MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

TEOREMA DE REORDENACIÓN DE RIEMANN

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Demostramos el teorema de Riemann de la reordenación de series: dada una serie real condicionalmente convergente y dado $x \in [-\infty, +\infty]$, existe una reordenación de la serie cuya suma es x.

Enunciado
Por simplicidad, denotaremos $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
1) Demostrar que si la serie real $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, entonces existen infinitos términos positivos e infinitos negativos.
2) Para todo n descomponemos $a_n = a_n^+ + a_n^-$ con $a_n^+ \geq 0$ y $a_n^- \leq 0$ de la siguiente manera:

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}, \quad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}.$$

Describir tal descomposición según los casos a_n positivo, negativo o nulo.
3) Demostrar que $\sum a_n^+ = +\infty$ y que $\sum a_n^- = -\infty$.
4) Dada una serie real condicionalmente convergente y dado cualquier número real x, demostrar que existe una reordenación de la serie cuya suma es x.
5) Dada una serie real condicionalmente convergente demostrar que existe una reordenación de la serie cuya suma es $+\infty$ y otra cuya suma es $-\infty$ (esto completará la demostración del teorema).

Solución
1) Supongamos que existiera sólo un número finito de términos positivos y sea a_m el último de ellos. Entonces, al ser $\sum a_n$ convergente, lo sería $\sum_{n>m} a_n = -\sum_{n>m} |a_n|$ con lo cual lo sería $\sum_{n>m} |a_n|$ y por ende $\sum |a_n|$. Llegaríamos al absurdo de que $\sum a_n$ sería absolutamente convergente. Análogo razonamiento si existiera sólo un número finito de términos negativos.

2) De acuerdo con las definiciones de a_n^+ y a_n^-:

$$a_n = \begin{cases} a_n^+ + a_n^- = a_n + 0 & \text{si} \quad a_n > 0 \\ a_n^+ + a_n^- = 0 + a_n & \text{si} \quad a_n < 0 \\ a_n^+ + a_n^- = 0 + 0 & \text{si} \quad a_n = 0. \end{cases}$$

Key words and phrases. Teorema, reordenación, Riemann.

3) Si ambas series fueran convergentes:

$$\begin{cases} \sum a_n^+ = S \in \mathbb{R} \\ \sum a_n^- = T \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum a_n^+ = S \\ \sum |a_n^-| = -T \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum |a_n| = \sum \left(a_n^+ + \left|a_n^-\right|\right) = \sum a_n^+ + \sum \left|a_n^-\right| = S - T \in \mathbb{R}$$

y la serie $\sum a_n$ sería absolutamente convergente (contradicción).

Si una de las series $\sum a_n^+$, $\sum a_n^-$ fuera convergente y otra divergente, la serie suma $\sum (a_n^+ + a_n^-)$ (que es la serie $\sum a_n$), sería divergente, en contradicción con la hipótesis de ser $\sum a_n$ condicionalmente convergente. Concluimos que necesariamente las series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ son ambas divergentes.

Ademas, al ser $\sum a_n^+$ serie de términos positivos y $\sum a_n^-$ de negativos, ha de ser

$$\sum a_n^+ = +\infty, \quad \sum a_n^- = -\infty.$$

4) Podemos suponer sin pérdida de generalidad que todos los términos de la serie condicionalmente convergente $\sum a_n$ son no nulos. Sea p_n el n-ésimo término positivo de $\sum a_n$ y sea $-q_n$ su n-ésimo negativo. Según el apartado anterior, $\sum p_n = +\infty$ y $\sum -q_n = -\infty$. Elijamos términos positivos $p_1, \ldots, p_{n_1}$ hasta el primer p_{n_1} que verifique

$$S_{n_1} = p_1 + \ldots + p_{n_1} > x$$

con lo cual, $S_{n_1} - x < p_{n_1}$. Elijamos términos negativos $-q_1, \ldots, -q_{n_2}$ hasta el primer $-q_{n_2}$ que verifique

$$S_{n_1+n_2} = p_1 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - \ldots - q_{n_2} < x$$

con lo cual, $x - S_{n_1+n_2} < q_{n_2}$. Además, $S_{n_1} > S_{n_1+1} > \ldots > S_{n_1+n_2}$, luego

$$x - S_n < q_{n_2} \quad \forall n = n_1, n_2 + 1, \ldots, n_1 + n_2.$$

Nótese que estamos reordenado la serie $\sum a_n$. De nuevo, elijamos los términos positivos $p_{n_1+1}, \ldots, p_{n_3}$ hasta el primer p_{n_3} que verifique

$$S_{n_1+n_2+n_3} = p_1 + \ldots + p_{n_1} - q_1 - \ldots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_3} > x$$

con lo cual, $S_{n_1+n_2+n_3} - x < p_{n_3}$. Además, $S_{n_1+n_2} < S_{n_1+n_2+1} < \ldots < S_{n_1+n_2+n_3}$, luego

$$S_n - x < p_{n_3} \quad \forall n = n_1 + n_2, n_1 + n_2 + 1, \ldots, n_1 + n_2 + n_3.$$

Procediendo de esta manera llegamos a una reordenación de la serie $\sum a_n$ de tal manera que sus sumas parciales satisfacen

$$S_{n_1} - x < p_{n_1}, \quad x - S_{n_1+n_2} < q_{n_2}, \quad S_{n_1+n_2+n_3} - x < p_{n_3}, \quad \ldots$$

así como las sumas parciales intermedias S_n. Por la condición necesaria de la convergencia de $\sum a_n$ tenemos que $p_n \to 0$ y $q_n \to 0$, por tanto las sumas parciales de la serie reordenada tienen límite x.

5) De nuevo y sin pérdida de generalidad suponemos que todos los términos de la serie $\sum a_n$ son no nulos. Sea $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$ la sucesión de índices

tales que a_{p_i} es término positivo de la serie y $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ la de los que a_{n_i} es negativo. Cada número natural aparece pues una y sólo una vez en alguna de las sucesiones (p_i) o (n_i). Recordemos que según se ha demostrado, $\sum_{i=1}^{\infty} a_{p_i} = +\infty$. Entonces, sea k_1 el menor número natural tal que

$$\sum_{i=1}^{k_1} a_{p_i} \geq |a_{n_1}| + 1,$$

k_2 el menor número natural tal que

$$\sum_{i=k_1+1}^{k_2} a_{p_i} \geq |a_{n_2}| + 1,$$

y así sucesivamente. Esto define la reordenación de la serie

$$a_{p_1} + a_{p_2} + \cdots + a_{p_{k_1}} + a_{n_1} + a_{p_{k_1+1}} + a_{p_{k_1+2}} + a_{p_{k_2}} + a_{n_2} + \cdots$$

Veamos que la serie reordenada de esta manera tiene suma $+\infty$. Efectivamente, por construcción, la suma de los $k_1 + 1$ primeros términos de la reordenación es ≥ 1 y ninguna suma parcial de entre esos términos es < 0. De manera análoga, la suma de los siguientes $k_2 - k_1 + 1$ términos es ≥ 1 y ninguna suma parcial de entre esos términos es < 0. Reiterando, concluimos que la suma de la reordenación es $+\infty$. La demostración de que existe una reordenación cuya suma es $-\infty$ es similar. □

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`