MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

ECUACIÓN DIOFÁNTICA LINEAL EN DOS INCÓGNITAS

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

RESUMEN. Estudiamos la compatibilidad de la ecuación diofántica lineal en dos incógnitas, y proporcionamos la manera de hallar su solución general.

Enunciado
Una ecuación *diofántica* lineal en dos incógnitas es una ecuación de la

$$ax + by = c, \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0). \qquad (E)$$

Se llama solución de la ecuación anterior a todo par de enteros (x, y) que la satisface.
1) Sea $d = \text{m.c.d.}\,(a, b)$. Demostrar que la ecuación (E) tiene alguna solución $\Leftrightarrow d \mid c$.
2) Hallar, si es posible, una solución particular de la ecuación diofántica $97x + 35y = 13$.
3) Hallar, si es posible, una solución particular de la ecuación diofántica $14x + 21y = 11$.
4) Sea la ecuación diofántica $ax+by = c$ con $d = \text{m.c.d.}\,(a, b) \mid c$. Demostrar que la solución general (i.e. todas las soluciones) de la ecuación es

$$\begin{cases} x = x_0 + k\dfrac{b}{d} \\ y = y_0 - k\dfrac{a}{d} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

siendo (x_0, y_0) una solución particular.
5) Hallar la solución general de la ecuación diofántica $97x + 35y = 13$.

Solución
1) $\Rightarrow$) Si la ecuación (E) tiene una solución entera (x_0, y_0), entonces $ax_0 + by_0 = c$. Como $d \mid a$ y $d \mid b$, se verifica $d \mid ax_0 + by_0 = c$. $\Leftarrow$) Tenemos

$$\text{m.c.d.}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Id. Bezout}} \exists p, q \in \mathbb{Z} : p\frac{a}{d} + q\frac{b}{d} = 1$$

$$\Rightarrow a\frac{pc}{d} + b\frac{qc}{d} = c.$$

Por hipótesis $d \mid c$ con lo cual $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{pc}{d}, \dfrac{qc}{d}\right)$ es solución de (E). Nótese, que esto proporciona un método para hallar una solución particular de la

Key words and phrases. Ecuación, diofántica .lineal, dos incógnitas.

ecuación diofántica (E).
2) Usando el algortitmo de Euclides:

$$\begin{array}{r|cccccc} & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ \hline 97 & 35 & 27 & 8 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 27 & 8 & 3 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

con lo cual $d = \text{m.c.d.}\,(97, 35) = 1 \mid 13$ y la ecuación tiene soluciones. Tenemos las relaciones:

$$\begin{aligned} 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 8 &= 3 \cdot 2 + 2 \\ 27 &= 8 \cdot 3 + 2 \\ 35 &= 1 \cdot 27 + 8 \\ 97 &= 2 \cdot 35 + 27. \end{aligned}$$

Expresemos $d = 1$ como combinación lineal de 97 y 35. Tenemos

$$1 = 3 - 2 = 3 - (8 - 3 \cdot 2) = 3 \cdot 3 - 8 = 3 \cdot (27 - 3 \cdot 8) - 8$$

$$= 3 \cdot 27 - 10 \cdot 8 = 3 \cdot 27 - 10 \cdot (35 - 27) = 13 \cdot 27 - 10 \cdot 35$$

$$= 13 \cdot (97 - 2 \cdot 35) - 10 \cdot 35 = \underbrace{13}_{p} \cdot 97 + (\underbrace{-36}_{q}) \cdot 35.$$

Según el apartado anterior, una solución particular de la ecuación diofántica es

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{pc}{d}, \frac{qc}{d}\right) = (13 \cdot 13, (-36) \cdot 13) = (169, -468).$$

3) Tenemos $d = \text{m.c.d.}\,(14, 21) = 7$, que no divide a 11, por tanto la ecuación no tiene soluciones.
4) Como $d \mid c$, del apartado 1 deducimos que existe una solución particular (x_0, y_0). Sea (x_1, y_1) cualquier solución de la ecuación, entonces

$$\begin{cases} \dfrac{a}{d}x_1 + \dfrac{b}{d}y_1 = \dfrac{c}{d} \\ \dfrac{a}{d}x_0 + \dfrac{b}{d}y_0 = \dfrac{c}{d} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d}(x_1 - x_0) + \frac{b}{d}(y_1 - y_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{d}(x_1 - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y_1) \Rightarrow \frac{b}{d} \mid \frac{a}{d}(x_1 - x_0).$$

Pero a/d y b/d son primos entre si, por tanto $\frac{b}{d} \mid (x_1 - x_0)$, con lo cual existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 - x_0 = k\frac{b}{d}$, luego $x_1 = x_0 + k\frac{b}{d}$. Sustituyendo en

$$\frac{a}{d}(x_1 - x_0) + \frac{b}{d}(y_1 - y_0) = 0,$$

$$\frac{a}{d} \cdot k \cdot \frac{b}{d} + \frac{b}{d}(y_1 - y_0) = 0 \Rightarrow \frac{a}{d} \cdot k + y_1 - y_0 = 0 \Rightarrow y_1 = y_0 - k\frac{a}{d}.$$

Hemos demostrado que cualquier solución (x_1, y_1) de la ecuación diofántica es necesariamente de la forma dada. Falta demostrar que son efectivamente soluciones. Pero,

$$ax_1 + by_1 = a\left(x_0 + k\frac{b}{d}\right) + b\left(y_0 - k\frac{a}{d}\right)$$

$$= ax_0 + ak\frac{b}{d} + by_0 - bk\frac{a}{d} = ax_0 + by_0 = c.$$

5) En el apartado 2 vimos que $d = 1$ y que una solución particular es $(169, -468)$. Usando el teorema anterior, obtenemos la solución general:

$$\begin{matrix} x = 169 + 35k \\ y = -468 - 97k \end{matrix} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$\square$

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`