x^3+x+1}_{p_1(x)}).$$

Ahora bien, vimos en el apartado (c) que $p_1(x)$ es irreducible luego la descomposición pedida es $p(x) = (x-1)p_1(x)$.

(e) Tenemos $p(-1)=0$. Aplicando el algoritmo de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & & -1 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow p(x)=(x+1)(\underbrace{x^2-2}_{p_1(x)}).$$

El polinomio $p_1(x)$ es de grado 2 y no tiene raíces racionales, por tanto es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ luego la factorización pedida es $p(x)=(x+1)p_1(x)$. $\square$

106. Teorema de los círculos de Gershgorin

Sea $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n\times n}$. Para cada $i=1,2,\ldots,n$ consideremos los círculos cerrados del plano complejo

$$D_i=D(a_{ii},r_i)=\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{ii}|\le r_i\} \text{ con } r_i=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\,.$$

A tales círculos se les llama *círculos de Gershgorin*. Cada círculo D_i tiene su centro en el elemento a_{ii} de la diagonal principal y su radio es la suma de los módulos de los restantes elementos de la fila i.

(a) Demostrar el teorema de los círculos de Gershgorin:
Cada valor propio de A pertenece a algún círculo de Gershgorin.
(b) Aplicar el teorema a la matriz $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}$.
(c) Idem para la matriz $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&-1\end{bmatrix}$.
(d) Idem para la matriz $A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^{n\times n}$.
(e) Deducir un teorema parecido al de Gershgorin que involucre elementos de columnas.

SOLUCIÓN. (a) Sea λ un valor propio de A y sea $0\neq x=(x_j)$ un vector propio asociado a λ. Llamemos x_i a la coordenada de x de mayor módulo. Claramente $|x_i|>0$ pues en otro caso sería $x=0$. Se verifica $Ax=\lambda x$, es decir

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

o bien,

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda x_i\quad\forall i=1,\ldots,n.$$

De forma equivalente $\sum_{j\neq i}a_{ij}x_j=\lambda x_i-a_{ii}x_i$ y dividiendo ambos miembros entre x_i y tomando módulos

$$|\lambda-a_{ii}|=\left|\frac{\sum_{j\neq i}a_{ij}x_j}{x_i}\right|\le\sum_{j\neq i}\left|\frac{a_{ij}x_j}{x_i}\right|\le\sum_{j\neq i}|a_{ij}|=r_i.$$

Es decir, $\lambda \in D(a_{ii}, r_i)$.

(b) Hallemos sus valores propios:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3 = 0, \ \lambda = \pm\sqrt{3}.$$

Los círculos de Gershgorin son

$$D_1 = D(1, 2), \quad D_2 = D(-1, 1).$$

Con un sencillo gráfico podemos verificar que $-\sqrt{3} \in D_2$ y que $\sqrt{3} \in D_1$. En éste caso, ocurre además que $-\sqrt{3} \notin D_1$ y $\sqrt{3} \notin D_2$.

(c) Sus valores propios:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0, \ \lambda = \pm i.$$

Los círculos de Gershgorin son

$$D_1 = D(1, 1), \quad D_2 = D(-1, 2).$$

Con un sencillo gráfico podemos verificar que $-i \in D_2$, $i \in D_2$. Sin embargo, D_1 no contiene a ningún valor propio de A. Nótese que el teorema de Gershgorin asegura que todo valor propio pertenece a algún círculo, pero puede que algún círculo no contenga valores propios.

(d) Sus valores propios son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y sus círculos de Gershgorin

$$D_1(\lambda_1, 0) = \{\lambda_1\}, \ D_2(\lambda_2, 0) = \{\lambda_2\}, \ \ldots \ , \ D_n(\lambda_n, 0) = \{\lambda_2\}$$

con lo cual, $\lambda_i \in D_i(\lambda_i, 0)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

(e) Dado que toda matriz A y su traspuesta A^T tienen los mismos valores propios, el teorema de Greshgorin sigue siendo válido si consideramos los discos

$$D_i' = D(a_{ii}, r_i') = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i'\} \text{ con } r_i' = \sum_{j \neq i} |a_{ji}| \, .$$

Es decir, cada círculo D_i' tiene su centro en el elemento a_{ii} de la diagonal principal y su radio es la suma de los módulos de los restantes elementos de la columna i. □

107. Derivada $f^{(2016)}(0)$ para $f(x) = x^2 \log(x + 1)$

Calcular $f^{(2016)}(0)$, siendo $f(x) = x^2 \log(x + 1)$.

solución. La regla de Leibniz para la derivada enésima del producto es

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$$

En nuestro caso, tomando $u(x)=\ln(x+1)$ y $v(x)=x^2$:

$$\begin{cases} u^{(0)}(x)=\log(1+x) \\ u^{(1)}(x)=(x+1)^{-1} \\ u^{(2)}(x)=-1(x+1)^{-2} \\ u^{(3)}(x)=2(x+1)^{-3} \\ \dots \\ u^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n} \end{cases} \qquad \begin{cases} v^{(0)}(x)=x^2 \\ v^{(1)}(x)=2x \\ v^{(2)}(x)=2 \\ v^{(3)}(x)=0 \\ \dots \\ v^{(n)}(x)=0 \end{cases}$$

Particularizando en $x=0$:

$$\begin{cases} u^{(0)}(0)=0 \\ u^{(1)}(0)=1 \\ u^{(2)}(0)=-1 \\ u^{(3)}(0)=2 \\ \dots \\ u^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)! \end{cases} \qquad \begin{cases} v^{(0)}(0)=0 \\ v^{(1)}(0)=0 \\ v^{(2)}(0)=2 \\ v^{(3)}(0)=0 \\ \dots \\ v^{(n)}(0)=0 \end{cases}$$

Queda por tanto:

$$f^{(2016)}(0)=(uv)^{(2016)}(0)=\binom{2016}{2}u^{(2014)}(0)v^{(2)}(0)$$

$$=\binom{2016}{2}(-1)(2013)!\cdot 2=-\frac{2016!}{1007}.$$

$\square$

108. Factorización de un polinomio homogéneo en $\mathbb{R}[x,y]$

Factorizar

$$P(x,y)=30x^4-41x^3y-129x^2y^2+100xy^3+150y^4\in\mathbb{R}[x,y].$$

solución. Consideremos $P(x,y)$ como polinomio de $(\mathbb{R}[y])\,[x]$:

$$P(x,y)=30x^4+(-41y)x^3+(-129y^2)x^2+(100y^3)x+150y^4$$

y ensayemos soluciones de la forma $x=ky$. Entonces,

$$P(ky,y)=\left(30k^4-41k^3-129k^2+100k+150\right)y^4=0.$$

Aplicando el teorema de las raíces racionales a la ecuación

$$30k^4-41k^3-129k^2+100k+150=0,$$

obtenemos las soluciones $k=-3/2$ and $k=5/3$, luego

$$x=-\frac{3}{2}y,\quad x=\frac{5}{3}y$$

son raíces de $P(x,y)$. Podemos por tanto escribir

$$P(x,y)=\left(x+\frac{3}{2}y\right)\left(x-\frac{5}{3}y\right)Q(x,y).$$

Usando el algoritmo de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 30 & -41y & -129y^2 & 100y^3 & 150y^4 \\ -\dfrac{3}{2}y & & -45y & 129y^2 & 0 & -150y^4 \\ \hline & 30 & -86y & 0 & 100y^3 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow P(x,y) = \left(x+\frac{3}{2}y\right)(\underbrace{30x^3-86yx^2+100y^3}_{Q_1(x,y)}).$$

Aplicando de nuevo el algoritmo a $Q_1(x,y)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 30 & -86y & 0 & 100y^3 \\ \dfrac{5}{3}y & & 50y & -60y^2 & -100y^3 \\ \hline & 30 & -36y & -60y^2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(x,y) &= \left(x+\frac{3}{2}y\right)(\underbrace{30x^3-86yx^2+100y^3}_{Q_1(x,y)}) \\ &= \left(x+\frac{3}{2}y\right)\left(x-\frac{5}{3}y\right)\left(30x^2-36yx-60y^2\right) \\ &= \frac{1}{6}(2x+3y)(3x-5y)\left(30x^2-36yx-60y^2\right) \\ &= (2x+3y)(3x-5y)\left(5x^2-6yx-10y^2\right). \end{aligned}$$

Factoricemos ahora $Q_2(x,y)=5x^2-6yx-10y^2$. Resolviendo la ecuación de segundo grado en x:

$$5x^2-6yx-10y^2=0, \quad x=\frac{6y\pm\sqrt{236y^2}}{10}=\frac{6y\pm 2\sqrt{59}y}{10},$$

$$x=\frac{3+\sqrt{59}}{5}y, \quad x=\frac{3-\sqrt{59}}{5}y$$

Podemos por tanto expresar

$$\boxed{P(x,y)=5(2x+3y)(3x-5y)\left(x-\frac{3+\sqrt{59}}{5}y\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{59}}{5}y\right)}$$

□

109. Rango de una función definida en $[0,1]$

Determinar el rango de la función $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{(1+x)^{0,6}}{1+x^{0,6}}$.

SOLUCIÓN. La función es elemental y está definida en $[0,1]$, en consecuencia es continua. Analicemos su comportamiento en términos de crecimiento o decrecimiento. Para todo $x \in [0,1]$ tenemos

$$f'(x) = \frac{0{,}6(1+x)^{-0{,}4}\left(1+x^{0{,}6}\right) - 0{,}6x^{-0{,}4}(1+x)^{0{,}6}}{(1+x^{0{,}6})^2}$$

$$= 0{,}6 \cdot \frac{\dfrac{1+x^{0{,}6}}{(1+x)^{0{,}4}} - \dfrac{(1+x)^{0{,}6}}{x^{0{,}4}}}{(1+x^{0{,}6})^2} = 0{,}6 \cdot \frac{x^{0{,}4} + x - (1+x)}{(1+x)^{0{,}4}x^{0{,}4}\,(1+x^{0{,}6})^2}$$

$$= 0{,}6 \cdot \frac{x^{0{,}4} - 1}{(1+x)^{0{,}4}x^{0{,}4}\,(1+x^{0{,}6})^2}.$$

Para todo $x \in [0,1]$ el denominador es positivo y el numerador negativo, luego $f'(x) < 0$ y la función es estrictamente decreciente. Por otra parte tenemos

$$f(0) = 1, \quad f(1) = \frac{2^{0{,}6}}{1+1} = \frac{2^{3/5}}{2} = \frac{1}{2^{2/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}.$$

Del teorema de los valores intermedios para funciones continuas, deducimos que

$$\boxed{\text{rango } f = \left[\frac{1}{\sqrt[5]{4}}, 1\right]}$$

□

110. Topología cociente en X/R

Sea (X, T) un espacio topológico, R una relación de equivalencia en X y $\pi : X \to X/R$ la proyección canónica es decir, la aplicación dada por $\pi(x) = \bar{x}$ en donde $\bar{x}$ es la clase de equivalencia a la que pertenece x.

(a) Demostrar que

$$T_R := \left\{U \subset X/R : \pi^{-1}(U) \in T\right\}$$

es una topología en X/R. Se la denomina *topología cociente de X por R.*
(b) Describir intuitivamente la topología cociente en términos de "pegar puntos".
(c) Demostrar que $\pi : (X, T) \to (X/R, T_R)$ es continua y que T_R es la topología más fina sobre X/R de entre todas las que hacen a π continua.
(d) En $X = \{0, 1, 2, 3\}$ se consideran la topología T y la relación de equivalencia R dadas por

$$T = \{\emptyset, X\{0,1\}, \{2,3\}\}, \quad xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k$$

Determinar la topología cociente T_R.

SOLUCIÓN. (a) Veamos que T_R cumple los tres axiomas de topología.
i) Tenemos $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T$ y $\pi^{-1}(X/R) = X \in T$, luego $\emptyset$ y X/R pertenecen a T_R.
ii) Si $\{U_i : i \in I\}$ es una familia de elementos de T_R entonces, $\pi^{-1}(U_i) \in T$ para todo i, con lo cual

$$\pi^{-1}\left(\bigcup U_i\right) = \bigcup \underbrace{\pi^{-1}(U_i)}_{\in T} \in T \Rightarrow \bigcup U_i \in T_R.$$

iii) Si U_1, U_2 son elementos de T_R entonces, $\pi^{-1}(U_1), \pi^{-1}(U_2) \in T$, con lo cual

$$\pi^{-1}(U_1 \cap U_2) = \underbrace{\pi^{-1}(U_1)}_{\in T} \cap \underbrace{\pi^{-1}(U_2)}_{\in T} \in T \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in T_R.$$

(b) Supongamos, por ejemplo, que $U = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ es abierto en T/R, y sean

$$\bar{x} = \{x_i : i \in I\}, \ \bar{y} = \{y_j : j \in J\}, \ \bar{z} = \{z_k : k \in K\},$$

entonces es abierto en X:

$$\pi^{-1}(\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}) = \{x_i : i \in I\} \cup \{y_j : j \in J\} \cup \{z_k : k \in K\}.$$

Es decir, del conjunto abierto de la derecha en X hemos pasado al abierto $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ de X/R "pegando"los puntos que pertenecen a una misma clase de equivalencia.

(c) Si $U \in T_R$ entonces, $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X por la propia definición de T_R, luego π es continua.
Sea T' una topología en X/R respecto de la cual $\pi : (X, T) \to (X/R, T')$ es continua. Entonces, si $U \in T'$ se verifica $\pi^{-1}(U) \in T$ y por tanto $U \in T_R$. Es decir, $T' \subset T_R$.

(d) Las clases de equivalencia son $\bar{0} = \{0, 3\}$, $\bar{1} = \{1\}$ y $\bar{2} = \{0, 2\}$, por tanto el conjunto cociente es $X/R = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Siempre $\emptyset$ y X pertenecen a la topología cociente. Analicemos los restantes subconjuntos de X/R:

$$\pi^{-1}(\{\bar{0}\}) = \{0, 3\} \notin T \Rightarrow \{\bar{0}\} \notin T_R,$$

$$\pi^{-1}(\{\bar{1}\}) = \{1\} \notin T \Rightarrow \{\bar{1}\} \notin T_R,$$

$$\pi^{-1}(\{\bar{2}\}) = \{2\} \notin T \Rightarrow \{\bar{2}\} \notin T_R,$$

$$\pi^{-1}(\{\bar{0}, \bar{1}\}) = \{0, 3, 1\} \notin T \Rightarrow \{\bar{0}, \bar{1}\} \notin T_R,$$

$$\pi^{-1}(\{\bar{0}, \bar{2}\}) = \{0, 3, 2\} \notin T \Rightarrow \{\bar{0}, \bar{2}\} \notin T_R,$$

$$\pi^{-1}(\{\bar{1}, \bar{2}\}) = \{1, 2\} \notin T \Rightarrow \{\bar{1}, \bar{2}\} \notin T_R.$$

Concluimos que $T_R = \{\emptyset, X\}$ (topología indiscreta). $\square$

111. Acotación del rango del producto de dos matrices

Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y A y B matrices multiplicables con elementos en $\mathbb{K}$. Demostrar que

$$\text{rango }(AB) \leq \text{mín}\{\text{rango } A, \text{rango } B\}.$$

SOLUCIÓN. Supongamos que $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}.$$

Multiplicando,

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1}, \dots, \mathbf{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} b_{11}\mathbf{a_1} + \cdots + b_{n1}\mathbf{a_n} \ , \ \dots \ , \ b_{1p}\mathbf{a_1} + \cdots + b_{np}\mathbf{a_n} \end{bmatrix}.$$

Es decir, las columnas de AB son combinaciones lineales de las columnas de A. Esto implica que el subespacio generado por las columnas de AB está contenido en el generado por las columnas de A y por tanto, rango $(AB) \leq$ rango A.
Veamos ahora que rango $(AB) \leq$ rango B. Usando que rango $M =$ rango M^T y aplicando la propiedad ya demostrada:

$$\text{rango }(AB) = \text{rango }\left((AB)^T\right) = \text{rango }\left(B^T A^T\right) \leq \text{rango } B^T = \text{rango } B.$$

Concluimos pues que

$$\text{rango }(AB) \leq \text{mín}\{\text{rango } A, \text{rango } B\}.$$

□

112. Espacio vectorial como suma directa de dos núcleos

Sea $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(E)$ y $f, g, h \in \mathbb{K}[t]$ tales que

$$f(t) = g(t)h(t), \quad f(T) = 0, \quad g, h \text{ primos entre sí.}$$

Demostrar que $E = \ker g(T) \oplus \ker h(T)$.

SOLUCIÓN. Al ser g y h son primos entre sí, existen (lema de Bezout) polinomios $r(t)$ y $s(t)$ tales que $r(t)g(t) + s(t)h(t) = 1$, lo cual implica que

$$r(T)g(T) + s(T)h(T) = I.$$

Entonces, para todo $x \in E$ se verifica

$$x = r(T)g(T)x + s(T)h(T)x.$$

Veamos que el primer término de la suma anterior pertenece a $\ker h(T)$. En efecto

$$h(T)r(T)g(T)x = r(T)g(T)h(T)x = r(T)\underbrace{f(T)}_{=0}x = 0.$$

De la misma manera se demuestra que el segundo término pertenece a $\ker h(T)$, con lo cual $E = \ker g(T) + \ker h(T)$. Falta demostrar que $\ker g(T) \cap \ker h(T) = \{0\}$. Tenemos

$$\begin{aligned} x \in \ker g(T) \cap \ker h(T) &\Rightarrow g(T)x = 0 \ \wedge \ h(T)x = 0 \\ &\Rightarrow x = r(T)g(T)x + s(T)h(T)x = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Concluimos que $E = \ker g(T) \oplus \ker h(T)$. $\square$

113. Desigualdad de Schwarz y norma en los espacios prehilbertianos

Sea P un espacio prehilbertiano, es decir un espacio vectorial complejo con producto escalar. Para todo $x \in P$ se define la *norma* (o *longitud*) de x como el número real no negativo $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

1. Demostrar que para todo $x, y \in P$ se verifica la desigualdad de Schwarz:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

2. Demostrar que efectivamente la aplicación $\| \ \|$ satisface las tres propiedades de una norma.

solución. 1. Llamemos $a = \langle x, x\rangle \geq 0$, $b = \langle x, y\rangle$, $c = \langle y, y\rangle \geq 0$. Entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle &= \langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \bar{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle \\ &= a + \bar{b}\lambda + b\bar{\lambda} + c\lambda\bar{\lambda} \geq 0. \qquad (*) \end{aligned}$$

Primer caso: $c \neq 0$. Tomando $\lambda = -b/c$ y sustituyendo en $(*)$:

$$\begin{aligned} a - \frac{\bar{b}b}{c} - \frac{b\bar{b}}{c} + c\frac{b\bar{b}}{c^2} = a - \frac{b\bar{b}}{c} \geq 0 \Rightarrow ac - |b|^2 \geq 0 \\ \Rightarrow \|x\|^2 \, \|y\|^2 \geq |\langle x, y\rangle|^2 \Rightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \, . \end{aligned}$$

Segundo caso: $c = 0$. Si $a \neq 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle &= \lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle + \bar{\lambda}\langle y, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= |\lambda|^2 a + \bar{\lambda}\bar{b} + \lambda b \geq 0. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = -\bar{b}/a$ en la desigualdad anterior y teniendo en cuenta que $a > 0$

$$\frac{|b|^2}{a^2}a - \frac{|b|^2}{a} - \frac{|b|^2}{a} = -\frac{|b|^2}{a} \geq 0 \Rightarrow |b|^2 \leq 0,$$

con lo cual ha de ser $b = \langle x, y\rangle = 0$ y la desigualdad $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$ se satisface trivialmente. Por último, si $a = 0$, tomando $\lambda = -b$ en $(*)$ queda $-2b\bar{b} \geq 0$ o bien $b\bar{b} = |b|^2 \leq 0$ lo cual implica que $b = \langle x, y\rangle = 0$ y la desigualdad $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$ de nuevo se satisface trivialmente.

2. (a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle \Leftrightarrow x = 0$.
(b) $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle = |\lambda|^2 \, \|x\|^2$, lo cual implica $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

(c) Tenemos

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle\\ &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\text{Re }\langle x,y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\,|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \underbrace{\leq}_{\text{Des. Schw.}} \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$$

y tomando raíces cuadradas queda $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

114. Espacio prehilbertiano de las sucesiones finitamente no nulas

(a) Sea P el espacio vectorial complejo de las sucesiones complejas $x=(x_n)$ finitamente no nulas, (es decir con sólo un número finito de términos no nulos), con las operaciones habituales. Demostrar que P es prehilbertiano con $\langle x,y\rangle = \sum x_j\overline{y_j}$.
(b) Demostrar que P no es de Hilbert.

SOLUCIÓN. (a) Para todo $x,y\in P$, $\langle y,x\rangle = \sum y_j\overline{x_j} = \sum \overline{x_j\overline{y_j}} = \overline{\sum x_j\overline{y_j}} = \overline{\langle x,y\rangle}$.
Para todo $x,y,z\in P$,

$$\begin{aligned}\langle x+y,z\rangle &= \sum (x_j+y_j)\,\overline{z_j} = \sum (x_j\overline{z_j} + y_j\overline{z_j})\\ &= \sum x_j\overline{z_j} + \sum y_j\overline{z_j} = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle.\end{aligned}$$

Para todo $\alpha\in\mathbb{C}$ y para todo $x\in P$,

$$\langle \alpha x,y\rangle = \sum(\alpha x_j)\overline{y_j} = \sum \alpha(x_j\overline{y_j}) = \alpha\sum x_j\overline{y_j} = \alpha\langle x,y\rangle.$$

Para todo $0\neq x\in P$ existe al menos un x_j no nulo, por tanto:

$$\langle x,x\rangle = \sum x_j\overline{x_j} = \sum |x_j|^2 > 0.$$

(b) Consideremos los elementos de P

$$\begin{aligned}&s_1 = (1,0,0,\ldots)\\ &s_2 = (1,1/2,0,0,\ldots)\\ &s_3 = (1,1/2,1/3,0,0,\ldots)\\ &\ldots\\ &s_n = (1,1/2,1/3,\ldots,1/n,0,0\ldots)\\ &\ldots\end{aligned}$$

Para todo n,k enteros no negativos tenemos

$$\|s_{n+k}-s_n\|^2 = \left\|\left(0,\ldots,0,\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\ldots,\frac{1}{n+k},0,\ldots\right)\right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{n+k}\frac{1}{j^2}.$$

Como la serie $\sum_1^\infty 1/j^2$ es convergente, se verifica

$$d(x_{n+k},x_n) = \|s_{n+k}-s_n\| \to 0 \text{ si } n\to\infty$$

lo cual implica que s_n es sucesión de Cauchy. Veamos ahora que s_n no es convergente en P. En efecto, supongamos que $s_n \to s$ con

$$s = (a_1, a_2, \dots, a_N, 0, 0, \dots) \in P.$$

Para $n \geq N$

$$\|s_n - s\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{1}{j} - a_j \right|^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{1}{j} - a_j \right|^2 + 0.$$

Haciendo $n \to \infty$ obtenemos $\sum_{j=1}^{\infty} |1/j - a_j|^2 = 0$ lo cual exige $a_j = 1/j$ para todo j, que contradice la hipótesis $s \in P$. □

115. $\langle 2, x \rangle$ NO ES IDEAL PRINCIPAL EN $\mathbb{Z}[x]$

Demostrar que el ideal de $\mathbb{Z}[x]$ dado por $I = \langle 2, x \rangle$ no es principal.

SOLUCIÓN. Por definición,

$$I = \langle 2, x \rangle = \{ f(x) \in \mathbb{Z}[x] : f(x) = g(x)x + 2h(x) \text{ con } g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x] \}.$$

El término constante de todo polinomio $f(x)$ ha de ser par y recíprocamente, si

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

con a_0 par, entonces

$$f(x) = \left(a_n x^{n-1} + \cdots + a_1 \right) x + \frac{a_0}{2} \cdot 2 \in I.$$

Por tanto,

$$I = \langle 2, x \rangle = \{ a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 : a_0 \text{ es par} \}.$$

Veamos que I no es ideal principal. En efecto, si lo fuera existiría $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $I = \langle p(x) \rangle$. Pueden ocurrir dos casos.
1) $p(x) = k \neq 0$ constante. Entonces $k = 1 \cdot k \in \langle p(x) \rangle$ y por tanto k ha de ser par. Esto implica que todos los polinomios de I son de la forma $kg(x)$, es decir todos los polinomios de $\langle p(x) \rangle$ tienen todos sus coeficientes pares y $x \notin \langle p(x) \rangle$ (contradicción).
2) $p(x)$ tiene grado ≥ 1. En tal caso, los polinomios de $\langle p(x) \rangle$ tienen grado ≥ 1 y $2 \notin \langle p(x) \rangle$ (contradicción). □

116. TEOREMA DE LA BUENA ORDENACIÓN DE ZERMELO.

Sea E un conjunto no vacío.
(a) Demostrar que en todo subconjunto finito de E se puede definir un buen orden.
(b) Consideremos todos los subconjuntos A de E para los cuales se puede definir un buen orden y elijamos uno de tales órdenes, al que denotamos por $\leq_A$. Llamemos

$$\mathcal{O} = \{ (A, \leq_A) : A \subset E \text{ con } \leq_A \text{ buen orden en } A \}.$$

Definimos en $\mathcal{O}$ la relación $\preceq$

$$(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1) \;\; A \subset B, \\ 2) \;\; \leq_A \text{ es la restricción de } \leq_B \text{ a } A, \\ 3) \;\; a \in A,\ b \in B,\ b <_B a \Rightarrow b \in A. \end{cases}$$

Demostrar que $\preceq$ es relación de orden en $\mathcal{O}$.
(c) Demostrar que si $\mathcal{O}$ tiene un elemento maximal, el conjunto E puede ser bien ordenado.
(d) Demostrar que toda cadena de $\mathcal{O}$ (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior.
(e) Aplicar el lema de Zorn para demostrar que E puede ser bien ordenado.

SOLUCIÓN. (a) Para cualquier subconjunto finito F de E podemos establecer una biyección $j : \{1, 2, \ldots, n\} \to F$ y llamando $j(i) = x_i$ podemos definir el buen orden en F dado por $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

(b) Por el apartado anterior, $\mathcal{O} \neq \emptyset$.
Reflexiva. Trivialmente tenemos $A \subset A$, $\leq_A$ es la restricción de $\leq_A$ a A y $b \in A$ implica $b \in A$, luego $(A, \leq_A) \preceq (A, \leq_A)$.

Antisimétrica. Si $(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$ y $(B, \leq_B) \preceq (A, \leq_B)$ se verifica $A \subset B$ y $B \subset A$, luego $A = B$ y $\leq_A = \leq_B$ por 2), por tanto $(A, \leq_A) = (B, \leq_B)$.

Transitiva. Supongamos que $(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$ y $(B, \leq_B) \preceq (C, \leq_C)$. De la condición 1) se deduce que $A \subset B \subset C$ y de la 2) que $\leq_A$ es la restricción de $\leq_C$ a A.
Sean ahora $a \in A$, $c \in C$ con $c <_C a$. Esto implica que $a \in B$ y $c \in C$ con $a <_C c$ lo cual implica que $c \in B$. Entonces, $a \in A$, $c \in B$ y $c <_B a$ con lo cual $a \in A$. Es decir, $(A, \leq_A) \preceq (C, \leq_C)$.

(c) Sea $(A, \leq_A)$ un elemento maximal en $\mathcal{O}$, veamos que $A = E$. En en efecto, si $A \neq E$ sea $b \in E - A$. En $B = A \cup \{b\}$ podemos definir el orden $\leq_B$ que coincide con $\leq_A$ en A y $a \leq b$ para todo $a \in A$. Claramente $\leq_B$ es un buen orden en B y $(A, \leq_A) \prec (B, \leq_B)$ contra la hipótesis.

(d) Sea $\mathcal{C} = \{(A_\lambda, \leq_{A_\lambda}) : \lambda \in \Lambda\}$ una cadena de $\mathcal{O}$ y sea $\mathcal{F} = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Es claro que la familia $\mathcal{F}$ es ella misma una cadena con respecto de la relación de orden inclusión. Llamemos $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, y vamos a definir un orden en U.
Consideremos un número finito $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de elementos de U. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ existe un $A_i \in \mathcal{F}$ tal que $u_i \in A_i$ y al ser $\mathcal{F}$ una cadena, uno de los A_i (llamemósle A) contiene a todos los A_i y por tanto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset A$. Sea ahora $B \in \mathcal{F}$ con $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset B$, la relación $u_i \leq_A u_j$ implica $u_i \leq_B u_j$ para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pues $\mathcal{C}$ es una cadena.

Tomemos $n = 2$ y definamos el orden $\leq_U$ en U escribiendo $u_1 \leq_U u_2$ si $u_1 \leq_A u_2$ siendo A cualquier elemento de $\mathcal{F}$ que contiene a u_1 y u_2. Claramente la relación $\leq_U$ es reflexiva y antisimétrica y tomando $n = 3$ deducimos que es transitiva. Es además orden total por construcción.
Demostremos que $\leq_U$ es un buen orden en U. Sea $S \subset U$ con $S \neq \emptyset$ y veamos que S tiene elemento mínimo. Sea $s \in S$. Si s es mínimo, ya está demostrado. Si no lo es, sea el conjunto no vacío

$$T = \{t \in S : t <_U s\}.$$

Sea $(A, \leq_A)$ un elemento de la cadena $\mathcal{C}$ tal que $s \in A$ y sea $(B, \leq_B)$ un elemento de la cadena $\mathcal{C}$ tal que $t \in B$. Dado que $\mathcal{F}$ es una cadena, o bien $B \subset A$ y entonces $t \in A$, o bien $A \subsetneq B$ y entonces $s \in A$, $t \in B$, $t <_U s$ luego según la definición del orden $\preceq$ en $\mathcal{O}$, $t \in A$. Es decir, en cualquier caso $t \in A$, luego $T \subset A$.
Como T es subconjunto no vacío de A (que está bien ordenado), T admite un elemento mínimo m en el orden $\leq_A$. Ahora bien, al ser $T \subset A \subset U$, las restricciones de los órdenes $\leq_A$ y $\leq_U$ a T coinciden, luego T admite a m como mínimo en el orden $\leq_U$. Como $\leq_U$ es un orden total, m es también elemento mínimo de S, luego $\leq_U$ es buen orden. Es decir, hemos demostrado que $(U, \leq_U) \in \mathcal{O}$.
Veamos ahora que $(U, \leq_U)$ es cota superior de la cadena $\mathcal{C}$ es decir, veamos que

$$(A, \leq_A) \preceq (U, \leq_U), \quad \forall (A, \leq_A) \in \mathcal{C}.$$

En efecto, $A \subset U$ por construcción y $\leq_A$ es la restricción de $\leq_U$ a A. Sean ahora $a \in A$, $x \in U$ tales que $x <_U a$. Existe un X en la cadena $\mathcal{F}$ que contiene a $\{x\} \cup A$ y consideremos $(X. \leq_X) \in \mathcal{C}$. Entonces,

$$(A, \leq_A) \preceq (X, \leq_X),$$

y por tanto la desigualdad $x <_U a$ implica $x \in A$. Al ser U mayorante mínimo de la cadena $\mathcal{F}$, el par $(U, \leq_U)$ es mayorante mínimo de la cadena $\mathcal{C}$. Hemos demostrado que la cadena $\mathcal{C}$ tiene cota superior.

(e) Por el lema de Zorn, existe un elemento maximal en $(\mathcal{O}, \preceq)$, y como consecuencia del apartado (c), existe un buen orden en E. $\square$

117. Teorema de los valores extremos sobre un compacto

(a) Demostrar el teorema de los valores extremos sobre un compacto: Sea (X, T) un espacio topológico, $K \subset X$ un compacto no vacío y $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua en donde en $\mathbb{R}$ se considera la topología usual. Demostrar que la función f alcanza un máximo y mínimo absoluto en K.
(b) Se considera la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left|x^3 + \cos x\right|$. Demostrar que f alcanza en $[0, 1]$ un máximo y un mínimo absolutos.

SOLUCIÓN. (a) Dado que K es compacto y f is continua, $f(K)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y por tanto cerrado y acotado. Por ser $f(K)$ acotado existen

$$-\infty < m = \inf f(K), \quad M = \sup f(X) < +\infty.$$

Por ser $f(K)$ cerrado, $m, M \in f(K)$ y por tanto existen $x_1, x_2 \in K$ tales que $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ y el teorema queda demostrado.

(b) La función $g(x) = x^3 + \cos x$ es elemental y está definida en $[0,1]$, en consecuencia es continua en tal intervalo. Por otra parte, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = |x|$ es continua y además $f = h \circ g$. Como la composición de funciones continuas es continua, f es continua en el compacto $[0,1]$. Por el teorema anterior, f alcanza en $[0,1]$ un máximo y un mínimo absolutos. $\square$

118. Métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sus valores propios (repetidos o no) y sea

$$\rho(A) = \text{máx}\,\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}.$$

su radio espectral. Según sabemos,

$$\lim_{k\to+\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1 \qquad (1)$$

para cualquier norma en $\mathbb{C}^{n\times n}$.

(a) Sea ahora A invertible y consideremos el sistema lineal $Ax = b$ con $b \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ (sistema que por supuesto es compatible y determinado). Se considera la sucesión definida por

$$x^{(0)} \in \mathbb{C}^{n\times 1}, \quad x^{(m)} = (I - A)x^{(m-1)} + b. \qquad (2)$$

Demostrar que la sucesión $x^{(m)}$ converge a la única solución x del sistema $Ax = b$ si y sólo si, $\rho(I - A) < 1$.

(b) *Método de Jacobi.* Supongamos que la matriz A se puede descomponer en la forma $A = D + T$ con D diagonal y todos los términos de su diagonal principal no nulos. Demostrar que la sucesión iterativa

$$x^{(m)} = -D^{-1}Tx^{(m-1)} + D^{-1}b \qquad (3)$$

tiende a la única solución x del sistema $Ax = b$ para toda elección de $x^{(0)}$ si y sólo si, $\rho(-D^{-1}T) < 1$.

(c) Se considera el sistema lineal $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$. Hallar su solución exacta y una solución aproximada mediante el método de Jacobi para la elección $x^{(0)} = (1,0)^T$ y hasta la cuarta iteración.

(d) *Método de Gauss-Seidel.* Supongamos que la matriz A se puede descomponer en la forma $A = S + T$ con S triangular inferior invertible y

T triangular superior con ceros en la diagonal principal. Demostrar que la sucesión iterativa

$$x^{(m)} = -S^{-1}Tx^{(m-1)} + S^{-1}b \qquad (4)$$

tiende a la única solución x del sistema $Ax = b$ para toda elección de $x^{(0)}$ si y sólo si, $\rho(-S^{-1}T) < 1$.

(e) Para el sistema del apartado (c) hallar una solución aproximada mediante el método de Gauss-Seidel para la elección $x^{(0)} = (1,0)^T$ y hasta la cuarta iteración.

SOLUCIÓN. (a) Llamemos $\epsilon^{(m)} = x^{(m)} - x$. Demostrar que $x^{(m)} \to x$ equivale a demostrar que $\epsilon^{(m)} \to 0$. Llamemos $B = I - A$. Tenemos

$$B\epsilon^{(m-1)} = (I-A)\left(x^{(m-1)} - x\right) = (I-A)x^{(m-1)} - x + \underbrace{Ax}_{b} = x^{(m)} - x = \epsilon^{(m)}.$$

De la relación $\epsilon^{(m)} = B\epsilon^{(m-1)}$ se deduce que $\epsilon^{(m)} = B^m\epsilon^{(0)}$. Entonces, si $\rho(B) < 1$

$$\lim_{m\to+\infty} \epsilon^{(m)} = \lim_{m\to+\infty}\left(B^m\epsilon^{(0)}\right) = \left(\lim_{m\to+\infty} B^m\right)\epsilon^{(0)} \underbrace{=}_{\text{por (1)}} 0\epsilon^{(0)} = 0.$$

Recíprocamente, si $\epsilon^{(m)} \to 0$ para cualquier elección de $x^{(0)}$, eligiendo $\epsilon^{(0)} \neq 0$

$$0 = \lim_{m\to+\infty} \epsilon^{(m)} = \lim_{m\to+\infty}\left(B^m\epsilon^{(0)}\right) = \left(\lim_{m\to+\infty} B^m\right)\underbrace{\epsilon^{(0)}}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to+\infty} B^m = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{por (1)}} \rho(B) < 1.$$

(b) Tenemos las equivalencias

$$Ax = b \Leftrightarrow (D+T)x = b \Leftrightarrow Dx + Tx = b$$

$$\Leftrightarrow x = -D^{-1}Tx + D^{-1}b \Leftrightarrow \left(I + D^{-1}T\right)x = D^{-1}b.$$

Nuestra matriz A es ahora $I + D^{-1}T$ y nuestro b es $D^{-1}b$, en consecuencia la sucesión iterativa (2) se convierte en $x^{(m)} = -D^{-1}Tx^{(m-1)} + D^{-1}b$ que converge a la única solución x del sistema $Ax = b$ para toda elección de $x^{(0)}$ si y sólo si, $\rho(-D^{-1}T) < 1$.

(c) Resolviendo el sistema por el método de Gauss obtenemos su solución exacta: $x = (3,-2)^T$. Apliquemos ahora el método de Jacobi. Tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = D + T,$$

$$-D^{-1}T = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D^{-1}b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\ -7\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\ -7\end{pmatrix}.$$

Los valores propios de $-D^{-1}T$ son $\lambda = \pm 1/2$ luego $\rho(-D^{-1}T) = 1/2 < 1$, lo cual garantiza la convergencia del método de Jacobi. Llamando $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)})^T$ la sucesión iterativa (3) es

$$x^{(m)} = \begin{pmatrix}x_1^{(m)}\\ x_2^{(m)}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^{(m-1)}\\ x_2^{(m-1)}\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\ -7\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}8 + x_2^{(m-1)}\\ -7 + x_1^{(m-1)}\end{pmatrix}.$$

Para la elección $x^{(0)} = (1, 0)^T$ vamos obteniendo

$$x^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}8+0\\ -7+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix},$$

$$x^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}8-3\\ -7+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/2\\ -3/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5\\ -1{,}5\end{pmatrix},$$

$$x^{(3)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}8-3/2\\ -7+5/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13/4\\ -9/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}25\\ -2{,}25\end{pmatrix},$$

$$x^{(4)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}8-9/4\\ -7+13/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}23/8\\ -15/8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}875\\ -1{,}875\end{pmatrix}.$$

(d) La demostración es totalmente análoga a la del apartado (b).

(e) Tenemos

$$A = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = S + T,$$

$$-S^{-1}T = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$S^{-1}b = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\ -7\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}16\\ -6\end{pmatrix}.$$

Los valores propios de $-S^{-1}T$ son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1/4$ luego $\rho(-S^{-1}T) = 1/4 < 1$, lo cual garantiza la convergencia del método de Gauss-Seidel. Llamando $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)})^T$ la sucesión iterativa (4) es

$$x^{(m)} = \begin{pmatrix}x_1^{(m)}\\ x_2^{(m)}\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^{(m-1)}\\ x_2^{(m-1)}\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}16\\ -6\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}16 + 2x_2^{(m-1)}\\ -6 + x_2^{(m-1)}\end{pmatrix}.$$

Para la elección $x^{(0)} = (1, 0)^T$ vamos obteniendo

$$x^{(1)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}16 + 2\cdot 0\\ -6+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ -3/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ -1{,}5\end{pmatrix},$$

$$x^{(2)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}16 + 2\cdot(-3/2)\\ -6-3/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13/4\\ -15/8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}25\\ -1{,}875\end{pmatrix},$$

$$x^{(3)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}16 + 2\cdot(-15/8)\\ -6-15/8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}49/16\\ -63/32\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}0625\\ -1{,}96875\end{pmatrix},$$

$$x^{(4)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16 + 2 \cdot (-63/32) \\ -6 - 63/32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 193/64 \\ -255/128 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}015625 \\ -1{,}9921875 \end{pmatrix}.$$

□

119. Triedro de Frenet, rectas y planos asociados

Se considera la curva γ de ecuaciones paramétricas

$$\gamma : \begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$

(a) Determinar los vectores $\mathbf{T}$ (tangente), $\mathbf{B}$ (binormal) y $\mathbf{N}$ (normal) que determinan el triedro de Frenet de la curva γ en un punto genérico de la misma.
(b) Hallar las ecuaciones de las rectas tangente, binormal y normal a la curva γ en el punto P_0 correspondiente a $t_0 = \pi/2$.
(c) Hallar las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante a la curva γ en el punto P_0.

SOLUCIÓN. (a) Escribiendo γ en forma vectorial, $\mathbf{r} = (1 - \cos t, \sin t, t)$ tenemos

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\sin t, \cos t, 1), \qquad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (\cos t, -\sin t, 0)$$

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin t & \cos t & 1 \\ \cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} - \mathbf{k} = (\sin t, \cos t, -1),$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sin t & \cos t & -1 \\ \sin t & \cos t & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2\cos t)\mathbf{i} - (2\sin t)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (2\cos t, -2\sin t, 0).$$

(b) Tenemos $P_0 = \mathbf{r}(\pi/2) = (1, 1, \pi/2)$. Los vectores del triedro de Frenet en P_0 son

$$\mathbf{T}(\pi/2) = (1, 0, 1),\ \mathbf{B}(\pi/2) = (1, 0, -1),\ \mathbf{N}(\pi/2) = (0, -2, 0).$$

Las rectas pedidas pasan por P_0 y tienen la dirección de los vectores con el mismo nombre que las rectas, por tanto

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\pi/2}{1} \text{ (recta tangente)},$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-\pi/2}{-1} \text{ (recta binormal)},$$

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-\pi/2}{0} \text{ (recta normal)}.$$

(c) El plano osculador contiene a **T** y **N**, por tanto un vector normal es **B**:

$$1(x-1)+0(y-1)-1(z-\pi/2)=0, \text{ o bien } x-z+\pi/2-1=0.$$

El plano normal contiene a **B** y **N**, por tanto un vector normal es **T**:

$$1(x-1)+0(y-1)+1(z-\pi/2)=0, \text{ o bien } x+z-1-\pi/2=0.$$

El plano rectificante contiene a **B** y **T**, por tanto un vector normal es **N**:

$$0(x-1)-2(y-1)+0(z-\pi/2)=0, \text{ o bien } y-1=0.$$

$\square$

120. Caracterizaciones de la continuidad en espacios topológicos

Sean (X,T), (Y,T^*) dos espacios topológicos. Por definición, una aplicación $f:(X,T)\to(Y,T^*)$ es continua sii $f^{-1}(G)\in T$ para todo $G\in T^*$ es decir, si la imagen inversa de todo abierto es abierto.
(a) Sea $\mathscr{B}$ una base de de T^*. Demostrar que

$$f:(X,T)\to(Y,T^*) \text{ es continua} \Leftrightarrow f^{-1}(H)\in T \quad \forall H\in\mathscr{B}.$$

(b) Sea $\mathscr{S}$ una subbase de T^*. Demostrar que

$$f:(X,T)\to(Y,T^*) \text{ es continua} \Leftrightarrow f^{-1}(S)\in T \quad \forall S\in\mathscr{S}.$$

(c) Demostrar que $f:(X,T)\to(Y,T^*)$ es continua $\Leftrightarrow$ la imagen inversa de todo cerrado en Y es cerrado en X.
(d) Demostrar que $f:(X,T)\to(Y,T^*)$ es continua $\Leftrightarrow$ $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ para todo $A\subset X$.
(e) Por definición, $f:(X,T)\to(Y,T^*)$ f es continua en $p\in X$ sii para todo entorno V^* de $f(p)$ se verifica que $f^{-1}(V^*)$ es entorno de p.
Demostrar que $f:(X,T)\to(Y,T^*)$ es continua $\Leftrightarrow$ f es continua en cada punto p de X.

Solución. (a) $\Rightarrow$) Como $\mathscr{B}\subset T^*$, si $H\in\mathscr{B}$ entonces $H\in T^*$ y por tanto, $f^{-1}(H)\in T$ al ser f continua. $\Leftarrow$) Si $G\in T^*$ entonces, al ser $\mathscr{B}$ base de T^*, G es unión de elementos de $\mathscr{B}$: $G=\cup_i H_i$ con $H_i\in\mathscr{B}$. Tenemos

$$f^{-1}(G)=f^{-1}(\cup_i H_i)=\cup_i \underbrace{f^{-1}(H_i)}_{\in T} \underbrace{\Rightarrow}_{T \text{ es topolgía}} \cup_i f^{-1}(H_i)\in T \Rightarrow f \text{ es continua.}$$

(b) $\Rightarrow$) Como $\mathscr{S}\subset T^*$, si $S\in\mathcal{S}$ entonces $S\in T^*$ y por tanto, $f^{-1}(S)\in T$ al ser f continua.
$\Leftarrow$) Si $G\in T^*$ entonces, al ser $\mathscr{S}$ subbase de T^*, G es de la forma

$$G=\cup_i(S_{i_1}\cap\ldots\cap S_{i_{m_i}}) \quad \text{donde} \quad S_{i_k}\in\mathscr{S}.$$

Tenemos

$$f^{-1}(G)=f^{-1}\left(\cup_i(S_{i_1}\cap\ldots\cap S_{i_{m_i}})\right)=\cup_i f^{-1}\left(S_{i_1}\cap\ldots\cap S_{i_{m_i}}\right)$$
$$\cup_i\left(f^{-1}(S_{i_1})\cap\ldots\cap f^{-1}(S_{i_{m_i}})\right).$$

Pero $S_{i_k} \in \mathscr{S}$ implica que $S_{i_k} \in T^*$ y por hipótesis $f^{-1}(S_{i_k}) \in T$. Esto implica que $f^{-1}(G) \in T$ pues es la unión de intersecciones finitas de elementos de T. En consecuencia, f es continua.

(c) $\Rightarrow$) Si F es cerrado en Y, F^c es abierto en Y, y por ser f continua $f^{-1}(F^c)$ es abierto en X. Pero $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$, luego $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.
$\Leftarrow$) Sea $G \subset Y$ abierto. Entonces, G^c es cerrado en Y. Por hipótesis, $f^{-1}(G^c) = (f^{-1}(G))^c$ es cerrado en X, con lo cual $f^{-1}(G)$ es abierto en X por tanto, f es continua.

(d) $\Rightarrow$) Como todo conjunto está contenido en su adherencia, $f(A) \subset \overline{f(A)}$. Entonces,

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

El conjunto $\overline{f(A)}$ es cerrado y por hipótesis f es continua, por tanto $f^{-1}(\overline{f(A)})$ es cerrado luego $A \subset \overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ y por tanto

$$f(\overline{A}) \subset f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subset \overline{f(A)}.$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$ y sea $F \subset Y$ cerrado. Llamemos $A = f^{-1}(F)$. Si demostramos que A es cerrado, o equivalentemente que $\overline{A} = A$, haremos demostrado que f es continua. Tenemos

$$f(\overline{A}) = f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F.$$

Por tanto, $\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(F) = A$. Al ser $A \subset \overline{A}$, el conjunto $A = f^{-1}(F)$ es cerrado.

(e) $\Rightarrow$) Sea V^* un entorno de $f(p)$. Entonces, existe abierto H tal que $f(p) \in H \subset V^*$. Por hipótesis f es continua, luego $f^{-1}(H)$ es abierto y $p \in f^{-1}(H) \subset f^{-1}(V^*)$. Es decir, $f^{-1}(V^*)$ es entorno de p y por tanto f es continua en p.
$\Leftarrow$) Supongamos que f es continua en todo $p \in X$ y sea $H \subset Y$ abierto. Para cada $p \in f^{-1}(H)$ existe un abierto $G_p \subset X$ tal que $p \in G_p \subset f^{-1}(H)$. Es decir,

$$f^{-1}(H) = \bigcup_{p \in f^{-1}(H)} G_p$$

es unión de abiertos y por tanto abierto, luego f es continua. $\square$

121. Números armónicos y constante de Euler-Mascheroni

Se define el n-ésimo número armónico como la suma de los recíprocos de los primeros n números naturales. Se le denota por H_n, es decir

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Demostrar la representación de Euler de los números armónicos:

$$H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,dx.$$

2. Demostrar la expresión combinatoria

$$H_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\binom{n}{k}.$$

3. Demostrar que la sucesión $a_n = H_n - \log n$ es convergente con límite γ que verifica $0 \le \gamma \le 1$. Al número γ se le llama constante de Euler-Mascheroni. *Nota.* Se demuestra que $\gamma \approx 0{,}577$.

SOLUCIÓN. 1. Usando la identidad $\dfrac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$,

$$\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,dx = \int_0^1 (1 + x + \ldots x^{n-1})\,dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n.$$

2. Usando el apartado anterior, tenemos

$$H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,dx \underbrace{=}_{x=1-t} \int_1^0 \frac{1-(1-t)^n}{t}\,(-dt) = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1 - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-t)^k}{t} = \int_0^1 \left[-\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} t^{k-1} \right] dt$$

$$-\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 t^{k-1}\,dt = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\binom{n}{k}.$$

3. Veamos que a_n es monótona decreciente. En efecto,

$$a_{n+1} - a_n = H_{n+1} - H_n - \log(n+1) + \log n$$

$$= \frac{1}{n+1} + \log\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Consideremos la función $f : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(t) = t + \log(1-t)$. Tenemos $f(0) = 0$ y

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{1-t} = \frac{-t}{1-t} < 0 \quad \forall t \in (0,1),$$

lo cual implica que f es estrictamente decreciente en $[0,1)$. Como $1/(n+1) \in (0,1)$ concluimos que $a_{n+1} - a_n < 0$ para todo n y por ende, a_n es monótona decreciente.

Veamos ahora que a_n tiene cota inferior. Para todo $k \ge 2$

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{x} < \frac{1}{k-1} \Rightarrow \frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k-1}$$

$$\Rightarrow H_n - 1 < \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x} < H_{n-1}$$

$$\Rightarrow H_n - 1 < \int_1^n \frac{dx}{x} < H_{n-1} \Rightarrow H_n - 1 < \log n < H_{n-1}$$

$$\Rightarrow -1 < -H_n + \log n < -H_n + H_{n-1} \Rightarrow -1 < -H_n + \log n < -\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow -1 < -a_n < -\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} < a_n < 1.$$

Esto demuestra que 0 es cota inferior de a_n y al ser monótona decreciente, tiene límite $\gamma \geq 0$. Por ser $a_n < 1$, se verifica $\gamma \in [0, 1]$. $\square$

122. Determinante de una matriz solución de un sistema diferencial homogéneo

Sea el sistema diferencial lineal homogéneo de orden n

$$X' = A(t)X. \qquad (H)$$

en donde $A(t) = [a_{ij}(t)]$, $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado de la recta real, y

$$a_{ij} : [a, b] \to \mathbb{K} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{K} = \mathbb{R})$$

son funciones continuas. Sea $\Phi(t) = [\varphi_{ij}(t)]$ una matriz solución de (H), es decir una matriz que satisface $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, lo cual equivale a decir que las columnas de $\Phi(t)$ son soluciones de (H). Sea $t_0 \in [a, b]$.

1. Demostrar que

$$\det \Phi(t) = e^{\displaystyle\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(t)\, dt} \det \Phi(t_0) \quad (\forall t \in [a, b]).$$

2. Demostrar que $\det \Phi(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$ o bien $\det \Phi(t)$ no se anula en ningún punto de $[a, b]$.

SOLUCIÓN. 1. La matriz $\Phi(t)$ es de la forma

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \dots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix}, \text{ con } \varphi_{ij} \in \mathcal{C}^1[a, b] \ \ \forall i, j.$$

Derivando $\det \Phi(t)$ por filas:

$$(\det \Phi(t))' = \begin{vmatrix} \varphi'_{11}(t) & \dots & \varphi'_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \dots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \dots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi'_{n1}(t) & \dots & \varphi'_{nn}(t) \end{vmatrix}. \quad (*)$$

Dado que $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$, se verifica:

$$\begin{bmatrix} \varphi'_{11}(t) & \dots & \varphi'_{1n}(t) \\ \varphi'_{21}(t) & \dots & \varphi'_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi'_{n1}(t) & \dots & \varphi'_{nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \dots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

por tanto

$$\big(\varphi_{11}'(t),\dots,\varphi_{1n}'(t)\big)=\big(a_{11}(t),\dots,a_{1n}(t)\big)\,\Phi(t),$$

y podemos expresar el primer término del segundo miembro de $(*)$ en la forma

$$\begin{vmatrix}\varphi_{11}' & \dots & \varphi_{1n}'\\ \varphi_{21} & \dots & \varphi_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}\varphi_{11}+a_{12}\varphi_{21}+\ldots+a_{1n}\varphi_{n1} & \dots & a_{11}\varphi_{1n}+a_{12}\varphi_{2n}+\ldots+a_{1n}\varphi_{nn}\\ \varphi_{21} & \dots & \varphi_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}.$$

(Hemos prescindido por comodidad de la escritura de t). Efectuando la transformación

$$F_1\to F_1-a_{12}F_2-\ldots-a_{1n}F_n:$$

$$\begin{vmatrix}\varphi_{11}' & \dots & \varphi_{1n}'\\ \varphi_{21} & \dots & \varphi_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}\varphi_{11} & \dots & a_{11}\varphi_{1n}\\ \varphi_{21} & \dots & \varphi_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\Phi(t).$$

De manera análoga se pueden transformar los demás sumandos del segundo miembro de $(*)$, por tanto

$$(\Phi(t))'=a_{11}\det\Phi(t)+\cdots+a_{nn}\det\Phi(t)=(\text{tr}A(t))\det\Phi(t).$$

Llamando $f(t)=\det\Phi(t)$, queda la ecuación diferencial $f'(t)=(\text{tr}A(t))\,f(t)$. Resolviendo:

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=\text{tr}A(t),\ \log|f(t)|=\int_{t_0}^{t}\text{tr}A(t)\;dt+C,$$

$$f(t)=Ke^{\displaystyle\int_{t_0}^{t}\text{tr}A(t)\;dt},\quad f(t_0)=K.$$

Es decir,

$$\det\Phi(t)=e^{\displaystyle\int_{t_0}^{t}\text{tr}A(t)\;dt}\det\Phi(t_0)\quad(\forall t\in[a,b]).\quad(**)$$

2. Si $\det\Phi(t_0)=0$, de $(**)$ se deduce que $\det\Phi(t)=0$ para todo $t\in[a,b]$. Si $\det\Phi(t_0)\neq 0$ entonces, también por $(**)$ y teniendo en cuenta que la función exponencial no se anula nunca, concluimos que $\det\Phi(t)$ no se anula en ningún punto de $[a,b]$. $\square$

123. Variación de las constantes

Usando el método de variación de las constantes hallar la solución general de la ecuación diferencial
$$x'' + x = \frac{1}{\cos t}$$

SOLUCIÓN. Recordamos el método de variación de las constantes. Sea la ecuación diferencial
$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t). \qquad (1)$$
Entonces, si $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada a (1), la solución general de (1) es
$$x(t) = C_1(t)x_1(t) + \ldots + C_n(t)x_n(t)$$
en donde $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ son las soluciones del sistema
$$\begin{cases} x_1(t)C_1'(t) + \ldots + x_n(t)C_n'(t) = 0 \\ x_1'(t)C_1'(t) + \ldots + x_n'(t)C_n'(t) = 0 \\ \ldots \\ x_1^{(n-1)}(t)C_1'(t) + \ldots + x_n^{(n-1)}(t)C_n'(t) = f(t). \end{cases} \qquad (2)$$
En nuestro caso la ecuación homogénea $x'' + x = 0$ es de coeficientes constantes, su ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$, con raíces $\lambda = \pm i$ y una base de su espacio de soluciones está formada por las funciones $x_1(t) = \cos t$ y $x_2(t) = \sin t$. Planteamos el sistema (2) :
$$\begin{cases} C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = 0 \\ -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$$
Su solución es:
$$C_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ \frac{1}{\cos t} & \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = -\tan t \ , \ C_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & \frac{1}{\cos t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = 1.$$
Entonces, $C_1(t) = \log|\cos t| + K_1$ y $C_2(t) = t + K_2$. La solución general de la ecuación dada es por tanto:
$$x(t) = t\sin t + (\cos t)(\log|\cos t|) + K_1\cos t + K_2\sin t \quad (K_1, K_2 \in \mathbb{R}).$$
□

124. Caracterizaciones de cuerpos

Sea A un anillo conmutativo, unitario y no nulo. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
(1) A es un cuerpo.
(2) Los únicos ideales de A son $\{0\}$ y A.
(3) Cada homomorfismo de A en todo anillo conmutativo, unitario y no nulo

B, es inyectivo.
Nota. Se consideran los homomorfismos que cumplen $f(1) = 1$.

SOLUCIÓN. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $I \neq \{0\}$ un ideal de A. Entonces, I contiene un elemento no nulo a. Por hipótesis A es cuerpo, luego a es unidad de A y por tanto

$$I \supset (a) = (1) = A \Rightarrow I = A.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Entonces, $\ker f$ es un ideal de A. Como $f(1) = 1$, ha de ser $\ker f \neq A$ y en consecuencia $\ker f = \{0\}$ con lo cual, f es inyectivo.
(3) $\Rightarrow$ (1). Si $a \in A$ no es invertible entonces $(a) \neq (1)$, luego $A/(a)$ no es el anillo nulo. El homomorfismo canónico $p : A \to A/(a)$ tiene como núcleo $\ker p = (a)$. Por hipótesis p es inyecivo luego $(a) = \{0\}$, lo cual implica $a = 0$. □

125. Norma en un anillo unitario

Sea R un anillo unitario con unidad $1 = 1_R$ y $N : R \to \mathbb{R}^+$ una aplicación. Se dice que N es una *norma* sobre R si se verifican las condiciones

$$\begin{aligned}
&(N1) \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.\\
&(N2) \quad N(xy) = N(x)N(y) \quad \forall x, y \in R.\\
&(N3) \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y) \quad \forall x, y \in R.
\end{aligned}$$

A la condición $(N3)$ se la llama desigualdad triangular. Una norma en un anillo unitario R se dice que es no *arquimediana* si el axioma $(N3)$ es sustituye por la condición más fuerte

$$(N3)' \quad N(x + y) \leq \text{máx}\{N(x), N(y)\} \forall x, y \in R,$$

llamada desigualdad ultramétrica, y si no se cumple $(N3)'$ la norma se dice que es *arquimediana.* Frecuentemente se usa la notación $\|x\|$ en vez de $N(x)$.

1) Sea R cualquier subanillo unitario de los complejos $\mathbb{C}$. Demostrar que $N(x) = |x|$ (valor absoluto) es una norma arquimediana en R (en particular, para $R = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).
2) (Norma trivial). Demostrar que en cualquier subanillo unitario R de los complejos $\mathbb{C}$, la aplicación

$$\|\ \| : R \to \mathbb{R}^+, \qquad \|x\| = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

es una norma no arquimediana.

SOLUCIÓN. 1) Usando las conocidas propiedades del valor absoluto:

$$\begin{aligned}
&(N1) \quad N(x) = |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.\\
&(N2) \quad N(xy) = |xy| = |x|\,|y| = N(x)N(y) \quad \forall x, y \in R.\\
&(N3) \quad N(x + y) = |x + y| \leq |x| + |y| = N(x) + N(y) \quad \forall x, y \in R.
\end{aligned}$$

La norma es arquimediana pues

$$N(1+1) = |1+1| = 2 \not\leq 1 = \text{máx}\{N(1), N(1)\}.$$

2) Por definición $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Sean $x, y \in R$. Tenemos

$$x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow \begin{cases} \|xy\| = 0 = 0 \cdot 0 = \|x\| \, \|y\| \\ \|x+y\| = \|0\| = 0 \leq \|x\| + \|y\| . \end{cases}$$

$$x \neq 0 \wedge y = 0 \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x + y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|xy\| = 0 = 1 \cdot 0 = \|x\| \, \|y\| \\ \|x+y\| = 1 \leq 1 + 0 = \|x\| + \|y\| . \end{cases}$$

El caso $x = 0 \wedge y \neq 0$ se razona análogamente.

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \|xy\| = 1 = 1 \cdot 1 = \|x\| \, \|y\| \\ \|x+y\| \leq 1 \leq 1 + 1 = \|x\| + \|y\| . \end{cases}$$

Por tanto $\| \; \|$ es norma. Usando los resultados anteriores

$$x = y = 0 \Rightarrow \|x+y\| = 0 \leq \text{máx}\{0, 0\} = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} .$$

$$x \neq 0 \wedge y = 0 \Rightarrow \|x+y\| = 1 \leq \text{máx}\{1, 0\} = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\} .$$

El caso $x = 0 \wedge y \neq 0$ se razona análogamente.

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow \|x+y\| \leq 1 \leq \text{máx}\{1, 1\} = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$$

luego la norma no es arquimediana. □

126. Una sucesión de Cauchy con la distancia p-ádica

1) Demostrar que en $R = \mathbb{Q}$ con la norma p-adica la sucesión

$$x_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1}$$

es de Cauchy.
2) Demostrar que es además convergente con límite $x = 1/(1-p) \in \mathbb{Q}$

SOLUCIÓN. 1) Tenemos

$$\begin{aligned} \|x_{n+k} - x_n\|_p &= \left\| p^n + p^{n+1} + \cdots + p^{n+k-1} \right\|_p \\ &= \left\| p^n \left(1 + p + p^2 \cdots + p^{k-1}\right) \right\|_p . \end{aligned}$$

Ahora bien, $\text{ord}_p \left[p^n \left(1 + p + p^2 \cdots + p^{k-1}\right)\right] = n$ y por tanto

$$\|x_{n+k} - x_n\|_p = p^{-n} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < p^n.$$

Eligiendo n_0 tal que $p^{n_0} > 1/\epsilon$, se verifica $\|x_{n+k} - x_n\|_p < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$ y para todo k, luego x_n es sucesión de Cauchy.

2) Dado que $x_n = (p^n - 1)/(p-1)$:

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_p < \epsilon \Leftrightarrow \left\| \frac{p^n - 1}{p-1} - \frac{1}{1-p} \right\|_p &= \left\| \frac{p^n}{p-1} \right\|_p \\ &= p^{-n} = \frac{1}{p^n} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < p^n, \end{aligned}$$

y eligiendo n_0 tal que $p^{n_0} > 1/\epsilon$, se verifica $\|x_n - x\|_p < \epsilon$ si $n \geq n_0$. Nótese que $x_n \to +\infty$ si se considera en $\mathbb{Q}$ la norma del valor absoluto. $\square$

127. Anillo de las sucesiones de Cauchy en un anillo normado

Sea R un anillo unitario con norma $\| \ \|$ y $d(x,y) = \|x - y\|$ la distancia inducida por ella. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto formado por todas las sucesiones de Cauchy en R. Definimos en $\mathcal{C}$ las operaciones:

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n), \quad (x_n) \cdot (y_n) = (x_n y_n).$$

Demostrar que $(\mathcal{C}, +, .)$ es anillo unitario y que es conmutativo si R lo es.

SOLUCIÓN. 1) Veamos que $(\mathcal{C}, +)$ es grupo abeliano.
Interna. Sean $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ dos elementos de $\mathcal{C}$ es decir, dos sucesiones de Cauchy en R. Sea $\epsilon > 0$. Entonces, existen n_1, n_2 números naturales tales que

$$m, n \geq n_1 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \epsilon/2,$$

$$m, n \geq n_1 \Rightarrow \|y_m - y_n\| < \epsilon/2.$$

Si $m, n \geq n_3 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ tenemos

$$\|(x_m + y_m) - (x_n + y_n)\| = \|(x_m - x_n) + (y_m - y_n)\|$$

$$\leq \|x_m - x_m\| + \|y_m - y_n\| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Es decir, $x + y$ es sucesión de Cauchy, luego pertenece a $\mathcal{C}$.
Asociativa. Para todo $x = (x_n), \ y = (y_n), \ z = (z_n)$ elementos de $\mathcal{C}$ y aplicando la propiedad asociativa de la suma de los elementos de R:

$$(x + y) + z = ((x_n) + (y_n)) + (z_n) = (x_n + y_n) + (z_n) = ((x_n + y_n) + z_n)$$
$$= (x_n + (y_n + z_n)) = (x_n) + (y_n + z_n) = (x_n) + ((y_n) + (z_n)) = x + (y + z).$$

Elemento neutro. La sucesión $0 = (0)$, cuyos términos son todos nulos, es elemento neutro para la suma de sucesiones en $\mathcal{C}$, pues trivialmente es de Cauchy y para todo $x = (x_n) \in \mathcal{C}$:

$$x + 0 = (x_n + 0) = (x_n) = x.$$
$$0 + x = (0 + x_n) = (x_n) = x.$$

Elemento simétrico. Dada $x = (x_n) \in \mathcal{C}$, la sucesión $-x = (-x_n)$ es elemento simétrico de x, pues claramente es de Cauchy y

$$x + (-x) = (x_n + (-x_n)) = (0) = 0.$$
$$(-x) + x = ((-x_n) + x_n) = (0) = 0.$$

Conmutativa. Para todo $x = (x_n), \ y = (y_n)$ elementos de $\mathcal{C}$ y usando la propiedad conmutativa de la suma de elementos de R:

$$x + y = (x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) = (y_n + x_n) = (y_n) + (x_n) = y + x.$$

2) Veamos que $(\mathcal{C}, \cdot)$ es semigrupo unitario.
Interna. Recordamos que en todo espacio métrico toda sucesión de Cauchy está acotada. Sean $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ elementos de $\mathcal{C}$. y sea $\epsilon > 0$. Tenemos

$$\forall \epsilon_x > 0 \; \exists n_x : m, n \geq n_x \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \epsilon_x,$$

$$\forall \epsilon_y > 0 \; \exists n_y : m, n \geq n_y \Rightarrow \|y_m - y_n\| < \epsilon_y.$$

Podemos escribir

$$\|x_m y_m - x_n y_n\| = \|x_m y_m - x_m y_n + x_m y_n - x_n y_n\|$$

$$\leq \|x_m\| \, \|y_m - y_n\| + \|y_n\| \| \, \|x_m - x_n\| \, .$$

Sean $X > 0$ e $Y > 0$ cotas superiores de $\|x_n\|$ e $\|y_n\|$ respectivamente y elijamos $\epsilon_x < \epsilon/2Y$, $\epsilon_y < \epsilon/2X$. Sea $n_0 = \text{máx}\{n_x, n_y\}$, entonces

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_m y_m - x_n y_n\| < X \cdot \frac{\epsilon}{2X} + Y \cdot \frac{\epsilon}{2Y} = \epsilon.$$

Hemos demostrado que la suma de elementos de $\mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{C}$.
Asociativa. Para todo $x = (x_n), \; y = (y_n), \; z = (z_n)$ elementos de $\mathcal{C}$ y aplicando la propiedad asociativa del producto de los elementos de R:

$$(xy)z = ((x_n)(y_n))\,(z_n) = (x_n y_n)(z_n) = ((x_n y_n) z_n) =$$
$$(x_n (y_n z_n)) = (x_n)(y_n z_n) = (x_n)\,((y_n)(z_n)) = x(yz).$$

Elemento unidad. La sucesión $1 = (1)$ cuyos elementos son todos iguales a la unidad de R es trivialmente de Cauchy y además para todo $x = (x_n) \in \mathcal{C}$:

$$x1 = (x_n 1) = (x_n) = x,$$
$$1x = (1 x_n) = (x_n) = x,$$

luego $1 = (1)$ es elemento unidad de $\mathcal{C}$.

3) Veamos que la operación producto es distributiva respecto de la suma. En efecto, para todo $x = (x_n), \; y = (y_n), \; z = (z_n)$ elementos de $\mathcal{C}$ y aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma en R:

$$x(y+z) = (x_n)\,((y_n) + (z_n)) = (x_n)(y_n + z_n) = (x_n(y_n + z_n)) =$$
$$(x_n y_n + x_n z_n) = (x_n y_n) + (x_n z_n) = (x_n)(y_n) + (x_n)(z_n) = xy + xz,$$

y análogamente se demuestra $(x + y)z = xz + yz$.

Concluimos que $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ es un anillo unitario. Además, si R es conmutativo también $\mathcal{C}$ es conmutativo pues para todo $x = (x_n), \; y = (y_n)$ elementos de $\mathcal{C}$ y usando la propiedad conmutativa del producto en R:

$$xy = (x_n)(y_n) = (x_n y_n) = (y_n x_n) = (y_n)(x_n) = yx.$$

$\square$

128. Ideal de las sucesiones nulas en el anillo de las sucesiones de Cauchy

Sea R un anillo unitario con una norma $\| \ \|$ y $\mathcal{C}$ el anillo unitario de las sucesiones de Cauchy sobre R. Demostrar que el conjunto I formado por las sucesiones nulas sobre R (es decir, con límite 0) es un ideal de $\mathcal{C}$.

SOLUCIÓN. (a) Sean $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ elementos de I. Como $(x_n) \to 0$ e $(y_n) \to 0$, para todo $\epsilon > 0$ existen números naturales n_1 y n_2 tales que

$$n \geq n_1 \Rightarrow \|x_n\| < \frac{\epsilon}{2}, \quad n \geq n_2 \Rightarrow \|y_n\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ tenemos:

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - y_n\| = \|x_n + (-1)y_n\| \leq \|x_n\| + \|(-1)y_n\|$$

$$= \|x_n\| + \|(-1)\| \, \|y_n\| = \|x_n\| + 1 \, \|y_n\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Es decir, $(x_n - y_n) \to 0$ y por tanto, $x - y \in I$.

(b) Si $x = (x_n) \in \mathcal{C}$ e $y = (y_n) \in I$ entonces $\|x_n\|$ está acotada e $(y_n) \to 0$. Sea $K > 0$ tal que $\|x_n\| < K$ para todo n. Para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $\|y_n\| < \epsilon/K$ si $n \geq n_0$. Entonces,

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n y_n\| = \|x_n\| \, \|y_n\| < K \cdot \frac{\epsilon}{K} = \epsilon$$

es decir, $(x_n y_n) \to 0$ con lo cual $xy \in I$. Análogamente se demuestra que $yx \in I$. Concluimos que I es ideal de $\mathcal{C}$.
Nota. Como consecuencia, queda automáticamente definido el anillo cociente $\mathcal{C}/I$. $\square$

129. Norma en el anillo cociente $\widehat{R}$ de las sucesiones de Cauchy sobre el ideal de las nulas

1) Sea R anillo unitario con norma $\| \ \|$. Demostrar que

$$|\|a\| - \|b\|| \leq \|a - b\|, \quad \forall a, b \in R.$$

Es decir,que el valor absoluto de la diferencia de normas es menor o igual que la norma de la diferencia.
2) Sea R anillo unitario con norma $\| \ \|_R$ y sea $\widehat{R} = \mathcal{C}/I$ el anillo cociente de las sucesiones de Cauchy en R sobre el ideal I de las sucesiones nulas en R, y designemos por $\{x_n\}$ la clase a la que pertenece (x_n). Es decir,

$$\widehat{R} = \{\{x_n\} = (x_n) + I : (x_n) \text{ es sucesión de Cauchy en } R\}.$$

Demostrar que la aplicación $\| \ \|_{\widehat{R}} : \widehat{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$\|\{x_n\}\|_{\widehat{R}} = \text{lím} \, \|x_n\|_R$$

es una norma en el anillo unitario $\widehat{R}$.

SOLUCIÓN. 1) Podemos escribir

$$\|a\| = \|(a-b)+b\| \leq \|a-b\| + \|b\| \Rightarrow \|a\| - \|b\| \leq \|a-b\|.$$

Análogamente, $\|b\| - \|a\| \leq \|b-a\| = \|a-b\|$, de lo cual se deduce

$$|\|a\| - \|b\|| \leq \|a-b\|.$$

2) Veamos primeramente que $\text{lím} \|x_n\|_R$ existe y es ≥ 0. En efecto al ser (x_n) de Cauchy, para todo $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que si $m, n \geq n_0$ entonces $\|x_m - x_n\|_R < \epsilon$. Usando que el valor absoluto de la diferencia de normas es menor o igual que la norma de la diferencia:

$$|\|x_m\|_R - \|x_n\|_R| \leq \|x_m - x_n\|_R < \epsilon \text{ si } m, n \geq n_0.$$

Esto prueba que $\|x_n\|_R$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ (que es completo) con lo cual es convergente. Pero $\|x_n\|_R \geq 0$ para todo n, luego $\text{lím} \|x_n\|_R \in \mathbb{R}^+$.

Veamos que $\|\{x_n\}\|_{\widehat{R}} = \text{lím} \|x_n\|_R$ no depende del representante de la clase. Efectivamente, si $\{x_n\} = \{x'_n\}$ entonces $(x_n - x'_n) \in I$ es decir, $\text{lím}\,(x_n - x'_n) = 0$ con lo cual

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow \left\|x_n - x'_n\right\|_R < \epsilon \Rightarrow \left|\|x_n\|_R - \left\|x'_n\right\|_R\right| < \epsilon.$$

Es decir, $\text{lím}\,(\|x_n\|_R - \|x'_n\|_R) = 0$ y al existir y ser finitos $\text{lím} \|x_n\|_R$ y $\text{lím} \|x'_n\|_R$ se concluye

$$\text{lím} \|x_n\|_R = \text{lím} \left\|x'_n\right\|_R$$

y la aplicación $\| \ \|_{\widehat{R}} : \widehat{R} \to \mathbb{R}^+$ está bien definida.

Veamos ahora que $\|\{x_n\}\|_{\widehat{R}} = \text{lím} \|x_n\|_R$ es una norma en $\widehat{R}$.
(1) Tenemos las siguientes equivalencias

$$\|\{(x_n\}\|_{\widehat{R}} = 0 \Leftrightarrow \text{lím} \|x_n\|_R = 0 \Leftrightarrow \text{lím}\, x_n = 0 \Leftrightarrow (x_n) \in I$$

$$\Leftrightarrow (x_n) - (0) \in I \Leftrightarrow (x_n) + I = (0) + I \Leftrightarrow \{x_n\} = \{0\},$$

y $\{0\}$ es el cero de la suma en $\widehat{R}$.

(2) Para todo $\{x_n\}, \{y_n\} \in \widehat{R}$:

$$\|\{x_n\} \cdot \{y_n\}\|_{\widehat{R}} = \|\{x_n y_n\}\|_{\widehat{R}} = \text{lím} \|x_n y_n\|_R$$

$$= (\text{lím} \|x_n\|_R)\,(\text{lím} \|y_n\|_R) = \|\{x_n\}\|_{\widehat{R}} \|\{y_n\}\|_{\widehat{R}}.$$

(3) Para todo $\{x_n\}, \{y_n\} \in \widehat{R}$:

$$\|\{x_n\} + \{y_n\}\|_{\widehat{R}} = \|\{x_n + y_n\}\|_{\widehat{R}} = \text{lím} \|x_n + y_n\|_R \leq \text{lím}\,(\|x_n\|_R + \|y_n\|_R)$$

$$= \text{lím} \|x_n\|_R + \text{lím} \|y_n\|_R = \|\{x_n\}\|_{\widehat{R}} + \|\{y_n\}\|_{\widehat{R}}.$$

$\square$

130. R como subanillo de $\widehat{R}$

Sea R anillo unitario y $\widehat{R} = \mathcal{C}/I$ el anillo cociente de las sucesiones de Cauchy de R sobre el ideal I de las sucesiones nulas de R. Sea la aplicación $\phi : R \to \widehat{R}$ dada por $\phi(a) = \overline{(a)}$ en donde (a) representa la sucesión constante de término general a. Demostrar que ϕ es un homomorfismo inyectivo de anillos.

solución. Para todo $a, b \in R$ tenemos

$$\phi(a+b) = \overline{(a)+(b)} = \overline{(a)} + \overline{(b)} = \phi(a) + \phi(b),$$

$$\phi(ab) = \overline{(a)(b)} = \overline{(a)}\ \overline{(b)} = \phi(a)\phi(b),$$

lo cual prueba que ϕ es homomorfismo de anillos. Además $\phi(1) = \overline{(1)}$ es decir, ϕ transforma la unidad de R en la unidad de $\widehat{R}$. Por otra parte

$$\ker \phi = \{a \in R : \phi(a) = \widehat{(0)}\} = \{a \in R : \widehat{(a)} = \widehat{(0)}\}$$

$$= \{a \in R : a - 0 \in I\} = \{I\} = \{0 + I\}$$

es decir, el núcleo de ϕ se reduce al cero de $\widehat{R}$ lo cual prueba que ϕ es inyectivo.

Consecuencia. R es isomorfo al subanillo Im ϕ de $\widehat{R}$ i.e. $R \cong \phi(R)$, con lo cual R se puede considerar como un subanillo de $\widehat{R}$. Además, la norma $\| \ \|_{\widehat{R}}$ de $\widehat{R}$ extiende a la norma $\| \ \|_R$ de R pues $\|\{a\}\|_{\widehat{R}} = \text{lím}\, \|a\|_R = \|a\|_R$. □

131. Completación de todo anillo normado

1) Sea (X, d) un espacio métrico cualquiera. Sea (b_n) una sucesión de Cauchy en X y (a_n) una sucesión en X tal que $d(a_n, b_n) < 1/n$ para cada n natural. Demostrar que
(i) (a_n) es también sucesión de Cauchy en X.
(ii) (a_n) converge a p en X si y sólo si, (b_n) converge a p en X.

2) Sea R anillo unitario con norma $\| \ \|_R$. Demostrar que $\widehat{R}$ es completo con la norma $\| \ \|_{\widehat{R}}$. Además, R es denso en $\widehat{R}$.

3) Demostrar que si R es cuerpo, también $\widehat{R}$ es cuerpo.

solución. 1) (i) Por la desigualdad triangular,

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, b_m) + d(b_m, a_n)$$

$$\leq d(a_m, b_m) + d(b_m, b_n) + d(b_n, a_n).$$

Sea $\epsilon > 0$. Entonces, existe n_1 tal que $1/n_1 < \epsilon/3$ y por tanto

$$n, m \geq n_1 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \epsilon/3 + d(b_m, b_n) + \epsilon/3.$$

Como (b_n) es de Cauchy,

$$\exists n_2 \text{ tal que } n, m \geq n_2 \Rightarrow d(b_m, b_n) < \epsilon/3.$$

Eligiendo $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$,

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

lo cual prueba que (a_n) es de Cauchy.
(ii) Por la desigualdad triangular, $d(b_n, p) \leq d(b_n, a_n) + d(a_n, p)$. Entonces,

$$0 \leq \text{lím}\, d(b_n, p) \leq \text{lím}\, d(b_n, a_n) + \text{lím}\, d(a_n, p).$$

Usando la hipótesis $d(a_n, b_n) < 1/n$:

$$0 \leq d(a_n, b_n) < 1/n \Rightarrow$$

$$0 \leq \text{lím}\, d(a_n, b_n) \leq \text{lím}(1/n) = 0 \Rightarrow \text{lím}\, d(a_n, b_n) = 0$$

Si $\text{lím}\, a_n = p$, tenemos $\text{lím}\, d(a_n, p) = 0$ y por tanto,

$$0 \leq \text{lím}\, d(b_n, p) \leq 0 \Rightarrow \text{lím}\, d(b_n, p) \Rightarrow \text{lím}\, b_n = p.$$

De manera análoga se demuestra que si $\text{lím}\, b_n = p$ entones, $\text{lím}\, a_n = p$.

2) Podemos considerar a R como subanillo de $\widehat{R}$ identificando cada elemento a de R con el elemento $\{a\}$ de $\widehat{R}$. Veamos sucesivamente:

(a) Toda sucesión de Cauchy en R tiene límite en $\widehat{R}$.
Sea (x_m) una sucesión de Cauchy en R. Esta sucesión puede tener o no límite en R pero seguro que lo tiene en $\widehat{R}$ a saber: $x = \{x_n\}$. Efectivamente, identificando

$$x_1 = \{x_1\}, x_2 = \{x_2\}, \ldots, x_m = \{x_m\}, \ldots$$

podemos escribir

$$\lim_{m\to+\infty} \|\{x_m\} - x\|_{\widehat{R}} = \lim_{m\to+\infty} \|\{x_m\} - \{x_n\}\|_{\widehat{R}}$$

$$= \lim_{m\to+\infty} \|\{x_m - x_n\}\|_{\widehat{R}} = \lim_{m\to+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} \|x_m - x_n\|_R \right)$$

$$= \lim_{m\to+\infty n\to+\infty} \|x_m - x_n\|_R \underbrace{=}_{(x_n)\text{ de Cauchy en } R} 0 \Rightarrow (x_m) \to x = \{x_n\}.$$

(b) R es denso en $\widehat{R}$.
Bastará demostrar que cada elemento de $\widehat{R}$ es el límite de una sucesión de R. Sea $x = \overline{(x_n)}$ un elemento arbitrario de $\widehat{R}$. Entonces, la sucesión (x_m) es de Cauchy en R y por (1), x es el límite de la sucesión (x_m) de R.

(c) $\widehat{R}$ es completo.
En efecto, sea (α_n) una sucesión de Cauchy en $\widehat{R}$. Cono R es denso en $\widehat{R}$, para todo n natural

$$\exists x_n \in R \text{ tal que } \|x_n - \alpha_n\|_{\widehat{R}} < 1/n.$$

Por el apartado 1), (x_n) es también una sucesión de Cauchy y por (2), su límite es $x \in \widehat{R}$. También, por el apartado 1), $\text{lím}\, \alpha_n = x$ y por tanto, (α_n)

converge en $\widehat{R}$.

3) Si $\{x_n\} \in \widehat{R}$ es no nulo, tiene norma $k > 0$. Entonces,

$$k = \|\{x_n\}\|_{\widehat{R}} = \text{lím}\,\|x_n\|_R > 0,$$

con lo cual existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $\|x_n\|_R > k/2$ y por tanto $x_n \neq 0$ si $n \geq n_0$. Definimos la sucesión (y_n) en R dada por $y_n = 1$ si $n < n_0$, $y_n = x_n^{-1}$ si $n \geq n_0$. La sucesión (y_n) es de Cauchy y además

$$\text{lím}\, x_n y_n = 1 \Rightarrow (x_n y_n) - (1) \to 0 \Rightarrow (1) = \{x_n y_n\} = \{x_n\}\{y_n\}.$$

Es decir, $\{x_n\}$ tiene inverso $\{y_n\}$ en $\widehat{R}$.

Nota. Si $\mathbb{Q}$ es el cuerpo de los números racionales con la norma del valor absoluto, entonces $\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ es la clásica y conocida construcción del cuerpo de los numeros reales con la topología usual. $\square$

132. Conservación de normas no arquimediadas por completación

1) Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes de números reales. Demostrar que la sucesión $\text{máx}\{a_n, b_n\}$ es convergente con límite:

$$\text{lím}\,(\text{máx}\{a_n, b_n\}) = \text{máx}\{\text{lím}\, a_n, \text{lím}\, b_n\}.$$

2) Si $\|\ \|_R$ es no arquimediana en el anillo R, demostrar que también $\|\ \|_{\widehat{R}}$ es no arquimediana en el anillo $\widehat{R}$.

Solución. 1) Supongamos que $(a_n) \to A$ y $(b_n) \to B$. Sea $c_n = \text{máx}\{a_n, b_n\}$. Si $A > B$ llamemos $2d = A - B > 0$. Existen n_1 n_2 tales que

$$n \geq n_1 \Rightarrow a_n > A - d, \quad n \geq n_2 \Rightarrow b_n < B + d.$$

Dado que $A - d = B + d$, si $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ entonces $c_n = a_n$ si $n \geq n_0$ y por tanto, $\text{lím}\, c_n = A$. Si $B > A$, análogo razonamiento para demostrar que $\text{lím}\, c_n = B$. Sea por último $A = B$. Si la sucesión (c_n) está formada por infinitos términos de (a_n) e infinitos términos de (b_n) entonces, (c_n) está formada por dos subsucesiones que tienen el mismo límite $A = B$ y por tanto, $(c_n) \to A = B$. Si sólo aparece un número finito de términos de (a_n) entonces, $(c_n) \to B$ y si sólo aparece un número finito de términos de (b_n) entonces, $(c_n) \to A$, En cualquier caso, $(c_n) \to A = B$.

2) Sean $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \widehat{R}$. Entonces,

$$\|x + y\|_{\widehat{R}} = \|\{x_n\} + \{y_n\}\|_{\widehat{R}} = \|\{x_n + y_n\}\|_{\widehat{R}} = \text{lím}\,\|x_n + y_n\|_R$$

$$\leq \text{lím}\,(\text{máx}\,\{\|x_n\|_R\,, \|y_n\|_R\}) \underbrace{=}_{\text{Apartado 1)}} \text{máx}\,\{\text{lím}\,\|x_n\|_R\,, \text{lím}\,\|y_n\|_R\}$$

$$= \text{máx}\left\{\|x\|_{\widehat{R}}\,, \|y\|_{\widehat{R}}\right\} \Rightarrow \|\ \|_{\widehat{R}} \text{ es no arquimediana.}$$

$\square$

133. Cuerpo $\mathbb{Q}_p$ de los números p-ádicos y subanillo $\mathbb{Z}_p$

Sea $\mathbb{Q}$ el anillo de los números racionales con la norma p-ádica $\| \ \|_p$ y sea $\mathbb{Q}_p := \widehat{\mathbb{Q}}$. Al anillo $\mathbb{Q}_p$ se le llama *anillo de los números p-ádicos.* La norma en $\mathbb{Q}_p$ también se la designará por $\| \ \|_p$.

Nota. Dado que si un anillo unitario R es cuerpo también lo es $\widehat{R}$, se concluye que $\mathbb{Q}_p$ es cuerpo.

Se llama conjunto de los *enteros p-ádicos* al disco cerrado:

$$\mathbb{Z}_p = \{\alpha \in \mathbb{Q}_p : \|\alpha\|_p \leq 1\}.$$

Demostrar que el conjunto de los enteros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ es un subanillo conmutativo y unitario de $\mathbb{Q}_p$.

SOLUCIÓN. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$. Dado que la norma $\| \ \|_p$ en $\mathbb{Q}_p$ es no arquimediana,

$$\|\alpha + \beta\|_p \leq \text{máx}\{\|\alpha\|_p, \|\beta\|_p\} \leq 1$$
$$\|\alpha\beta\|_p = \|\alpha\|_p \|\beta\|_p \leq 1$$

es decir, $\alpha + \beta$ y $\alpha\beta$ pertenecen a $\mathbb{Z}_p$ luego $\mathbb{Z}_p$ es subanillo de $\mathbb{Q}_p$. Es conmutativo por serlo $\mathbb{Q}_p$ y es unitario pues $\|1\|_p = 1$. $\square$

134. Sucesiones eventualmente constantes con normas no arquimedianas

Sea R anillo unitario con una norma no arquimediana $\| \ \|$. Sea (a_n) una sucesión de Cauchy en R y $b \in R$ tal que $\lim a_n \neq b$. Demostrar que existe n_0 tal que

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \|a_m - b\| = \|a_n - b\|.$$

Es decir, la sucesión de números reales $(\|a_n - b\|)$ es eventualmente constante. En particular, si (a_n) no es no nula, la sucesión $(\|a_n\|)$ es eventualmente constante.

SOLUCIÓN. Usando que el valor absoluto de la diferencia de normas es menor o igual que la norma de la diferencia

$$|\|a_m - b\| - \|a_n - b\|| \leq \|a_m - a_n\|.$$

Por tanto, la sucesión $(\|a_n - b\|)$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y en consecuencia, convergente. Sea $l = \lim \|a_n - b\|$. Ha de ser $l > 0$ pues en caso contrario tendríamos $\lim a_n = b$ contra la hipótesis. Existe por tanto n_1 tal que

$$n \geq n_1 \Rightarrow \|a_n - b\| > \frac{l}{2}. \qquad (1)$$

Por ser (a_n) de Cauchy, existe n_2 tal que

$$m, n \geq n_2 \Rightarrow \|a_m - a_n\| < \frac{l}{2}. \qquad (2)$$

Llamando $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ y para $m, n \geq n_0$

$$\|a_m - b\| = \|(a_n - b) + (a_m - a_n)\|$$

$$\leq \max\{\|a_n - b\|, \|a_m - a_n\|\} \underbrace{=}_{\text{Por (1) y (2)}} \|a_n - b\|.$$

□

135. Fórmula de Stirling

1) Se consideran las sucesiones

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n}, \quad b_n = \log a_n.$$

Demostrar que $b_n - b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(2n+1)\log\dfrac{n+1}{n} - 1.$

2) Usar los desarrollos en series de Maclaurin de las funciones $\log(1+x)$ y $-\log(1-x)$ para demostrar que

$$b_n - b_{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k}.$$

3) Demostrar que la sucesión (b_n) es decreciente y está acotada inferiormente.

4) Demostrar que para una constante real C se verifica la siguiente aproximación de Stirling

$$n! \sim C\sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ para } n \to +\infty.$$

5) Sea $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Demostrar que

$$I_n = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}\ (\forall n \geq 2).$$

6) Usando la relación del apartado anterior, demostrar que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}.$$

7) Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1.$

8) Demostrar la siguiente fórmula de Wallis:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

9) Demostrar que la fórmula de Wallis se puede expresar en la forma

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n!)^2)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

10) Demostrar la fórmula de aproximación de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad (n \to +\infty).$$

SOLUCIÓN. 1) Tenemos:

$$b_n - b_{n+1} = \log a_n - \log a_{n+1} = \log a_n \cdot \frac{1}{a_{n+1}} =$$

$$\log \frac{n!}{\sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \cdot \frac{\sqrt{2(n+1)}\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$\log \frac{1}{n+1} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{e}\right) =$$

$$-\log(n+1) + \frac{1}{2}\log\frac{n+1}{n} + n\log(n+1) - n\log n + \log(n+1) - 1$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{n+1}{n} + n\log\frac{n+1}{n} - 1 =$$

$$\frac{1}{2}(2n+1)\log\frac{n+1}{n} - 1.$$

2) Los desarrollos en series de Maclaurin de las funciones $\log(1+x)$ y $-\log(1-x)$ son

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \quad |x| < 1,$$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots, \quad |x| < 1,$$

y de estos dos desarrollos obtenemos

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) = 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1. \quad (*)$$

Fácilmente deducimos que

$$\frac{n+1}{n} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2n+1},$$

y este x cumple $|x| < 1$. Sustituyendo este x en $(*)$ obtenemos

$$\log\frac{n+1}{n} = 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1}}{2k+1} = 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1}.$$

Usando el apartado 1:

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2}(2n+1)\log\frac{n+1}{n} - 1$$

$$= \frac{1}{2}(2n+1)\cdot 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1} - 1$$

$$= (2n+1)\left(\frac{1}{2n+1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1}\right) - 1$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{2k} - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{2k}.$$

3) Por el apartado anterior, $b_n - b_{n+1}$ es la suma de una serie convergente de números positivos es decir, $b_n - b_{n+1} > 0$ luego (b_n) es decreciente (estríctamente). Por otra parte,

$$b_n - b_{n+1} < \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)^2} \right)^k \underbrace{=}_{\text{Serie geom.}} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{4} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Podemos expresar

$$b_1 - b_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n)$$

$$< \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j(j+1)} < \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

En consecuencia, $b_n > b_1 - 1/4$, lo cual implica que (b_n) está acotada inferiormente.

4) Como (b_n) es decreciente y está acotada inferiormente, (b_n) tiene límite $L \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} e^{b_n} = e^{\lim_{n\to+\infty} b_n} = e^L = C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2n} \left(\dfrac{n}{e} \right)^n} = C \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{C\sqrt{2n} \left(\dfrac{n}{e} \right)^n} = 1$$

$$\Rightarrow n! \sim C\sqrt{2n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \text{ para } n \to +\infty.$$

5) Usando integración por partes con $u = \sin^{n-1} x$ y $dv = \sin x \, dx$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x \, dx$$

$$= \left[-\sin^{n-1} x \cos x \right]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.$$

Obtenemos por tanto la relación: $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (\forall n \geq 2)$.

6) Para n par tenemos

$$I_n = \frac{(n-1)(n-3) \cdot \ldots \cdot 1}{n(n-2) \cdot \ldots \cdot 2} I_0 = \frac{(n-1)(n-3) \cdot \ldots \cdot 1}{n(n-2) \cdot \ldots \cdot 2} \int_0^{\pi/2} dx$$

$$= \frac{(n-1)(n-3) \cdot \ldots \cdot 1}{n(n-2) \cdot \ldots \cdot 2} \frac{\pi}{2}.$$

Para n impar

$$I_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2}{n(n-2)\cdot\ldots\cdot 3}\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \frac{(n-1)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2}{n(n-2)\cdot\ldots\cdot 3}\cdot 1.$$

Podemos por tanto escribir

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k},\quad I_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1},$$

y usando estas relaciones

$$\frac{\pi}{2} = I_{2n}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}$$

$$= I_{2n}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}\right)^{-1}$$

$$= \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}.$$

7) Veamos que (I_n) es una sucesión decreciente de términos positivos. En efecto, para todo $x\in[0,\pi/2]$ y para todo $n\geq 1$ se verifica $0\leq\sin^n x\leq\sin^{n-1}x\leq 1$. Tenemos pues la relación $1/I_{n-1}\leq 1/I_n\leq 1/I_{n+1}$. Multiplicando por I_{n+1} y por el apartado 5

$$\frac{n}{n+1} = \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}}\leq\frac{I_{n+1}}{I_n}\leq\frac{I_{n+1}}{I_{n+1}} = 1$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Teor. Sandwich}}\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1.$$

8) Tomando límites cuando $n\to+\infty$ en la igualdad demostrada en el apartado 6 queda

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}.$$

9) Operando obtenemos

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1))(3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1))(2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n!)^2)\,(2n+1)}.$$

10) En el apartado 4 demostramos que $n! \sim C\sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ para $n \to +\infty$ para cierta constante C. Usando esta aproximación en la fórmula del apartado anterior obtenemos

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}C^4(2n)^2\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}}{C^2 4n\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}(2n+1)} = C^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}4n^2n^{4n}}{4n(2n)^{4n}(2n+1)}$$

$$= C^2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{C^2}{2} \Rightarrow C = \sqrt{\pi}$$

y por tanto

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad (n \to +\infty).$$

Queda demostrada la fórmula de aproximación de Stirling. □

136. Teorema de compactificación de Alexandrov

Sea (X, T) un espacio topológico. Sea $X_\infty := X \cup \{\infty\}$, en donde ∞ representa cualquier elemento tal que $\infty \notin X$ y al que llamamos *punto del infinito*. Consideremos la clase T_∞ de subconjuntos de X_∞:

$$T_\infty = T \cup \{A \cup \{\infty\} : A \subset X \text{ y } X - A \text{ es cerrado y compacto}\}$$

es decir, T_∞ está formada por los elementos de T y los complementos en X_∞ de los subconjuntos cerrados y compactos de X. Se trata de demostrar el *teorema de compactificación de Alexandrov por un único punto*, es decir que (X_∞, T_∞) es un espacio topológico compacto.

1) Demostrar que T_∞ es una topología en X_∞.
2) Demostrar que T es la topología $T_\infty|_X$ inducida por T_∞ sobre X.
3) Demostrar que (X_∞, T_∞) es un espacio compacto lo cual probará el teorema de Alexandrov.
4) Demostrar que si X no es compacto entonces X es denso en X_∞.
5) Demostrar el siguiente lema:
Sea Y un espacio compacto, Z un espacio de Haussdorf y $f : Y \to Z$ biyectiva y continua. Entonces, f es homeomorfismo.
6) *Aplicación*. Sea $X = (0, 1)$ y $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ambos con la topologías inducidas por la usuales de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente y llamemos $P = (1, 0) \in S^1$. Demostrar que

$$f : X_\infty \to S^1, \quad f(t) = \begin{cases} (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) & \text{si} \quad t \in (0,1) \\ P & \text{si} \quad t = \infty \end{cases}$$

es un homeomorfismo. Es decir, topológicamente $X_\infty = S^1$.

Solución. 1) Veamos que T_p cumple los tres axiomas de topología.
(a) $\emptyset \in T_\infty$ pues $\emptyset \in T$. Por otra parte, $X_\infty \in T_\infty$ pues $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ y $X - X = \emptyset$ es cerrado y compacto.
(b) Sean $V_1, V_2 \in T_\infty$ y llamemos $V = V_1 \cap V_2$. Si $\infty \in V$ entonces,

$V_1 = A_1 \cup \{\infty\},\ V_2 = A_2 \cup \{\infty\}$ con $X - A_1$ y $X - A_2$ cerrados y compactos.

Entonces, $V = A \cup \{\infty\}$ con $A = A_1 \cap A_2$. Tenemos

$$X - A = X - (A_1 \cap A_2) = (X - A_1) \cup (X - A_2).$$

La última unión es un conjunto cerrado y compacto por ser unión de dos cerrados y compactos, por tanto $V = V_1 \cap V_2 \in T_\infty$.
Si $\infty \notin V$ entonces, o bien ∞ no pertenece ni a V_1 ni a V_2, o bien pertenece a uno de ellos pero no al otro. En el primer caso $V_1, V_2 \in T$, luego $V \in T$ y por tanto $V \in T_\infty$.
Supongamos ahora y sin pérdida de generalidad que $\infty \in V_1$, $\infty \notin V_2$. Entonces $V_1 = A_1 \cup \{\infty\}$ con $X - A_1$ cerrado y acotado, y $V_2 \in T$. Entonces,

$$V = V_1 \cap V_2 = (A_1 \cup \{\infty\}) \cap V_2 = (A_1 \cap V_2) \cup (\underbrace{\{\infty\} \cap V_2}_{=\emptyset}) = A_1 \cap V_2.$$

Pero $A_1 \in T$ al ser $X - A_1$ cerrado en X, y por tanto $V \in T$ lo cual implica $V \in T_\infty$.
(c) Sea $G_i \in T_\infty$ para todo $i \in I$ y llamemos $G = \bigcup_{i\in I} G_i$. Analicemos el caso en el que $\infty \notin G$:

$$\infty \notin G \Rightarrow \infty \notin G_i \ \forall i \in I \Rightarrow G_i \in T \ \forall i \in I \Rightarrow G = \bigcup_{i\in I} G_i \in T \Rightarrow G \in T_\infty.$$

Si $\infty \in G$, podemos descomponer el subconjunto de índices I en la forma $I = I_1 \sqcup I_2$ en donde $\infty \notin G_i$ si $i \in I_1$ y $\infty \in G_i$ si $i \in I_2$. En el segundo caso, podemos escribir $G_i = A_i \cup \{\infty\}$ con $A_i \subset X$ y $X - A_i$ cerrado y compacto. Podemos escribir

$$G = A \cup \{\infty\} \text{ con } A = (\cup_{i\in I_1} G_i) \cup (\cup_{i\in I_2} A_i).$$

Aplicando las leyes de Morgan,

$$\begin{aligned} X - A &= X - [(\cup_{i\in I_1} G_i) \cup (\cup_{i\in I_2} A_i)] \\ &= [\cap_{i\in I_1}(X - G_i)] \cap [\cap_{i\in I_2}(X - A_i]. \end{aligned}$$

Entonces, $X - A$ es cerrado en X y está contenido en $X - A_k$ $(k \in I_2)$ que es compacto, con lo cual $X - A$ también es compacto y $G \in T_\infty$. Queda demostrado que T_∞ es topología en X_∞.

2) Efectivamente, por definición de topología inducida,

$$T_\infty|_X = \{G \cap X : G \in T_\infty\}$$

$$= \{G \cap X : G \in T \vee G = A \cup \{\infty\} \text{ con } X - A \text{ cerrado y compacto}\}$$

$$= \{G \cap X : G \in T\} \cup \{G \cap X : G = A \cup \{\infty\} \text{ con } X - A \text{ cerrado y compacto}\}$$

$$= T \cup \{A : X - A \text{ es compacto y } A \text{ es abierto}\} = T.$$

3) Sea $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ un recubrimiento abierto de X_∞. Existe $i_0 \in I$ tal que $\infty \in G_{i_0}$. Ahora bien, $X - G_{i_0}$ es un conjunto compacto y está recubierto

por $\mathcal{G}$, luego existe un número finito de elementos $G_{i_1},\ldots,G_{i_m}\in\mathcal{G}$ cuya unión contiene a $X-G_{i_0}$. Entonces,

$$\mathcal{G}_1=\{G_{i_0},G_{i_1},\ldots,G_{i_m}\}$$

es un subrecubrimiento de $\mathcal{G}$ que contiene a X_∞, con lo cual X_∞ es compacto. Queda demostrado el teorema de compactificación de Alexandrov.

4) Tenemos que demostrar que $\overline{X}=X_\infty$. Razonemos por reducción al absurdo:

$$\begin{aligned}\overline{X}\neq X_\infty &\Rightarrow \overline{X}=X\Rightarrow X \text{ es cerrado en } X_\infty\\ &\Rightarrow X_\infty-X=\{\infty\} \text{ es abierto en } X_\infty.\end{aligned}$$

Dado que $\{\infty\}=\emptyset\cup\{\infty\}$, ha de ser $X-\emptyset=X$ cerrado y compacto, en contradicción con la hipótesis.

5) Al ser f continua, f^{-1} transforma conjuntos cerrados en conjuntos cerrados. Es suficiente demostrar que f transforma conjuntos cerrados en conjuntos cerrados. Pero si F es cerrado en Y entonces es compacto y por tanto $f(F)$ es compacto. Dado que Z es Hausdorff, $f(F)$ es cerrado en Z.

6) Si t recorre el intervalo $(0,1)$ entonces, $2\pi t$ recorre el intervalo $(0,2\pi)$ con lo cual $(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$ recorre inyectivamente todos los puntos de S^1 salvo $P=(1,0)$. Esto implica que f es biyectiva. Claramente f es continua si $t\neq\infty$. Para demostrar la continuidad en $P=(1,0)$, sea V un entorno de P. Este entorno ha de contener un conjunto de la forma

$$W=\{(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t):-\epsilon<t<\epsilon\} \text{ para algún } \epsilon>0.$$

Ahora bien, $f^{-1}(V)\supset f^{-1}(W)=X_\infty-[\epsilon,1-\epsilon]$ y éste último conjunto es abierto en X_∞ al ser $[\epsilon,1-\epsilon]$ cerrado y compacto. Es decir, $f^{-1}(V)$ es entorno de ∞, lo cual completa la demostración de la continuidad de f. Ahora, basta aplicar el lema del apartado anterior. $\square$

137. Matriz equivalente en forma canónica

Se considera la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ cuya matriz con respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ es:

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&0&1\\2&-4&-1&1\\3&-6&-2&3\end{bmatrix}$$

1) Determinar unas bases B y B' de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente tales que

$$[f]_B^{B'}=\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

2) Determinar matrices P y Q invertibles de orden 4 tales que

$$Q^{-1}AP=\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix},$$

lo cual probará que A es equivalente a diag $(I_r, 0)$ (que está en forma canónica).

SOLUCIÓN. 1) Hallemos el rango de A

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ 3 & -6 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \sim \\ F_3 - 2F_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango } A = 2.$$

Las ecuaciones de $\ker f$ son

$$\ker f : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Asignando a las variables libres los valores x_2 y x_4 primero los valores $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ y luego $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, obtenemos la base del núcleo de f:

$$B_{\ker f} = \{u_3 = (2, 1, 0, 0)^T,\ u_4 = (1, 0, 3, 1)^T\}.$$

Una base de la imagen estará formada por dos columnas linealmente independientes de la matriz A (por ejemplo la primera y la tercera):

$$B_{\text{Im } f} = \{v_1 = (-1, 2, 3)^T,\ v_2 = (0, -1, -2)^T\}.$$

Llamando $u_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ y $u_2 = (0, 0, 1, 0)^T$ tenemos $f(u_1) = v_1,\ f(u_2) = v_2$. Tenemos construida una base de $\mathbb{R}^4$:

$$B = \{u_1 = (1, 0, 0, 0)^T, u_2 = (0, 0, 1, 0)^T, u_3 = (2, 1, 0, 0)^T, u_4 = (1, 0, 3, 1)^T\}.$$

Una base de $\mathbb{R}^3$ se obtiene añadiendo a los vectores v_1 y v_2 el vector $v_3 = (0, 0, 1)^T$:

$$B' = \{v_1 = (-1, 2, 3)^T,\ v_2 = (0, -1, -2)^T, v_3 = (0, 0, 1)^T\}.$$

En consecuencia,

$$\begin{cases} f(u_1) = v_1 \\ f(u_2) = v_2 \\ f(u_3) = 0 \\ f(u_4) = 0 \end{cases} \Rightarrow [f]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) Si P es la matriz de cambio de la canónica de $\mathbb{R}^4$ a B y Q la de cambio de la canónica de $\mathbb{R}^3$ a B', por un conocido teorema la matriz de f con respecto a las bases B y B' es $Q^{-1}AP$. Por tanto

$$Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y la matrices pedidas son

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Queda pues probado que A es equivalente a la matriz en forma canónica diag $(I_2, 0)$. $\square$

138. Representación paramétrica regular

Sea I un intervalo de la recta real y $E = \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Se llama *representación paramétrica regular* a cualquier aplicación

$$\mathbf{x} : I \to E, \quad t \to \mathbf{x}(t)$$

que satisface las condiciones

$$\begin{aligned} &(1) \quad \mathbf{x} \in \mathcal{C}^1(I). \\ &(2) \quad \mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0} \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

1. Demostrar que las siguientes aplicaciones son representaciones paramétricas regulares

$$\begin{aligned} &(a) \quad \mathbf{x} : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}(t) = (2t, 1 + t^2). \\ &(b) \quad \mathbf{x} : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin(t/2)). \end{aligned}$$

2. Demostrar que si $\mathbf{x}$ es una representación paramétrica regular en el intervalo I entonces, para todo $t_0 \in I$ existe un entorno de t_0 en el cual $\mathbf{x}$ es inyectiva. Interpretar el resultado.

Solución. 1. (a) Las funciones componentes de $\mathbf{x}$, $x_1(t) = 2t$, $x_2(t) = 1 + t^2$ son claramente de clase 1 en $(-\infty, +\infty)$, luego también lo es $\mathbf{x}$. Además, $\mathbf{x}'(t) = (1, 2t) \neq (0, 0)$ para todo t.
(b) Tenemos $\mathbf{x}'(t) = (-\sin t, \cos t, \cos(t/2))$, luego $\mathbf{x}$ es de clase 1 en $\mathbb{R}$. Por otra parte

$$\left|\mathbf{x}'(t)\right| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \cos^2(2t)} = \sqrt{1 + \cos^2(2t)} \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}'(t) \neq (0, 0, 0) \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. Como $\mathbf{x}$ es representación paramétrica regular, $\mathbf{x}'(t_0) \neq \vec{0}$ con lo cual alguna de las componentes de $\mathbf{x}'(t_0)$ ha de ser no nula, por ejemplo $x_1'(t_0) \neq 0$. Al ser x_1' continua en t_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$x_1'(t) \neq 0 \text{ si } t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) = I_1. \qquad (*)$$

Veamos que x_1 es inyectiva en I_1. En efecto, si existieran $t_1 < t_2$ en I_1 tales que $x_1(t_1) = x_2(t_2)$, por el teorema de Rolle, $x_1'(\xi) = 0$ para algún $\xi \in (t_1, t_2)$ en contradicción con $(*)$. Por tanto x_1 es intectiva en I_1 y como consecuencia también lo es $\mathbf{x}$. Lo anterior prueba que en un entorno de t_0 no existen puntos dobles es decir, no ocurre $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$ si $t_1 \neq t_2$. $\square$

139. Fórmula de Bayes

Sea $(E, \mathscr{B}, p)$ un espacio probabilístico, $B, A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{B}$ con probabilidades no nulas, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mutuamente excluyentes y que forman un sistema exhaustivo, es decir,

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j, \quad \text{y} \quad A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E.$$

1. Demostrar el *teorema de la probabilidad total*, es decir

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)\, p(B \mid A_i).$$

2. Demostrar la *fórmula de Bayes*, es decir que para todo $i = 1, \ldots, n$:

$$p(A_i \mid B) = \frac{p(A_i)\, p(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(A_j)\, p(B \mid A_j)}.$$

3. *Aplicación.* Tenemos tres urnas con las siguientes composiciones: A_1 tres bolas blancas y una negra, A_2 dos blancas y dos negras y A_3 una blanca tres negras. Se extrae una bola al azar de una de las urnas y resulta ser blanca. Determinar la probabilidad de que proceda de la urna A_3.

Solución. 1. Podemos escribir

$$p(B) = p(B \cap E) = p\left(B \cap (\cup_i A_i)\right) = P\left(\cup_i (B \cap A_i)\right).$$

Dado que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, También $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset$ y por tanto,

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)\, p(B \mid A_i).$$

2. Por definición de probabilidad condicionada:

$$p(A_i \cap B) = p(A_i)\, p(B \mid A_i) = p(B)\, p(A_i \mid B).$$

Usando el teorema de la probabilidad total:

$$p(A_i \mid B) = \frac{p(A_i)\, p(B \mid A_i)}{p(B)} = \frac{p(A_i)\, p(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(A_j)\, p(B \mid A_j)}.$$

3. Llamemos A_1, A_2, A_3 a los sucesos elegir la urna A_1, A_2, A_3 respectivamente y B al suceso la bola extraída es blanca. Tenemos

$$P(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = \frac{1}{3},$$

$$p(B \mid A_1) = \frac{3}{4}, \quad p(B \mid A_2) = \frac{2}{4}, \quad p(B \mid A_3) = \frac{1}{4}.$$

Aplicando la fórmula de Bayes,

$$P(A_3 \mid B) = \frac{\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{4}\right)} = \frac{1}{6}.$$

□

140. Distribución de Poisson

Se define la distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$ como:

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

en donde λ es un número real positivo.
1. Demostrar que la distribución de Poisson es una distribución de probabilidad.
2. Determinar su media y desviación típica.
3. Demostrar que los límites cuando $n \to +\infty$ de las probabilidades $p_k(n)$ de una distribución binomial $B(n, p)$, son las p_k de una distribución de Poisson con $\lambda = np$ (constante).
Nota. Esto significa que la distribución de Poisson aproxima bien la binomial cuando n es grande y p pequeño. Se considera que la aproximación es buena si $p < 0,1$ y $np < 5$.
4. *Aplicación.* Supóngase que el $2\,\%$ de los artículos producidos por una fábrica son defectuosos. Hallar la probabilidad P de que halla 3 artículos defectuosos en un lote de 100 artículos.

solución. 1. Para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$ es $p_k \geq 0$. Por otra parte,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

2. La media es

$$\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \cdot 1 = \lambda.$$

La varianza es $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p_k - \mu^2$. Tenemos

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{k!}$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda (\sum_{k=0}^{+\infty} k p_k + \sum_{k=0}^{+\infty} p_k)$$

$$= \lambda(\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow \sigma^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

En consecuencia, la desviación típica de la distribución de Poisson es $\sigma = \sqrt{\lambda}$.
3. La probabilidad de k éxitos en una distribución binomial $B(n, p)$ es

$$p_k(n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Si denotamos $\lambda = np$,

$$\begin{aligned} p_k(n) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}. \end{aligned}$$

Cuando $n \to +\infty$, el primer factor es constante, el segundo tiende a $e^{-\lambda}$ y el tercero tiende a 1 al haber un número finito de factores en el numerador y el denominador que todos tienden a 1. En consecuencia,

$$\lim_{n \to +\infty} p_k(n) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p_k.$$

4. Se trata de una distribución binomial con $n = 100$ y $p = 0{,}02$. Entonces,

$$P = \binom{100}{3} (0{,}02)^3 (0{,}98)^{97} = 0{,}182\ldots.$$

Ahora bien, al ser n grande y p pequeño, podemos aplicar la distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 100 \cdot 0{,}02 = 2$, con lo cual

$$P \approx p_3 = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0{,}180\ldots.$$

$\square$

141. Cambio admisible de parámetro

Sea I_u un intervalo de la recta real y $t : I_u \to \mathbb{R}$ una aplicación. Se dice que la función $t = t(u)$ es un ¡em¿cambio admisible de parámetro¡/em¿sii

$$(1)\ t \in \mathcal{C}^1(I_u). \quad (2)\ \frac{dt}{du} \neq 0 \ \ \forall u \in I_u.$$

1. Demostrar que las siguientes aplicaciones son cambios admisibles de parámetro

$$(a)\ t = 3u^5 + 10u^3 + 15u + 1 \text{ en } I_u = \mathbb{R}.$$

$$(b)\ t = \tan \frac{\pi u}{2} \text{ en } I_u = [0, 1).$$

2. Demostrar que si t es cambio admisible de parámetro en I_u entonces, t es en I_u estrictamente creciente o estrictamente decreciente.
3. Demostrar que si t es cambio admisible de parámetro en I_u entonces, $I_t := t(I_u)$ es un intervalo de la recta real y que $t : I_u \to I_t$ es biyectiva.
4. Demostrar que la inversa de un cambio admisible de parámetro también es cambio admisible de parámetro.

SOLUCIÓN. 1. (a) Tenemos $dt/du = 15u^4 + 30u^2 + 15 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Por otra parte

$$\frac{dt}{du} = 15u^4 + 30u^2 + 15 = 15(u^4 + 2u^2 + 1) = (u^2 + 1)^2 \neq 0 \ \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

(b) Si u recorre el intervalo $[0, 1)$ entonces, $\pi u/2$ recorre el intervalo $[0, \pi/2)$ y en éste último intervalo el coseno no se anula, en consecuencia,

$$\frac{dt}{du} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos^2 \dfrac{\pi u}{2}} \in \mathcal{C}^1([0, 1)) \ \text{ y } \ \frac{dt}{du} \neq 0 \ \ \forall u \in [0, 1).$$

2. Dado que dt/du es no nula y continua en I_u, por el teorema de Bolzano no puede tomar dt/du valores de distinto signo, luego $dt/du > 0$ en I_u con lo cual t es estrictamente creciente, o bien $dt/du < 0$ en I_u con lo cual t es estrictamente decreciente.
3. Como I_u es intervalo de la recta real, es conjunto conexo. Al ser t continua, $I_t = t(I_u)$ es también conexo y por tanto es un intervalo de la recta real. Al ser t estrictamente creciente o estrictamente decreciente, es inyectiva. Es sobreyectiva por construcción.
4. Si $t : I_u \to I_t$ es cambio admisible de parámetro y $u : I_t \to I_u$ es su función inversa, entonces

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\underbrace{dt/du}_{\neq 0}} \neq 0.$$

Además, al ser dt/du continua, también lo es du/dt. □

142. Curvas regulares

Se dice que la representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in I_t$ es *equivalente* a la representacion paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(u)$, $u \in I_u$ sii existe un cambio admisible de parámetro $t = t(u)$ en I_u tal que $t(I_u) = I_t$ y además

$$\mathbf{x}[t(u)] = \mathbf{x}^*(u) \quad \forall u \in I_u.$$

1. Demostrar que la relación definida anteriormente es una relación de equivalencia sobre el conjunto de las representaciones paramétricas regulares.
2. Se llama *curva regular* a cada una de las clases de equivalencia de la relación anterior. Demostrar que las dos siguientes representaciones paramétricas regulares definen la misma curva regular.

$$\mathbf{x} : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \sin t \\ x_3 = e^t \end{cases} (t \in \mathbb{R}), \quad \mathbf{x}^* : \begin{cases} x_1 = \log t \\ x_2 = \sin \log t \\ x_3 = t \end{cases} (t \in (0, +\infty)).$$

SOLUCIÓN. 1. *Reflexiva.* Sea la representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in I_t$ y consideremos la aplicación identidad $t : I_u = I_t \to I_t$, $t = u$. Claramente $t = u$ es un cambio admisible de parámetro y además

$$\mathbf{x}[t(u)] = \mathbf{x}(u) \quad \forall u \in I_u.$$

Simétrica. Si la representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in I_t$ equivalente a la representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(u)$, $u \in I_u$, existe un cambio admisible de parámetro $t : I_u \to I_t$, $t = t(u)$ tal que

$$\mathbf{x}[t(u)] = \mathbf{x}^*(u) \quad \forall u \in I_u.$$

Sabemos que la aplicación inversa $u : I_t \to I_u$, $u = u(t)$ es un cambio admisible de parámetro y además

$$\mathbf{x}^*[u(t)] = \mathbf{x}^*(u) = \mathbf{x}[t(u)] = \mathbf{x}(t) \quad \forall t \in I_t,$$

luego $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(u)$, $u \in I_u$ es equivalente a $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in I_t$.
Transitiva. Sean las representaciones regulares

$$R_1 : \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \\ t \in I_t \end{cases} \quad R_2 : \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}^*(u) \\ u \in I_u \end{cases} \quad R_3 : \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}^{**}(\theta) \\ \theta \in I_\theta. \end{cases}$$

Si R_1 es equivalente a R_2 y R_2 a R_3, existen cambios admisibles de parámetro $t : I_u \to I_t$, $t = t(u)$ y $u : I_\theta \to I_u$, $u = u(\theta)$ tales que

$$\mathbf{x}[t(u)] = \mathbf{x}^*(u) \ \ \forall u \in I_u, \quad \mathbf{x}^*[u(\theta)] = \mathbf{x}^{**}(\theta) \ \ \forall \theta \in I_\theta.$$

Consideremos la composición de los cambios admisibles de parámetro

$$t \circ u : I_\theta \to I_t, \quad \theta \to t = t[u(\theta)]$$

Aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{dt}{d\theta} = \underbrace{\frac{dt}{du}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\frac{du}{d\theta}}_{\neq 0} \Rightarrow \frac{dt}{d\theta} \neq 0 \text{ en } I_\theta,$$

y dt/du, $du/d\theta$ son continuas, en consecuencia, $t \circ u : I_\theta \to I_t$ es cambio admisible de parámetro y además

$$\mathbf{x}[(t \circ u)(\theta)] = \mathbf{x}[t(u(\theta))] = \mathbf{x}^*[u(\theta)] = \mathbf{x}^{**}(\theta) \ \ \forall \theta \in I_\theta$$

por tanto, R_1 es equivalente a R_3.
2. Consideremos la aplicación $t : (0.+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $t = \log u$. Entonces, $dt/du = 1/u$ es continua y no nula para todo $u \in (0, +\infty)$, con lo cual es un cambio admisible de parámetro. Por otra parte

$$\mathbf{x}[t(u)] = \mathbf{x}(\log u) = (\log u, \sin \log u, u) = \mathbf{x}^*(u) \quad \forall u \in (0, +\infty),$$

lo cual prueba que definen la misma curva regular. □

143. EDO homogénea con coeficiente analíticos

Se considera la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (E)$$

en donde las funciones p y q son analíticas en el intervalo $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ con desarrollos

$$p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

1. Supongamos que $y(x)$ es una solución de (E) analítica en I, esto es

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Demostrar que se verifican las relaciones de recurrencia

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)a_{k+1}b_{n-k} + a_k c_{n-k}\right], \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (*)$$

2. Las relaciones recurrentes anteriores definen a_{n+2} en función de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ y de los de $p(x)$ y $q(x)$ y por ende, $a_2, a_3, a_4, \ldots$ en función de a_0, a_1 y de los de $p(x)$ y $q(x)$. Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ es convergente en I, con lo cual estará demostrado que $y(x)$ es solución de (E).
3. Demostrar que existen dos funciones analíticas de (E) que son linealmente independientes.
Nota. En general, se puede demostrar que para la ecuación homogénea

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0 y = 0 \quad (n \geq 1)$$

con coeficientes $p_{n-1}(x), \ldots, p_0(x)$ funciones analíticas en el intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$, existen n funciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ linealmente independientes y analíticas en dicho intervalo.
4. Aplicación. Dar una solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - xy' + 4y = 0$$

que sea analítica en $\mathbb{R}$. Expresarla como combinación lineal de dos funciones linealmente independientes.

SOLUCIÓN. **1.** Usando la derivación término a término de las series de potencias

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n,$$
$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x - x_0)^n.$$

Usando la fórmula del producto de Cauchy para series absolutamente convergentes:

$$q(x)y(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_n c_{n-k} \right) (x - x_0)^n,$$
$$p(x)y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} b_{n-k} \right) (x - x_0)^n.$$

Sustituyendo en la ecuación (E):

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)a_{k+1}b_{n-k}+a_kc_{n-k}\right)\right](x-x_0)^n=0.$$

Por tanto se han de verificar las relaciones:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=-\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)a_{k+1}b_{n-k}+a_kc_{n-k}\right],\quad \forall n=0,1,2,\ldots.$$

2. Para $x=x_0$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ converge trivialmente. Sea $x_1\in I$ con $x_1\neq x_0$ y llamemos $t=|x_1-x_0|$. Como las series $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(x_1-x_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(x_1-x_0)^n$ son absolutamente convergentes en x_1, sus términos están acotados en valor absoluto, es decir existen constantes positivas K_1 y K_2 tales que

$$|b_k|\,t^k\le K_1,\quad |c_k|\,t^k\le K_2,\quad \forall k=0,1,2,\ldots$$

Llamando $K=\text{máx}\{K_1,K_2\}$ se verifica

$$|b_k|\le\frac{K}{t^k},\quad |c_k|\le\frac{K}{t^k},\quad \forall k=0,1,2,\ldots$$

Usando las relaciones anteriores junto con las relaciones de recurrencia $(*)$:

$$\begin{aligned}(n+2)(n+1)\,|a_{n+2}|&=\left|\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)a_{k+1}b_{n-k}+a_kc_{n-k}\right]\right|\\ &\le\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)\,|a_{k+1}|\,|b_{n-k}|+|a_k|\,|c_{n-k}|\right]\\ &\le\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)\,|a_{k+1}|\,\frac{M}{t^{n-k}}+|a_k|\,\frac{M}{t^{n-k+1}}\right]\\ &=\frac{M}{t^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,|a_{k+1}|\,t^{k+1}+\sum_{k=0}^{n}|a_k|\,t^k\right].\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\sum_{k=0}^{n}|a_k|\,t^k=|a_0|+\sum_{k=1}^{n}|a_k|\,t^k=|a_0|+\sum_{k=0}^{n}|a_{k+1}|\,t^{k+1}-|a_{n+1}|\,t^{n+1},$$

con lo cual

$$(n+2)(n+1)\,|a_{n+2}|\le$$

$$\frac{M}{t^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,|a_{k+1}|\,t^{k+1}+|a_0|+\sum_{k=0}^{n}|a_{k+1}|\,t^{k+1}-|a_{n+1}|\,t^{k+1}\right]$$

$$\le\frac{M}{t^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,|a_{k+1}|\,t^{k+1}+|a_0|+\sum_{k=0}^{n}|a_{k+1}|\,t^{k+1}\right]$$

$$= \frac{M}{t^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{n}(k+2)\left|a_{k+1}\right|t^{k+1}+\left|a_0\right|\right] = \frac{M}{t^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}(k+1)\left|a_k\right|t^k.$$

Definamos la sucesión $\{A_n\}_{n\geq 0}$ de la forma recurrente

$$\begin{cases} A_0 = \left|a_0\right|, \ A_1 = \left|a_1\right|, \\ (n+2)(n+1)A_{n+2} = \dfrac{M}{t^{n+1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(k+1)A_k t^k. \quad (**) \end{cases}$$

Como $|a_n| \leq A_n$ para todo $n \geq 0$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|\,|x-x_0|^n$ está mayorada por la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}A_n\,|x-x_0|^n$, para todo $x \in I$ con lo cual si la segunda es convergente, lo será la primera. Sustituyendo n por $n-1$ en $(**)$:

$$(n+1)nA_{n+1} = \frac{M}{t^n}\sum_{k=0}^{n}(k+1)A_k t^k.$$

Multiplicando por t^{-1}:

$$(n+1)nt^{-1}A_{n+1} = \frac{M}{t^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}(k+1)A_k t^k.$$

Restando a la igualdad $(**)$ la igualdad anterior

$$(n+2)(n+1)A_{n+2} - (n+1)nt^{-1}A_{n+1} = M(n+2)A_{n+1},$$

de lo cual se deduce

$$\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} = \frac{(n+1)n + M(n+2)t}{(n+2)(n+1)t} \text{ y } \lim_{n\to+\infty}\frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} = \frac{1}{t}.$$

Aplicando el criterio de D'Alembert para $x \in I$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A_{n+2}\left|x-x_0\right|^{n+2}}{A_{n+1}\left|x-x_0\right|^{n+1}} = \frac{|x-x_0|}{t} < 1 \text{ si } \left|x-x_0\right| < t = \left|x_1-x_0\right|.$$

Al ser x_1 arbitrario en I se deduce que $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ es absolutamente convergente en I y por tanto convergente.

2. Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ las soluciones de (E) que satisfacen respectivamente $a_0 = 1, a_1 = 0$ y $a_0 = 0, a_1 = 1$ es decir,

$$y_1(x) = 1 + 0(x-x_0) + \ldots$$
$$y_2(x) = 0 + 1(x-x_0) + \ldots$$

entonces

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) = 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2(x-x_0) + \ldots = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

lo cual implica que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones analíticas de (E) en el intervalo I y linealmente independientes.

3. Las funciones $p(x) = x$, $q(x) = -4$ son analíticas en todo intervalo de la forma $(-r, r)$ para todo $r > 0$ y por tanto analíticas en $\mathbb{R}$. Por el teorema anterior, existen las soluciones pedidas. Sea

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Sustituyendo en la ecuación dada:

$$\begin{aligned} 0 &= y'' - xy' + 4y \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} 4a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 4a_n x^n \\ &= (2a_2 + 4a_0) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-4)a_n\right]. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} &2a_2 + 4a_0 = 0 \\ &(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-4)a_n = 0. \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} a_2 &= -2a_0 \\ a_{n+2} &= \frac{n-4}{(n+2)(n+1)}a_n. \end{aligned}$$

Distingamos los casos n par y n impar. Para n par tenemos:

$$a_2 = -2a_0,\ a_4 = -\frac{1}{6}a_2 = \frac{1}{3}a_0,\ a_6 = 0,\ a_8 = 0,\ a_{10} = 0,\ \ldots$$

Para $n = 2k+1$ impar tenemos:

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{2k-5}{(2k+1)(2k)}a_{2k-1} = \frac{(2k-5)(2k-7)}{(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)}a_{2k-3} \\ &= \ldots = \frac{(2k-5)(2k-7)\ldots(-3)}{(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)\ldots(3)(2)}a_1. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$y(x) = a_0\left(1 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4\right) + a_1\left(x + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-5)(2k-7)\ldots(-3)}{(2k+1)!}x^k\right),$$

y de acuerdo con el apartado anterior, las dos funciones entre paréntesis son soluciones de la ecuación diferencial dada, analíticas en $\mathbb{R}$ y linealmente independientes. $\square$

144. Límite de una sucesión por la definición

Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-2}{3n^2+1}=\frac{1}{3}$.

SOLUCIÓN. Para $\epsilon>0$ suficientemente pequeño

$$\left|\frac{n^2-2}{3n^2+1}-\frac{1}{3}\right|<\epsilon\Leftrightarrow\left|\frac{-7}{9n^2+3}\right|<\epsilon\Leftrightarrow\frac{7}{9n^2+3}<\epsilon$$

$$\Leftrightarrow\frac{7}{\epsilon}-3<9n^2\Leftrightarrow\frac{7-3\epsilon}{9\epsilon}<n^2\Leftrightarrow\sqrt{\frac{7-3\epsilon}{9\epsilon}}<n$$

Es decir, para $\epsilon>0$ suficientemente pequeño si

$$n_0=\left\lfloor\sqrt{\frac{7-3\epsilon}{9\epsilon}}\right\rfloor+1$$

entonces

$$\left|\frac{n^2-2}{3n^2+1}-\frac{1}{3}\right|<\epsilon$$

si $n\geq n_0$ por tanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-2}{3n^2+1}=\frac{1}{3}.$$

□

145. Inverso de un elemento en $\mathbb{Q}/\langle x^2+x+1\rangle$

Hallar el inverso del elemento $3+2x+\langle x^2+x+1\rangle$ de $\mathbb{Q}/\langle x^2+x+1\rangle$.

SOLUCIÓN. Tenemos:

$$\begin{aligned}&\big(3+2x+\langle x^2+x+1\rangle\big)\big(ax+b+\langle x^2+x+1\rangle\big)=1+\langle x^2+x+1\rangle\\ \Leftrightarrow\ &(3+2x)(ax+b)+\langle x^2+x+1\rangle=1+\langle x^2+x+1\rangle\\ \Leftrightarrow\ &2ax^2+(3a+2b)x+3b+\langle x^2+x+1\rangle=1+\langle x^2+x+1\rangle.\end{aligned}$$

El resto de la división de $2ax^2+(3a+2b)x+3b$ entre x^2+x+1 es $(a+2b)x+3b-2a$, por tanto

$$\begin{aligned}&2ax^2+(3a+2b)x+3b+\langle x^2+x+1\rangle=\\ &(a+2b)x+3b-2a+\langle x^2+x+1\rangle=1+\langle x^2+x+1\rangle.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{cases}a+2b=0\\ 3b-2a=1\end{cases}\quad\Rightarrow a=-2/7,\ b=1/7.$$

Por tanto,

$$\big[\big(3+2x+\langle x^2+x+1\rangle\big)\big]^{-1}=-\frac{2}{7}x+\frac{1}{7}+\langle x^2+x+1\rangle.$$

□

146. Caracterización de $a\ker f$ para un homomorfismo de grupos

Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos y sea $a \in G$. Demostrar que

$$a\ker f = \{g \in G : f(g) = f(a)\}$$

SOLUCIÓN. Denotemos por e' al neutro de G' y veamos el doble contenido

$$\subset) \quad x \in a\ker f \Rightarrow g = ah \text{ con } h \in \ker f$$

$$\Rightarrow f(g) = f(ah) = f(a)f(h) = f(a)e' = f(a).$$

$$\supset) \quad f(g) = f(a) \Rightarrow [f(a)]^{-1} f(g) = e' \Rightarrow f(a^{-1}g) = e' \Rightarrow a^{-1}g \in \ker f$$

$$\Rightarrow a^{-1}g = h \text{ con } h \in \ker f \Rightarrow g = ah \text{ con } h \in \ker f \Rightarrow g \in a\ker f.$$

Concluimos pues que

$$a\ker f = \{g \in G : f(g) = f(a)\}$$

□

147. Límite de una sucesión de conjuntos

Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una sucesión de conjuntos contenidos en un conjunto universal U. Se definen:

$$\operatorname{lím\,inf} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \operatorname{lím\,sup} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

1. Demostrar que

$$(\operatorname{lím\,inf} A_n)^c = \operatorname{lím\,sup} A_n^c, \quad (\operatorname{lím\,sup} A_n)^c = \operatorname{lím\,inf} A_n^c.$$

2. Si para una sucesión de conjuntos $\{A_n\}$ se verifica $\operatorname{lím\,inf} A_n = \operatorname{lím\,sup} A_n$, se define

$$\operatorname{lím} A_n = \operatorname{lím\,inf} A_n = \operatorname{lím\,sup} A_n.$$

Demostrar que

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

3. Determinar $\operatorname{lím} A_n$, siendo $A_n = \left[0, \dfrac{n}{n+1}\right)$.

4. Demostrar que:

$$(a)\ \operatorname{lím\,sup} A_n = \left\{x \in U \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) = \infty\right\},$$

$$(b)\ \operatorname{lím\,inf} A_n = \left\{x \in U \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n^c}(x) < \infty\right\}.$$

en donde χ_M representa la función característica de $M \subset U$.
5. Demostrar que para cualquier sucesión $A_1, A_2, A_3, \ldots$ se verifica

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n.$$

SOLUCIÓN. 1. Usando las leyes de Morgan

$$(\liminf A_n)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c = \limsup A_n^c.$$

Análogamente

$$(\limsup A_n)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \liminf A_n^c.$$

2. Si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ entonces, $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ y por tanto $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ entonces, $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$ y por tanto $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Por otra parte si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ entonces $A_1^c \supset A_2^c \supset A_3^c \supset \ldots$, con lo cual

$$\limsup A_n^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \underbrace{=}_{\text{apartado 1}} (\limsup A_n)^c$$

$$\Rightarrow \limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

en consecuencia

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \Rightarrow \lim A_n = \liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

De igual manera si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ entonces $A_1^c \subset A_2^c \subset A_3^c \subset \ldots$, con lo cual

$$\liminf A_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \underbrace{=}_{\text{apartado 1}} (\liminf A_n)^c$$

$$\Rightarrow \liminf A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

en consecuencia

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \Rightarrow \lim A_n = \liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

3. Para todo n natural tenemos

$$A_n = \left[0, \frac{n}{n+1}\right), \quad A_{n+1} = \left[0, \frac{n+1}{n+2}\right).$$

Por otra parte,

$$\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow A_n \subset A_{n+1} \; \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

y por el apartado anterior, $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dado que $n/(n+1) < 1$ para todo n, se verifica $A_n \subset [0,1)$ luego $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0,1)$. Sea ahora $x \in [0,1)$. Como $\lim n/(n+1) = 1$, existe n_0 tal que $n_0/(n_0+1) > x$ lo cual implica que $x \in A_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Concluimos que $\lim A_n = [0,1)$.

4. (a) Tenemos

$$x \in \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow \forall n \; \exists k_n : x \in A_{k_n}$$

$$\Rightarrow \forall n \; \exists k_n : \chi_{A_{k_n}}(x) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) = \infty.$$

Recíprocamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) = \infty$ existe una sucesión $k_1, k_2, k_3, \ldots$ tal que $\chi_{A_{k_n}}(x) = 1$ o bien $x \in A_{n_k}$ con lo cual para todo n, $x \in \bigcup_{k \geq n} A_k$ y por ende $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.
(b) Tenemos

$$x \in \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \exists n_0 : x \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \exists n_0 : x \notin \left(\bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k \right)^c$$

$$= \bigcup_{k=n_0}^{\infty} A_k^c \Leftrightarrow x \notin A_k^c \; \forall k \geq n_0 \Leftrightarrow \exists n_0 : \chi_{A_k^c}(x) = 0 \; \forall k \geq n_0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n^c}(x) < \infty.$$

5. Según el apartado anterior, el límite superior es el conjunto de los elementos que pertenecen a infinitos conjuntos de la sucesión, y el límite inferior es el conjunto de los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de la sucesión salvo a lo sumo a un número finito. De aquí se deduce trivialmente que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. $\square$

148. Ecuaciones paramétricas de la intersección de una esfera y un plano

Determinar unas ecuaciones paramétricas de la curva intersección de la esfera $E : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el plano $\pi : x + y + z = 0$.

SOLUCIÓN. Sustituyendo $z = -x - y$ en la ecuación de la esfera obtenemos
$$x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 4, \text{ o bien } 2x^2 + 2xy + 2y^2 = 4.$$
Podemos escribir la cónica anterior en la forma
$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 4 = (x, y) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4 = 0.$$
Apliquemos a M el teorema espectral. Valores propios
$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = 1.$$
Bases de los subespacios propios
$$V_3 \equiv \begin{cases} -x + y = 0 \\ \quad x - y = 0 \end{cases}, \quad B_{V_1} = \{(1, 1)\}$$
$$V_1 \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}, \quad B_{V_4} = \{(-1, 1)\}$$
Una base ortonormal y de vectores propios de $\mathbb{R}^2$ es por tanto
$$B' = \{e_1, e_2\} \text{ con } e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \ e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1).$$
La matriz de P de cambio de la base canónica $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a la B' es
$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (ortogonal)},$$
y la expresión del cambio es
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ o bien } \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'). \end{cases}$$
Entonces
$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 4 = (x, y)\, M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4$$
$$= (x', y')P^t M P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 4 = (x', y') \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 4$$
$$= 3(x')^2 + (y')^2 - 4 = 0.$$
La ecuación de la cónica en los nuevos ejes $x'y'$ es por tanto
$$\frac{(x')^2}{(2/\sqrt{3})^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1.$$
Las ecuaciones paramétricas de la elipse son por tanto
$$\begin{cases} x' = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cos t \\ y' = 2 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)].$$

Sustituyendo $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} \cos t - 2 \sin t \right) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} \cos t + 2 \sin t \right) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)].$$

Como $z = -x - y$, unas ecuaciones paramétricas de la intersección $E \cap \pi$ son

$$E \cap \pi : \begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos t - \sin t \right) \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos t + \sin t \right) \\ z = -\dfrac{4}{\sqrt{6}} \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)].$$

$\square$

149. Cuerpo primo

Los cuerpos $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \ldots, \mathbb{Q}$ se denominan cuerpos primos.
1. Demostrar que todo subcuerpo de un cuerpo primo coincide con él mismo.
2. Demostrar que todo cuerpo contiene a un subcuerpo isomorfo a un cuerpo primo. Es decir, todo cuerpo contiene a un cuerpo mínimo que es una copia de $\mathbb{Q}$ o de $\mathbb{Z}_p$ para algún p primo.

SOLUCIÓN. 1. Si L es subcuerpo de $\mathbb{Q}$ entonces, $1 \in L$ y por tanto $n \cdot 1 = n \in L$ para todo entero n. Es decir $\mathbb{Z} \subset L$. Como L es cuerpo, si $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ entonces $1/m \in L$ y por ende $n \cdot (1/m) = n/m \in L$. Es decir $L \supset \mathbb{Q}$ y por tanto $L = \mathbb{Q}$.
Si L es subcuerpo de $\mathbb{Z}_p$ con p primo, entonces $1 \in L$ y por tanto

$$r \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{r)} \in L \quad \forall r = 0, 1, 2, \ldots p - 1.$$

Es decir, $L \supset \mathbb{Z}_p$ luego $L = \mathbb{Z}_p$.
2. Sea K un cuerpo y consideremos la aplicación

$$f : \mathbb{Z} \to K, \quad f(n) = n \cdot 1_K = 1_K + 1_K + \cdots + 1_K \quad (n \text{ veces}).$$

Fácilmente verificamos que f es un homomorfismo de anillos y por tanto $\ker f$ es un ideal de $\mathbb{Z}$.
Primer caso: $\ker f = \{0\}$. En este caso, $n \cdot 1_K = 0$ implica $n = 0$ luego cada entero no nulo se transforma en un elemento invertible de K. Consideremos la aplicación

$$g : \mathbb{Q} \to K, \quad g\left(\frac{m}{n}\right) = (m \cdot 1_k)\,(n \cdot 1_k)^{-1}$$

Esta aplicación es un isomorfismo de cuerpos con lo cual $\mathbb{Q} \cong \operatorname{Im} f \subset K$ y en consecuencia K contiene una copia de $\mathbb{Q}$.
Segundo caso: $\ker f \neq \{0\}$. En este caso, $n \cdot 1_K = 0$ para algún $n \neq 0$. Si p es el menor entero positivo tal que $p \cdot 1_K = 0$, entonces p es primo pues p

es la característica de K. Por un conocido teorema de isomorfía, se verifica $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\ker f \cong \text{Imf} \subset K$ lo cual implica que K contiene una copia de $\mathbb{Z}_p$. $\square$

150. Cuerpo de ruptura de un polinomio

Sea k un cuerpo, $f \in k[x]$ irreducible y sin raíces en k. Se llama *cuerpo de ruptura* de f a cualquier extensión simple $k' = k(\xi)$ de k en la que f tiene la raíz ξ.
1) Sea k un cuerpo, $f \in k[x]$ irreducible y sin raíces en k (por tanto, grado $f \geq 2$). Demostrar que
(i) $\sum = k[x]/(f)$ es un cuerpo extensión de k.
(ii) $\xi = x + (f)$ es raíz de f en $\sum$.
(iii) $\sum = k(\xi)$, es decir $\sum$ es extensión algebraica simple.
Nota. Esto demuestra que $\sum = k(\xi)$ es cuerpo de ruptura de f, y por tanto f es reducible en $k(\xi)[x]$ al ser $f(x) = (x - \xi)g(x)$ con $g \in k(\xi)[x]$.

2) Describir las operaciones suma y producto en $k(\xi)$.

3) Determinar un cuerpo de ruptura $\mathbb{Q}(\xi)$ del polinomio irreducible
$$f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x].$$
4) Determinar un cuerpo de ruptura $\mathbb{R}(\xi)$ del polinomio irreducible
$$f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x].$$
5) Determinar un cuerpo de ruptura $\mathbb{Q}(\xi)$ del polinomio irreducible
$$f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x].$$

SOLUCIÓN. 1) (i) Al ser f irreducible, (f) es ideal maximal y por tanto $\sum = k[x]/(f)$ es un cuerpo. Definamos la aplicación
$$\begin{aligned} &k \to \bar{k} = \{a + (f) : a \in k\} \subset \sum \\ &a \to a + (f). \end{aligned}$$
Es fácil comprobar que tal aplicación es un isomorfismo de cuerpos, y por tanto se puede considerar k incluido en $\sum$.
(ii) Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$. Usando las conocidas operaciones en $k[x]/(f)$,
$$\begin{aligned} f(\xi) &= \sum_{k=0}^{m} c_k \xi^k = \sum_{k=0}^{m} c_k \left(x + (f)\right)^k = \sum_{k=0}^{m} c_k \left(x^k + (f)\right) = \sum_{k=0}^{m} \left(c_k x^k + (f)\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{m} c_k x^k\right) + (f) = f(x) + (f) \underbrace{=}_{f-0=f\in(f)} 0 + (f) = 0. \end{aligned}$$
(iii) Todo elemento de $\sum$ es de la forma
$$h(x) + (f) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + (f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x + (f)\right)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k.$$

Es decir, $\sum \subset k[\xi]$. Entonces, $\sum \subset k[\xi] \subset k(\xi) \subset \sum$ luego $\sum = k(\xi)$.

2) Si $f \in k[x]$ es irreducible de grado m y $\xi = x + (f)$, entonces el cuerpo de ruptura $\sum$ de f es de la forma

$$\sum = \{r_0 + r_1\xi + \cdots + r_{m-1}\xi^{m-1} : r_i \in k\}.$$

Si tenemos los elementos de $\sum$

$$\mu(\xi) = r_0 + r_1\xi + \cdots + r_{m-1}\xi^{m-1},$$
$$\mu'(\xi) = r_0' + r_1'\xi + \cdots + r_{m-1}'\xi^{m-1},$$

debido a la construcción del cuerpo $\sum$, la operación suma es

$$\mu(\xi) + \mu'(\xi) = r_0 + r_0' + \left(r_1 + r_1'\right)\xi + \cdots + \left(r_{m-1} + r_{m-1}'\right)\xi^{m-1},$$

y $\mu(\xi)\mu'(\xi)$ es $r(\xi)$, siendo $r(x)$ el resto de la división de $\mu(x)\mu'(x)$ entre $f(x)$. El método expuesto se llama *adjunción simbólica de Cauchy.*

3) Los elementos de $\mathbb{Q}(\xi)$ son de la forma $a + b\xi$ con $a,\ b \in \mathbb{Q}$. Para dos elementos $a + b\xi$ y $a' + b'\xi$ de $\mathbb{Q}(\xi)$ la suma es

$$(a + b\xi) + (a' + b'\xi) = (a + b) + (a' + b')\xi$$

Por otra parte,

$$(a + bx)(a' + b'x) = aa' + (ba' + ab')x + bb'x^2,$$

y efectuando la división euclídea entre $x^2 - 2$ obtenemos el resto $2bb' + (a'b + ab')x$, con lo cual

$$(a + b\xi)(a' + b'\xi) = 2bb' + (a'b + ab')\xi.$$

Dado que $\xi^2 = 2$, dividiendo $f(x) = x^2 - 2$ entre $x - \xi$,

$$\begin{array}{c|ccr} & 1 & 0 & -2 \\ \xi & & \xi & \xi^2 \\ \hline & 1 & \xi & 0 \end{array}$$

por tanto $f(x) = (x - \xi)(x + \xi)$. Según es sabido, denotamos a ξ por el símbolo $\sqrt{2}$.

4) Los elementos de $\mathbb{R}(\xi)$ son de la forma $a + b\xi$ con $a,\ b \in \mathbb{R}$. Para dos elementos $a + b\xi$ y $a' + b'\xi$ de $\mathbb{R}(\xi)$ la suma es

$$(a + b\xi) + (a' + b'\xi) = (a + b) + (a' + b')\xi$$

Por otra parte,

$$(a + bx)(a' + b'x) = a + a' + (ba' + ab')x + bb'x^2,$$

y efectuando la división euclídea entre $x^2 + 1$ obtenemos el resto $2bb' + (a'b + ab')x$, con lo cual

$$(a + b\xi)(a' + b'\xi) = aa' - bb' + (a'b + ab')\xi.$$

Dado que $\xi^2 = 1$, dividiendo $f(x) = x^2 + 1$ entre $x - \xi$,

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 1 \\ \xi & & \xi & \xi^2 \\ \hline & 1 & \xi & 0 \end{array}$$

por tanto $f(x) = (x - \xi)(x + \xi)$. Según es sabido, denotamos a ξ por el símbolo i (unidad imaginaria). Nótese que hemos construido el cuerpo de los números complejos.

5) Los elementos de $\mathbb{Q}(\xi)$ son de la forma $a + b\xi + c\xi^2$ con a, b, $c \in \mathbb{Q}$. Para dos elementos $a + b\xi + c\xi^2$ y $a' + b'\xi + c'\xi^2$ de $\mathbb{Q}(\xi)$ la suma es

$$\begin{gathered} (a + b\xi + c\xi^2) + (a' + b'\xi + c'\xi^2) \\ = (a + b) + (a' + b')\xi + (c + c')\xi^2 \end{gathered}$$

Por otra parte,

$$\begin{gathered} (a + bx + cx^2)(a' + b'x + c'x^2) \\ = aa' + (ba' + ab')x + (a'c + bb' + ac')x^2 + (b'c + bc')x^3 + cc'x^4, \end{gathered}$$

y efectuando la división euclídea entre $x^3 - 2$ obtenemos el resto

$$aa' + 2b'c + 2bc' + (ba' + ab' + 2cc')x + (a'c + bb' + ac')x^2,$$

con lo cual

$$\begin{gathered} (a + b\xi + c\xi^2)(a' + b'\xi + c'\xi^2) \\ = aa' + 2b'c + 2bc' + (ba' + ab' + 2cc')\xi + (a'c + bb' + ac')\xi^2. \end{gathered}$$

Dado que $\xi^3 = 2$, dividiendo $f(x) = x^3 - 2$ entre $x - \xi$,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -2 \\ \xi & & \xi & \xi^2 & \xi^3 \\ \hline & 1 & \xi & \xi^2 & 0 \end{array}$$

por tanto $f(x) = (x - \xi)(x^2 + \xi x + \xi^2)$. Según es sabido, denotamos a ξ por el símbolo $\sqrt[3]{2}$. □

Fernando Revilla. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).
E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`