MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

VALORES PROPIOS Y DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CIRCULANTE

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

RESUMEN. Calculamos los valores propios y el determinante de una matriz circulante genérica.

Enunciado
Recordamos que una matriz circulante es una matriz de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

es decir una matriz cuadrada compleja cuyas componentes de la primera fila son números complejos cualesquiera y cada una de las sucesivas filas se obtiene de la anterior sustituyendo la última componente por la primera y trasladando las restantes. El objetivo de este problema es hallar los valores propios, vectores propios y el determinante de cualquier matriz circulante.

1) Demostrar que $v = \left[1, \omega, \omega^2 \dots, \omega^{n-1}\right]^T$ con ω cualquier raíz enésima de la unidad, es vector propio de A. Determinar su valor propio asociado.
2) Demostrar que A tiene n vectores propios linealmente independientes.
3) Calcular $\det A$.
4) Para una matriz genérica circulante de orden 2, hallar sus valores propios, vectores propios y determinante sin usar los apartados anteriores. Verificar los resultados.

Key words and phrases. Valores propios, determinante, matriz circulante.

Solución

1) Hallemos el vector Av, es decir

$$Av = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Llamemos λ a la primera componente del vector Av. Entonces,

$$\lambda = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots a_{n-2}\omega^{n-2} + a_{n-1}\omega^{n-1}.$$

La segunda componente del vector Av es

$$\begin{aligned} & a_{n-1} + a_0\omega + \cdots + a_{n-3}\omega^{n-2} + a_{n-2}\omega^{n-1} \\ &= \omega\left(a_{n-1}\omega^{n-1} + a_0 + \cdots + a_{n-3}\omega^{n-3} + a_{n-2}\omega^{n-2}\right) \\ &= \omega\left(a_0 + \cdots + a_{n-3}\omega^{n-3} + a_{n-2}\omega^{n-2} + a_{n-1}\omega^{n-1}\right) = \lambda\omega. \end{aligned}$$

La i-ésima componente es

$$\begin{aligned} & a_{n-i+1} + a_{n-i+2}\omega + \cdots + a_{n-i}\omega^{n-1} \\ &= \omega^{i-1}\left(a_{n-i+1}\omega^{n-i+1} + a_{n-i+2}\omega^{n-i+2} + \cdots + a_{n-i}\omega^{n-i}\right) = \lambda\omega^{i-1}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$Av = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda\omega \\ \lambda\omega^2 \\ \vdots \\ \lambda\omega^{n-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{bmatrix} = \lambda v.$$

Concluimos que $v = \left[1, \omega, \omega^2 \dots, \omega^{n-1}\right]^T \neq 0$ es vector propio asociado al valor propio $\lambda = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots a_{n-2}\omega^{n-2} + a_{n-1}\omega^{n-1}$, y esto para todo ω raíz n-ésima de la unidad.

2) El razonamiento del apartado anterior es válido para toda raíz enésima de la unidad. Si $\zeta = e^{2\pi i}$ entonces, las n raíces enésimas de la unidad son $\omega = \zeta^k$ con $k = 0, 1, \dots, n-1$. Esto significa que para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$ el vector

$$v_k = \left[1, \zeta^k, \zeta^{2k} \dots, \zeta^{k(n-1)}\right]^T$$

es vector propio de A asociado al valor propio

$$\lambda_k = a_0 + a_1\zeta^k + a_2\zeta^{2k} + \cdots a_{n-2}\zeta^{k(n-2)} + a_{n-1}\zeta^{k(n-1)}.$$

Para demostrar que los vectores v_k $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ son linealmente independientes formamos la matriz:

$$P = \left[v_0, v_1, v_2 \dots, v_{n-1}\right] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \dots & \zeta^{n-2} & \zeta^{n-1} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \dots & \zeta^{2(n-2)} & \zeta^{2(n-1)} \\ 1 & \zeta^3 & \zeta^6 & \dots & \zeta^{3(n-2)} & \zeta^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & \zeta^{n-1} & \zeta^{2(n-1)} & \dots & \zeta^{(n-1)(n-2)} & \zeta^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}.$$

La matriz P es una matriz de Vandermonde y su determinante es

$$\det P = \prod_{0 \le i < j \le n-1} (\zeta^j - \zeta^i) \neq 0.$$

Es decir, rg $(P) = n$ lo cual implica que sus columnas son linealmente independientes. Nótese que hemos demostrado también que toda matriz circulante es diagonalizable.

3) El determinante de A es el producto de sus valores propios, en consecuencia

$$\det A = \prod_{k=0}^{n-1} \left(a_0 + a_1\zeta^k + a_2\zeta^{2k} + \dots + a_{n-1}\zeta^{k(n-1)} \right), \quad \zeta = e^{2\pi i/n}.$$

4) Hallemos los valores propios de una matriz circulante genérica A de orden dos:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad \chi(\lambda) = \lambda^2 - 2a_0\lambda + a_0^2 - a_1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2a_0 \pm \sqrt{4a_0^2 - 4a_0^2 + 4a_1^2}}{2} = a_0 \pm a_1.$$

Llamemos $\lambda_0 = a_0 + a_1$ y $\lambda_1 = a_0 - a_1$. Se verifica $\lambda_0 = \lambda_1$ si y sólo si $a_1 = 0$. Entonces para $a_1 \neq 0$ tenemos dos valores propios simples y los subespacios propios y una base de cada uno de ellos son:

$$V_{\lambda_0} : \begin{cases} -a_1x_1 + a_1x_2 = 0 \\ a_1x_1 - a_1x_2 = 0, \end{cases} \quad B_{V_{\lambda_0}} = \{v_0 = (1,1)^T\}.$$

$$V_{\lambda_1} : \begin{cases} a_1x_1 + a_1x_2 = 0 \\ a_1x_1 + a_1x_2 = 0, \end{cases} \quad B_{V_{\lambda_1}} = \{v_1 = (1,-1)^T\}.$$

Para $a_1 = 0$ tenemos

$$Av_0 = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; Av_1 = \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y por tanto v_0 y v_1 son también vectores propios asociados al valor propio doble $\lambda_0 = \lambda_1 = a_0$. Verificamos todo esto con lo demostrado en los apartados anteriores. Sea $\zeta = -1$. Las raíces cuadradas de la unidad son $\zeta^0 = 1$ y $\zeta^1 = -1$. Los valores propios son:

$$\lambda_0 = a_0 + a_1 = a_0 + a_1\zeta^0, \quad \lambda_1 = a_0 - a_1 = a_0 + a_1\zeta^1,$$

y los respectivos vectores propios

$$v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta^0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta^1 \end{bmatrix}.$$

Por último,

$$\begin{aligned} \det A = a_0^2 - a_1^2 = (a_0 + a_1)(a_0 - a_1) &= \left(a_0 + a_1 \zeta^0\right)\left(a_0 + a_1 \zeta^1\right) \\ &= \prod_{k=0}^{2-1} \left(a_0 + a_1 \zeta^k\right), \quad \zeta = e^{2\pi i/2} = -1. \end{aligned}$$

□

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`