NOTA SOBRE LA INTEGRACIÓN POR PARTES

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

RESUMEN. Demostramos y desarrollamos un algoritmo para calcular algunas integrales que se adecuan al método de integración por partes.

En el año 1988, Santiago Calviño y yo, a la sazón profesores del I.B. Emperatriz María de Austria de Madrid, publicamos el presente artículo en el n^{o}19 de la revista de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas. He decidido reescribirlo con mínimos cambios que no afectan en absoluto a la idea original.

Introducción. La integración por partes es un método para hallar primitivas frecuentemente aplicable cuando la función a integrar es producto de otras dos, una de ellas con derivada sencilla y otra fácil de integrar. Su conocida formulación:

$$\int f(x)\ g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)\ g(x)dx$$

procede de la derivada del producto de dos funciones

$$(f(x)\ g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)dx$$

En muchas ocasiones este procedimiento ha de aplicarse repetidamente para obtener la función primitiva deseada. Cuando esto ocurre, presentaremos una disposición de los cálculos en forma de tabla aplicable a cualquier proceso de integración por partes. Escribiremos $I(fg')$ por $\int f(x)g'(x)dx$ para no alargar los símbolos e indicaremos $\int(\int g(x)dx)dx$, por ejemplo, por $I^2(g)$ para simplificar la notación. Según esto, la aplicación reiterada del método de integración por partes conduce a la serie de igualdades

$$\begin{aligned}
&I\left((fg'\right) = fg - I\left(f'g\right)\\
&I\left(f'g\right) = f'I(g) - I\left(f''I(g)\right)\\
&I\left(f''I(g)\right) = f''I^2(g) - I\left(f'''I^2(g)\right)\\
&\ldots\\
&I\left(f^{(n)}I^{n-1}(g)\right) = f^{(n)}I^n(g) - I\left(f^{(n+1)}I^n(g)\right).
\end{aligned}$$

o a la igualdad

$$I(fg') = fg - f'I(g) + f''I^2(g) + \ldots + (-1)^n f^{(n)}I^n(g) + (-1)^{n+1}I(f^{(n+1)}I^n(g)).$$

Key words and phrases. Nota, integración, partes.

El segundo miembro puede disponerse como una tabla de dos filas: la primera $f,\ f',\ f'',\ \ldots$ y la segunda $g,\ I(g),\ I^2(g),\ \ldots$, donde cada sumando es el producto de las columnas que aparecen con signos alternos, excepto el último que es la integral del producto de la funciones $I^n(g)$ y f^{n+1} indicado por la flecha, con el signo correspondiente. Por tanto la tabla será:

		1	-1	1	-1	$\ldots$	$(-1)^n$	$(-1)^{n+1}$
Derivación		f	f'	f''	f'''	$\ldots$	$f^{(n)}$	$f^{(n+1)}$
Integración	g'	g	$I(g)$	$I^2(g)$	$I^3(g)$	$\ldots$	$I^n(g)\nearrow$	

En la tabla se pueden presentar los siguientes casos:

Caso 1. Que el proceso se detenga porque una de las derivadas de f se anule, tal como ocurre en las integrales de los tipos:

$$\int p(x)e^{ax}\,dx,\ \int p(x)\operatorname{sen}(ax)\,dx,\ \int p(x)\cos(ax)\,dx$$

donde $p(x)$ es un polinomio.

EJEMPLO 1. Calcular $\int x^3e^{2x}\,dx$. La correspondiente tabla es:

	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
	x^3	$3x^2$	$6x$	6	0
e^{2x}	$e^{2x}/2$	$e^{2x}/4$	$e^{2x}/8$	$e^{2x}/16\nearrow$	

Entonces

$$\begin{aligned}\int x^3e^{2x}\,dx &= \frac{x^3e^{2x}}{2}-\frac{3x^2e^{2x}}{4}+\frac{6xe^{2x}}{8}-\frac{6e^{2x}}{16}+C\\ &= \frac{e^{2x}}{8}(4x^3-6x^2+6x-3)+C.\end{aligned}$$

Caso 2. Que el proceso se detenga porque la integral del producto $f^{(n+1)}I^n(g)$ sea inmediata.

EJEMPLO 2. Calcular $\int x^4\ln x\,dx$. La correspondiente tabla es:

	$+$	$-$
	$\ln x$	$1/x$
x^4	$x^5/5\nearrow$	

Entonces

$$\begin{aligned}\int x^4\ln x\,dx &= \frac{x^5\ln x}{5}-\int\frac{x^4}{5}\,dx=\frac{x^5\ln x}{5}-\frac{x^5}{25}+C\\ &= \frac{x^5}{5}\left(\ln x-\frac{1}{5}\right)+C.\end{aligned}$$

Caso 3. Que el proceso se detenga porque $(-1)^{n+1}f^{(n+1)}I^n(g)$ sea igual a kfg' con $k \neq 1$ constante, como aparece en las integrales del tipo

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx,\ \int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx,$$

o bien por un simple artificio aparece la original, tal como ocurre en:

$$\int \cos^2 x\,dx,\ \int \operatorname{sen}^2 x\,dx.$$

EJEMPLO 3. Calcular $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$. La correspondiente tabla es:

	$+$	$-$	$+$
	e^{3x}	$3e^{3x}$	$9e^{3x}$
$\cos(2x)$	$\operatorname{sen}(2x)/2$	$-\cos(2x)/4 \nearrow$	

Entonces

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{e^{3x}\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{3e^{3x}\cos 2x}{4} - \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos 2x\,dx$$

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{e^{3x}}{13}(2\operatorname{sen} 2x + 3\cos 2x) + C.$$

EJEMPLO 4. Calcular $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx$. La correspondiente tabla es:

	$+$	$-$
	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x \nearrow$	

Entonces

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\,dx &= -\operatorname{sen} x\cos x + \int \cos^2 x\,dx\\ &= -\operatorname{sen} x\cos x + \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx\\ &= -\operatorname{sen} x\cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\,dx\end{aligned}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x - \operatorname{sen} x\cos x}{2} + C.$$

Caso 4. Que el proceso no tenga fin como contrapartida a los casos anteriores.

EJEMPLO 5. [1] Calcular $\int \frac{e^x}{x}\,dx$. La correspondiente tabla es:

	$+$	$-$	$+$	$\dots$	$(-1)^n$	$(-1)^{n+1}$
	$1/x$	$-1/x^2$	$2/x^3$	$\dots$	$(-1)^n n! x^{-(n+1)}$	$(-1)^{n+1}(n+1)! x^{-(n+2)}$
e^x	e^x	e^x	e^x	$\dots$	$e^x \nearrow$	

[1] En el artículo original pusimos como ejemplo $\int e^{-x^2}dx$. Lo he cambiado por $\int (e^x/x)\,dx$ por considerarlo más adecuado.

Como era de esperar y dado que $\int (e^x/x)\,dx$ no es expresable por medio de una función elemental, el proceso en general solo puede generar relaciones de la forma $I(fg') = \phi(x) + (-1)^{n+1} I(f^{(n+1)} I^n(g))$. En este caso obtendríamos la relación:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{x^{k+1}} + (n+1)! \int \frac{e^x}{x^{n+2}}\,dx.$$

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`