MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL DE UNA SUPERFICIE

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

RESUMEN. Definimos la primera forma fundamental de una superficie y estudiamos alguna de sus propiedades.

Enunciado

1. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$ y S una superficie en $\mathbb{R}^3$ definida mediante

$$\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v) = (x_1(u,v),\ x_2(u,v),\ x_3(u,v))$$

con $\mathbf{x} \in C^1(U)$ y

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{bmatrix} = 2 \text{ para todo } (u,v) \in U.$$

Es decir, tenemos una representación paramétrica regular de S.

Demostrar que la condición del rango 2 puede ser sustituida de forma equivalente por $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq \mathbf{0}$ para todo $(u,v) \in U$.

2. Se define *la primera forma fundamenta*l de S y se la representa por $\mathbf{I}$ como la forma cuadrática $\mathbf{I} = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$. Expresar $\mathbf{I}$ en la forma:

$$\mathbf{I} = (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

3. Calcular la primera forma fundamental para la superficie $S \equiv \mathbf{x}(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Particularizar para el punto de S correspondiente a $(u,v) = (2,1)$ y clasificar la forma cuadrática resultante.
4. Demostrar que la primera forma fundamental es siempre una forma cuadrática definida positiva.
5. Justificar la validez de la fórmula $\mathbf{I} \approx |\Delta \mathbf{x}|^2$ para valores "pequeños" de du y dv.
6. Sean $u(t)$ y $v(t)$ dos funciones reales de clase 1 en $[a,b]$ con $(u(t), v(t)) \in U$ para todo $t \in [a,b]$. Consideremos la curva contenida en S

$$\gamma : \mathbf{x} = \mathbf{x}(u(t), v(t)) \quad t \in [a,b].$$

Key words and phrases. Primera. forma fundamental, superficie.

Demostrar que la longitud de γ es
$$L=\int_a^b\sqrt{\mathbf{I}\left(\frac{du}{dt},\frac{dv}{dt}\right)}\,dt$$

7. Determinar la longitud del arco de curva definida por $u=t$, $v=2t$ desde $t=0$ hasta $t=1$ y contenida en la superficie $S:(x,y,z)=(u+v,u-v,uv)$.
8. En el punto de S correspondiente a $(u_0,v_0)\in U$ se consideran las curvas de S dadas por
$$\begin{cases}u=t\\v=v_0\end{cases}\qquad\begin{cases}u=u_0\\v=t\end{cases}$$
a las cuales se las llama curvas coordenadas. Determinar el ángulo que forman tales curvas en función de los coeficientes de la primera forma fundamental.

Solución

1. En efecto,
$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial u}&\dfrac{\partial x_2}{\partial u}&\dfrac{\partial x_3}{\partial u}\\\dfrac{\partial x_1}{\partial v}&\dfrac{\partial x_2}{\partial v}&\dfrac{\partial x_3}{\partial v}\end{bmatrix}=2\ \forall(u,v)\in U\Leftrightarrow\operatorname{rg}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_u\\\mathbf{x}_v\end{bmatrix}=2\ \forall(u,v)\in U$$
$$\Leftrightarrow\mathbf{x}_u\text{ y }\mathbf{x}_u\text{ lin. ind. }\forall(u,v)\in U\Leftrightarrow\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\neq\mathbf{0}\ \forall(u,v)\in U.$$
2. Tenemos $d\mathbf{x}=\mathbf{x}_udu+\mathbf{x}_vdv$ por tanto
$$\mathbf{I}=d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}=(\mathbf{x}_udu+\mathbf{x}_vdv)\cdot(\mathbf{x}_udu+\mathbf{x}_vdv)$$
$$=(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u)\,du^2+2\,(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v)\,dudv+(\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v)\,dv^2$$
$$=(du,dv)\begin{pmatrix}\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u&\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v\\\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v&\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}=(du,dv)\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}.$$
3. Tenemos $\mathbf{x}_u=(1,0,2u)$, $\mathbf{x}_v=(0,1,-2v)$. Claramente $\mathbf{x}$ es una representación paramétrica regular de S. Entonces,
$$E=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=1+4u^2,\ F=\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=-4uv,\ G=\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=1+4u^2,$$
$$\mathbf{I}=(du,dv)\begin{pmatrix}1+4u^2&-4uv\\-4uv&1+4v^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}$$
$$=(1+4u^2)du^2+(-8uv)dudv+(1+4u^2)dv^2.$$
Para $(u,v)=(2,1)$,
$$\mathbf{I}=(du,dv)\begin{pmatrix}17&-8\\-8&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\dv\end{pmatrix}=17du^2-16dudv+5dv^2.$$
Los menores principales son $17>0$ y $17\cdot5-(-8)^2=21>0$, por tanto la forma cuadrática es definida positiva.

4. Para todo (du, dv), se verifica $\mathbf{I} = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = |d\mathbf{x}|^2 \geq 0$. Por otra parte,
$$\mathbf{I} = 0 \Leftrightarrow |d\mathbf{x}|^2 = 0 \Leftrightarrow |d\mathbf{x}| = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv| = 0$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv = \mathbf{0} \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\mathbf{x}_u \text{ y } \mathbf{x}_u \text{ lin. ind.}} \quad du = 0 \text{ y } dv = 0.$$
La forma cuadrática sólo se anula en $(du, dv) = (0, 0)$. Concluimos que $\mathbf{I}$ es definida positiva.
5. Usando que la diferencial aproxima al incremento de la función para "pequeñosïncrementos de las variables (en éste caso du y dv),
$$d\mathbf{x} \approx \Delta\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{I} = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \approx \Delta\mathbf{x} \cdot \Delta\mathbf{x} = |\Delta\mathbf{x}|^2.$$
6. La curva γ es de clase 1 en $[a, b]$, en consecuencia su longitud L es
$$L = \int_a^b \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|^2 dt = \int_a^b \sqrt{\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}}\, dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{\left(\mathbf{x_u}\frac{du}{dt} + \mathbf{x_v}\frac{dv}{dt}\right) \cdot \left(\mathbf{x_u}\frac{du}{dt} + \mathbf{x_v}\frac{dv}{dt}\right)}\, dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{\mathbf{I}\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)}\, dt.$$
7. Tenemos $\mathbf{x}_u = (1, 1, v)$, $\mathbf{x}_v = (1, -1, u)$. Claramente $\mathbf{x}(u, v)$ es una representación paramétrica regular de S. Entonces,
$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 2 + v^2,\ F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = uv,\ G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 2 + u^2$$
$$\Rightarrow \mathbf{I}\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right) = (2 + v^2)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2uv\frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + (2 + u^2)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$
$$= (2 + 4t^2) + (8t^2) + (2 + t^2) \cdot 4 = 16t^2 + 10.$$
La longitud de γ es por tanto
$$L = \int_0^1 \sqrt{16t^2 + 1}\, dt = \int_0^1 \sqrt{16(t^2 + 1/16)}\, dt = 4\int_0^1 \sqrt{t^2 + 1/16}\, dt,$$
integral que fácilmente se resuelve aplicando la conocida fórmula
$$\int \sqrt{t^2 + a}\, dx = \frac{t}{2}\sqrt{t^2 + a} + \frac{a}{2}\log|t + \sqrt{t^2 + a}| + C.$$
8. Los vectores de direeción de las curvas coordenadas son $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$, por tanto si β es el ángulo que forman tales curvas,
$$\cos\beta = \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u|\,|\mathbf{x}_v|} = \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v}{\sqrt{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u}\sqrt{\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`