MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

CONCEPTO DE PRODUCTO TENSORIAL

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Definimos el producto tensorial de n espacios vectoriales como solución al problema de la aplicación universal para aplicaciones multilineales.

Índice

1. Concepto de aplicación multilineal

Definición 1.1. Sean $V_1, \ldots, V_n, V$ espacios vectoriales sobre el cuerpo K y sea

$$\phi : V_1 \times \ldots \times V_n \to V$$

una aplicación. Se dice que ϕ es *multilineal* si $\forall i = 1, \ldots, n$ se verifica

(a) $\phi(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_n) = \phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \phi(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n)$,

(b) $\phi(v_1, \ldots, \alpha v_i, \ldots, v_n) = \alpha\phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$,

en donde $v_i, v_i' \in V_i$, $v_j \in V_j$ si $j \neq i$ y $\alpha \in K$.

Nótese que el que ϕ es multilineal equivale a decir que la aplicación de V_i en V dada por $\phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, \bullet, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ es lineal $\forall i = 1, \ldots, n$.

Si $n = 2$, decimos que ϕ es una aplicación *bilineal*. Si $V = K$ decimos que ϕ es *forma* multilineal.

Ejemplo 1.1. Si $n = 1$, entonces $\phi : V_1 \to V$ es multilineal si y sólo si es lineal como consecuencia inmediata de la definición de aplicación multilineal.

Key words and phrases. Producto, tensorial.

Ejemplo 1.2. La aplicación $\phi : V \times V^* \to K$ dada por $\phi(x,T) = T(x)$ es forma bilineal. En efecto,

$$\begin{aligned}&\phi(x+y,T) = T(x+y) = T(x)+T(y) = \phi(x,T)+\phi(y,T),\\&\phi(\alpha x,T) = T(\alpha x) = \alpha T(x) = \alpha\phi(x,T).\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}&\phi(x,T+S) = (T+S)(x) = T(x)+S(x) = \phi(x,T)+\phi(x,S),\\&\phi(x,\alpha T) = (\alpha T)(x) = \alpha T(x) = \alpha\phi(x,T).\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3. Sea $\phi : (K^n)^n = K^n \times \ldots K^n \to K$ dada por $\phi(v_1,\ldots,v_n) = \det A$ siendo $A = [v_1 \ldots v_n]$ matriz con columnas $v_1 \ldots v_n$. Veamos que ϕ es multilineal. Usando conocidas propiedades de los determinantes,

$$\begin{gathered}\phi(v_1,\ldots,v_i+v_i',\ldots,v_n) = \det[v_1 \ldots v_i+v_i' \ldots v_n]\\= \det[v_1 \ldots v_i \ldots v_n] + \det[v_1 \ldots v_i' \ldots v_n]\\= \phi(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)+\phi(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_n).\end{gathered}$$

Por otra parte,

$$\begin{gathered}\phi(v_1,\ldots,\alpha v_i,\ldots,v_n) = \det[v_1 \ldots \alpha v_i \ldots v_n]\\= \alpha\det[v_1 \ldots v_i \ldots v_n] = \alpha\phi(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n).\end{gathered}$$

Ejemplo 1.4. Sea A un álgebra sobre K. Definimos

$$\phi : A^n \to A, \quad \phi(v_1,v_2,\ldots,\, v_n) = v_1v_2\cdots v_n.$$

Entonces, ϕ es multilineal. En efecto, usando las conocidas propiedades de un álgebra,

$$\begin{aligned}&\phi(v_1,\ldots,v_i+v_i',\ldots,v_n) = v_1\cdots(v_i+v_i')\cdots v_n\\&= v_1\cdots v_i\cdots v_n + v_1\cdots v_i'\cdots v_n\\&= \phi(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)+\phi(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_n).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\phi(v_1,\ldots,\alpha v_i,\ldots,v_n) = v_1\cdots(\alpha v_i)\cdots v_n\\&= \alpha(v_1\cdots v_i\cdots v_n) = \alpha\phi(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n).\end{aligned}$$

Como casos particulares tenemos las álgebras: $K^{n\times n}$ (matrices cuadradas), $K[x]$ (polinomios), $C^k(I)$, $k = 0,1,2,\ldots,\infty$ (funciones reales de clase k en un intervalo cerrado $I = [a,b]$).

Ejemplo 1.5. Sea $\phi : V_1 \times \ldots \times V_n \to V$ multilineal y $T : V \to W$ lineal. Entonces, $T\circ\phi$ es multilineal. Tenemos $T\circ\phi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ y

$$\begin{aligned}&(T\circ\phi)(v_1,\ldots,v_i+v_i',\ldots,v_n) = T\left[\phi(v_1,\ldots,v_i+v_i',\ldots,v_n)\right]\\&= T\left[\phi(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)+\phi(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_n)\right]\\&= T\left[\phi(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)\right]+T\left[\phi(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_n)\right]\\&= (T\circ\phi)(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)+(T\circ\phi)(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_n).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(T\circ\phi)(v_1,\dots,\alpha v_i,\dots,v_n)=T\left[\phi(v_1,\dots,\alpha v_i,\dots,v_n)\right]\\
&=T\left[\alpha\phi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)\right]=\alpha T\left[\phi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)\right]\\
&=\alpha(T\circ\phi)(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n).
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.6. La siguiente aplicación es multilineal

$$\phi:(C^\infty(I))^n\to C^\infty(I),\quad \phi(f_1,\dots,f_n)=(f_1\cdot\ldots\cdot f_n)'.$$

En efecto, el operador derivación $D:C^\infty(I)\to C^\infty(I)$ es lineal, y la aplicación $\phi_1:(C^\infty(I))^n\to C^\infty(I)$ dada por $\phi_1(f_1,\dots,f_n)=f_1\cdot\ldots\cdot f_n$ es multilineal según el ejemplo 1.4. Pero $\phi=D\circ\phi_1$ que según el ejemplo 1.5 es multilineal.

Ejemplo 1.7. Si $C[a,b]$ es el álgebra de las funciones reales continuas en el intervalo $[a,b]$, entonces la aplicación $\phi:(C[a,b])^n\to C[a,b]$ dada por

$$\phi(f_1,\dots,f_n)=\int_a^b f_1\cdot\ldots\cdot f_n$$

es multilineal. Claramente, el operador integración $\operatorname{Int}:C[a,b]\to C[a,b]$ es lineal, y la aplicación $\phi_1:(C[a,b])^n\to C[a,b]$ dada por $\phi_1(f_1,\dots,f_n)=f_1\cdot\ldots\cdot f_n$ es multilineal según el ejemplo 1.4. Pero $\phi=\operatorname{Int}\circ\phi_1$ que según el ejemplo 1.5 es multilineal.

2. Espacio vectorial de las aplicaciones multilineales

Recordamos que si $X\neq\emptyset$ es un conjunto, V un espacio vectorial sobre el cuerpo K y V^X, el conjunto de las aplicaciones de X en V entonces, V^X es espacio vectorial sobre K con las operaciones habituales $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ (suma) y $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ (producto por un escalar). Para $V_1,\dots,V_n,V$ espacios vectoriales sobre el cuerpo K denotamos por $\operatorname{Mul}_K(V_1\times\ldots\times V_n,V)$ al conjunto de todas las aplicaciones multilineales de $V_1\times\ldots\times V_n$ en V.

Teorema 2.1. $\operatorname{Mul}_K(V_1\times\ldots\times V_n,V)$ es subespacio vectorial de $V^{V_1\times\ldots\times V_n}$.

Demostración. La aplicación nula es claramente multilineal. Si $\lambda,\mu\in K$ y $\phi,\varphi\in\operatorname{Mul}_K(V_1\times\ldots\times V_n,V)$, entonces,

$$\begin{gathered}
(\lambda\phi+\mu\varphi)(v_1,\dots,v_i+v_i',\dots,v_n)=(\lambda\phi)(v_1,\dots,v_i+v_i',\dots,v_n)\\
+(\mu\varphi)(v_1,\dots,v_i+v_i',\dots,v_n)=\lambda\phi(v_1,\dots,v_i+v_i',\dots,v_n)\\
+\mu\varphi(v_1,\dots,v_i+v_i',\dots,v_n)=\lambda[\phi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)+\phi(v_1,\dots,v_i',\dots,v_n)]\\
+\mu[\varphi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)+\varphi(v_1,\dots,v_i',\dots,v_n)]\\
=[\lambda\phi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)+\mu\varphi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)]\\
+\left[\lambda\phi(v_1,\dots,v_i',\dots,v_n)+\mu\varphi(v_1,\dots,v_i',\dots,v_n)\right]\\
(\lambda\phi)(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)+(\mu\varphi)(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)\\
+(\lambda\phi)(v_1,\dots,v_i',\dots,v_n)+(\mu\varphi)(v_1,\dots,v_i',\dots,v_n)\\
=(\lambda\phi+\mu\varphi)(v_1,\dots,v_i,\dots,v_n)+(\lambda\phi+\mu\varphi)(v_1,\dots,v_i',\dots,v_n),
\end{gathered}$$

y se satisface la primera condición de aplicación multilineal. Ahora, y para todo $\alpha \in K$,

$$(\lambda\phi + \mu\varphi)(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) = (\lambda\phi)(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n)$$

$$+(\mu\varphi)(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) = \lambda\phi(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n)$$

$$+\mu\varphi(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n) = \alpha\lambda\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \alpha\mu\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

$$= \alpha[\lambda\phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \mu\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)]$$

$$= \alpha[(\lambda\phi)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + (\mu\varphi)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)]$$

$$= \alpha(\lambda\phi + \mu\varphi)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n),$$

y $\lambda\phi + \mu\varphi$ es multilineal. Concluimos pues que $\operatorname{Mul}_K(V_1 \times \ldots \times V_n, V)$ es subespacio vectorial de $V^{V_1 \times \ldots \times V_n}$. $\square$

Si E y F son dos espacios vectoriales sobre el cuerpo K, se designa por $\operatorname{Lin}_K(E, F)$ al espacio vectorial de las aplicaciones lineales $T : E \to F$.

Teorema 2.2. Si $n \geq 2$ se verifica

$$\operatorname{Mul}_K(V_1 \times \ldots \times V_n, V) \cap \operatorname{Lin}_K(V_1 \times \ldots \times V_n, V) = \{0\}.$$

Demostración. Fijemos $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y sea $\phi : V_1 \times \ldots \times V_n \to V$ multilineal y lineal. Por ser multilineal se verifica

$$\phi(v_1, \dots, v_i + v_i, \dots, v_n) = \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

Por ser lineal. se verifica

$$\phi(v_1, \dots, v_i + v_i, \dots, v_n) = \phi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \phi(0, \dots, v_i, \dots, 0).$$

De las dos relaciones anteriores, $\phi(v_1, \dots, , v_n) = \phi(0, \dots, v_i, \dots, 0)$. De nuevo, por ser ϕ lineal,

$$\phi(v_1, \dots, v_n) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n}(0, \dots, v_i, \dots, 0))\right) = \sum_{i=1}^{n}\phi(0, \dots, v_i, \dots, 0)$$

Restando a la última igualdad la $\phi(v_1, \dots, , v_n) = \phi(0, \dots, v_i, \dots, 0)$, obtenemos $\phi(v_1, \dots, v_{i-1}, 0, v_{i+1}, \dots, v_n) = 0$. Ahora para $n \geq 2$, al ser v_i arbitrario también lo es el subindice i por tanto para todo $(v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \ldots \times V_n$ tenemos $\phi(v_1, \dots, v_n) = \phi(0, v_2, \dots, v_n) + \phi(v_1, 0, \dots, 0) = 0 + 0 = 0$. $\square$

Resumiendo, para $n = 1$ tenemos $\operatorname{Mul}_K(V_1, V) = \operatorname{Lin}_K(V_1, V)$, y para $n \geq 2$ una aplicación multilineal $\phi : V_1 \times \ldots \times V_n \to V$ no nula, no es una aplicación lineal de $V_1 \times \ldots \times V_n$ en V y viceversa.

3. Problema de la aplicación universal

En los ejemplos 1.6 y 1.7 vimos que una manera de construir aplicaciones multilineales sobre $V_1 \times \ldots \times V_n$ es elegir una aplicación multilineal fija de $V_1 \times \ldots \times V_n$ sobre V y luego componerla con varias aplicaciones lineales de V en otro espacio vectorial. Se plantea la siguiente pregunta: ¿podemos con una adecuada elección de V construir todas las aplicaciones multilineales sobre $V_1 \times \ldots \times V_n$ de esta manera?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y nos llevará a construir el producto tensorial de los espacios $V_1, \ldots, V_n$. De forma más precisa, planteamos el siguiente problema, llamado *problema de la aplicación universal para aplicaciones multilineales.*

Problema 3.1. Sean $V_1, \ldots, V_n$ espacios vectoriales sobre K, ¿existe un espacio vectorial V sobre K y una aplicación multilineal $\phi : V_1 \times \ldots \times V_n \to V$ tal que para cada aplicación multilineal $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ existe una única $T \in \mathrm{Lin}_K(V, W)$ tal que $\varphi = T \circ \phi$?

En términos de diagrama conmutativo: ¿podemos construir una aplicación multilineal $\phi : V_1 \times \ldots \times V_n \to V$ con la propiedad de que para toda $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ multilineal existe una única $T \in \mathrm{Lin}_K(V, W)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo?

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & V \arrow[dl, "T"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Nótese que cualquier solución al problema planteado consiste en un par (V, ϕ) con $\phi : V_1 \times \ldots \times V_n \to V$ multilineal. Antes de construir una solución al problema 3.1, demostremos que la solución es esencialmente única salvo isomorfismos.

Teorema 3.1. Sean (V, ϕ) y (V', ϕ') dos soluciones al problema 3.1. Entonces, existen dos isomorfismos $T_1 \in \mathrm{Lin}_K(V, V')$ y $T_2 \in \mathrm{Lin}_K(V', V)$ tales que
(a) $T_1 \circ T_2 = I_V,\ T_2 \circ T_1 = I_{V'}$.
(b) Los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\phi'"'] & & V \arrow[dl, "T_1"] \\ & V' & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[rr, "\phi'"] \arrow[dr, "\phi"'] & & V' \arrow[dl, "T_2"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como (V, ϕ) es solución al problema 3.1, existe un único $T_1 \in \text{Lin}_K(V, V')$ tal que $T_1 \circ \phi = \phi'$. Como (V', ϕ') es solución al problema 3.1, existe un único $T_2 \in \text{Lin}_K(V', V)$ tal que $T_2 \circ \phi' = \phi$. Esto demuestra que los dos diagramas dados son conmutativos. Por otra parte,

$$(T_2 \circ T_1) \circ \phi = T_2 \circ (T_1 \circ \phi) = T_2 \circ \phi' = \phi,$$

lo cual implica que el siguiente diagrama también es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & V \arrow[dl, "T_2 \circ T_1"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

Si sustituimos $T_2 \circ T_1$ por I_V, el anterior diagrama también es conmutativo. Pero al ser (V, ϕ) es solución al problema 3.1, sólo hay una aplicación lineal tal que dicho diagrama es conmutativo lo cual implica que $T_2 \circ T_1 = I_V$. De manera análoga se demuestra que $T_1 \circ T_2 = I_{V'}$. $\square$

4. Espacio vectorial producto

Vamos a construir el espacio vectorial producto de una colección cualquiera de espacios vectoriales. Sea Δ un conjunto no vacío de índices y $\{V_i : i \in \Delta\}$ una colección de espacios vectoriales sobre el cuerpo K. El conjunto producto cartesiano de los V_i se define según sabemos como

$$V = \prod_{i \in \Delta} V_i = \{f : \Delta \to \bigcup_{i \in \Delta} V_i : f \text{ es aplicación con } f(i) \in V_i \ \forall i \in \Delta\}.$$

Teorema 4.1. *V es espacio vectorial con las operaciones:*
Suma. Para todo $f, g \in V$, $(f+g)(i) = f(i) + g(i)$
Ley externa. Para todo $\alpha \in K$ y para todo $f \in V$, $(\alpha f)(i) = \alpha f(i)$.

Demostración. 1) Veamos que $(V, +)$ es grupo abeliano.
Interna. Si $f, g \in V$, para todo $i \in \Delta$ se verifica $f(i) \in V_i$ y $g(i) \in V_i$ con lo cual $(f+g)(i) = f(i) + g(i) \in V_i$ luego $f + g \in V$.
Asociativa. Para todo $f, g, h \in V$ y para todo $i \in \Delta$,

$$\begin{aligned}
((f+g)+h)(i) &= (f+g)(i) + h(i) = (f(i) + g(i)) + h(i) \\
&= f(i) + (g(i) + h(i)) = f(i) + (g+h)(i) = (f + (g+h))(i) \\
&\Rightarrow (f+g)+h = f+(g+h).
\end{aligned}$$

Conmutativa. Para todo $f, g \in V$ y para todo $i \in \Delta$,

$$(f+g)(i) = f(i) + g(i) = g(i) + f(i) = (g+f)(i) \Rightarrow f + g = g + f.$$

Existencia de elemento neutro. Sea la aplicación $f_0(i) = 0$ para todo $i \in \Delta$. Claramente $f_0 \in V$ y para toda $f \in V$ y para todo $i \in \Delta$,

$$(f + f_0)(i) = f(i) + f_0(i) = f(i) + 0 = f(i) \Rightarrow f + f_0 = f,$$

con lo cual f_0 es elemento neutro para la suma.
Existencia de elemento simétrico. Sea la aplicación $f \in V$ y definimos la aplicación $-f$ como $(-f)(i) = -f(i)$ para todo $i \in \Delta$. Claramente $-f \in V$ y además

$$(f + (-f))(i) = f(i) + (-f)(i) = f(i) - f(i) = 0 \ \forall i \in \Delta \Rightarrow f + (-f) = f_0,$$

con lo cual $-f$ es elemento simétrico de f para la suma.

2) Veamos que se cumplen los cuatro axiomas de ley externa.
(a) Para todo $f, g \in V$ para todo $\alpha \in K$ y para todo $i \in \Delta$,

$$\begin{aligned}[\alpha(f+g)](i) &= \alpha(f+g)(i) = \alpha(f(i) + g(i)) = \alpha f(i) + \alpha g(i) \\ &= (\alpha f)(i) + (\alpha g)(i) = (\alpha f + \alpha g)(i) \Rightarrow \alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g.\end{aligned}$$

(b) Para todo $f \in V$ para todo $\alpha, \beta \in K$ y para todo $i \in \Delta$,

$$\begin{aligned}[(\alpha+\beta)f](i) &= (\alpha+\beta)f(i) = \alpha f(i) + \beta f(i) = (\alpha f)(i) + (\beta f)(i) \\ &= (\alpha f + \beta f)(i) \Rightarrow (\alpha + \beta) f = \alpha f + \beta f.\end{aligned}$$

(c) Para todo $f \in V$ para todo $\alpha, \beta \in K$ y para todo $i \in \Delta$,

$$\begin{aligned}[(\alpha\beta)f](i) &= (\alpha\beta)f(i) = \alpha[\beta f(i)] = \alpha[(\beta f)(i)] \\ &= [\alpha(\beta f)](i) \Rightarrow (\alpha\beta)f = \alpha(\beta f).\end{aligned}$$

(d) Para todo $f \in V$ y para todo $i \in \Delta$,

$$(1f)(i) = 1f(i) = f(i) \Rightarrow 1f = f.$$

□

5. Espacio suma directa externa

Definición 5.1. Sea Δ un conjunto no vacío de índices, $\{V_i : i \in \Delta\}$ una colección de espacios vectoriales sobre el cuerpo K y $V = \prod_{i \in \Delta} V_i$ el correspondiente espacio vectorial producto. Se define la *suma directa externa* de los espacios V_i como

$$\bigoplus_{i \in \Delta} V_i = \{f \in V : f(i) = 0 \text{ salvo un número finito de índices } i \in \Delta\}.$$

Teorema 5.1. La suma directa externa de los espacios V_i es subespacio de V.

Demostración. El vector nulo de f_0 de V cumple $f_0(i) = 0$ para todo $i \in \Delta$ luego lo cumple salvo el número finito nulo de subindides de Δ, es decir $f_0 \in \bigoplus_{i\in\Delta} V_i$. Si $f, g \in \bigoplus_{i\in\Delta} V_i$, entonces existen subconjuntos finitos Δ_1 y Δ_2 de Δ tales que

$$\begin{aligned} &f(i) = 0 \ \text{ si } \ i \in \Delta - \Delta_1, \quad f(i) \neq 0 \ \text{ si } \ i \in \Delta_1, \\ &g(i) = 0 \ \text{ si } \ i \in \Delta - \Delta_2, \quad g(i) \neq 0 \ \text{ si } \ i \in \Delta_2. \end{aligned}$$

Entonces, si $\alpha, \beta \in K$ se verifica

$$i \in (\Delta - \Delta_1) \cap (\Delta - \Delta_2) \Rightarrow (\alpha f + \beta g)(i) = \alpha f(i) + \beta g(i) = 0$$

Ahora bien,

$$(\Delta - \Delta_1) \cap (\Delta - \Delta_2) = (\Delta \cap \Delta_1^c) \cap (\Delta \cap \Delta_2^c)$$

$$= \Delta \cap \Delta_1^c \cap \Delta_2^c = \Delta_1^c \cap \Delta_2^c = (\Delta_1 \cup \Delta_2)^c .$$

Entonces, $(\alpha f + \beta g)(i) \neq 0$ a lo sumo en $\Delta_1 \cup \Delta_2$ que es un conjunto finito. Es decir, $\alpha f + \beta g \in \bigoplus_{i\in\Delta} V_i$. □

Sea ahora $V_i = K$ para todo $i \in K$ y llamemos $U = \bigoplus_{i\in\Delta} K$, es decir la suma directa externa consta ahora de $|\Delta|$ copias de K. Para todo $i \in \Delta$ definimos el vector $\delta_i \in U$ de la forma $\delta_i(j) = 1$ si $j = i$ y $\delta_i(j) = 0$ si $j \neq i$. Es decir, $\delta_i(j) = \delta_{ij}$ (deltas de Kronecker).

Teorema 5.2. $B = \{\delta_i : i \in \Delta\}$ es base de $U = \bigoplus_{i\in\Delta} K$.

Demostración. Veamos que B es sistema libre. Elijamos $S = \{\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_m}\} \subset B$ y sea

$$\alpha_1\delta_{i_1} + \cdots + \alpha_m\delta_{i_m} = 0 \quad \text{con} \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K.$$

Para todo $i = i_k$ con $k = 1, \ldots, m$ tenemos

$$(\alpha_1\delta_{i_1} + \cdots + \alpha_m\delta_{i_m})(i_k) = 0(i_k) \Rightarrow \alpha_k \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0.$$

Veamos que B es sistema generador. Si $f \in U$, existe un subconjunto finito $\Delta' = \{i_1, \ldots, i_n\}$ de Δ tal que $f(i) = 0$ si $i \in \Delta - \Delta'$ y $f(i) = 1$ si $i \in \Delta_1$. Veamos que se verifica

$$f = f(i_1)\delta_{i_1} + \cdots + f(i_n)\delta_{i_n}. \qquad (*)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} i \in \Delta - \Delta' \Rightarrow \left(f(i_1)\delta_{i_1} + \cdots + f(i_n)\delta_{i_n}\right)(i) &= f(i_1)\delta_{i_1}(i) + \cdots + f(i_n)\delta_{i_n}(i) \\ &= f(i_1) \cdot 0 + \cdots + f(i_n) \cdot 0 = 0 = f(i). \end{aligned}$$

$$i \in \Delta' \Rightarrow \left(f(i_1)\delta_{i_1} + \cdots + f(i_n)\delta_{i_n}\right)(i) = f(i)\delta_i(i) = f(i) \cdot 1 = f(i).$$

en consecuencia, se verifica la igualdad $(*)$. □

6. Solución al problema de la aplicación universal

Supongamos que el conjunto de índices Δ es un espacio vectorial. Entonces, tiene sentido en el espacio suma directa externa $U = \bigoplus_{i \in \Delta} K$ considerar vectores de la forma

$$\delta_{(i_1+\ldots+i_n)} - \delta_{i_1} - \ldots - \delta_{(i_1+\ldots+i_n)}, \quad \delta_{\alpha i} - \alpha\delta_i.$$

Sean ahora $V_1, \ldots, V_n$ espacios vectoriales sobre el cuerpo K y por simplicidad de notación, llamemos $Z = V_1 \times \ldots \times V_n$. Consideremos

$$U = \bigoplus_{(v_1,\ldots,v_n)\in Z} K$$

es decir, U es la suma directa externa de $|Z|$ copias de K. Consideremos el subespacio U_0 de U generado por vectores de la forma

$$\begin{aligned} &\delta_{(v_1,\ldots,v_i+v_i',\ldots,v_n)} - \delta_{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)} - \delta_{(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_n)}, \\ &\delta_{(v_1,\ldots,\alpha v_i,\ldots,v_n)} - \alpha\delta_{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

en donde i varía de 1 a n, y α recorre K. Por último, Consideremos el espacio vectorial cociente $V = U/U_0$ y la aplicación

$$\phi : V_1 \times \ldots \times V_n \to V, \quad \phi(v_1, \ldots, v_n) = \delta_{(v_1,\ldots,v_n)} + U_0.$$

Teorema 6.1. El par (V, ϕ) es solución al problema de la aplicación universal 3.1.

Demostración. Veamos que la aplicación ϕ es multilineal. Dado que

$$\begin{aligned} &\delta_{(v_1,\ldots,v_i+v_i',\ldots,v_n)} - \delta_{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)} - \delta_{(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_n)} \in U_0, \\ &\delta_{(v_1,\ldots,\alpha v_i,\ldots,v_n)} - \alpha\delta_{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)} \in U_0, \end{aligned}$$

y por definición de espacio cociente, podemos escribir

$$\begin{aligned} \phi(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_n) &= \delta_{(v_1,\ldots,v_i+v_i',\ldots,v_n)} + U_0 \\ &= \left(\delta_{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)} + \delta_{(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_n)}\right) + U_0 \\ &= \left(\delta_{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)} + U_0\right) + \left(\delta_{(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_n)} + U_0\right) \\ &= \phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \phi(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n). \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} \phi(v_1, \ldots, \alpha v_i, \ldots, v_n) &= \delta_{(v_1,\ldots,\alpha v_i,\ldots,v_n)} + U_0 \\ &= \alpha\delta_{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)} + U_0 \\ &= \alpha\left(\delta_{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)} + U_0\right) \\ &= \alpha\phi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n), \end{aligned}$$

y por tanto ϕ es multilineal.

Sea $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ una aplicación multilineal. Tenemos que demostrar que existe una única aplicación lineal $T : V \to W$ tal que $T \circ \phi = \varphi$. Sabemos que $B = \{\delta_{(v_1,\ldots,v_n)} : (v_1, \ldots, v_n) \in Z\}$ es base de U y por tanto, existe una única aplicación lineal $T_0 : U \to W$ tal que $T_0\left(\delta_{(v_1,\ldots,v_n)}\right) = \varphi(v_1,\ldots,v_n)$ para todo $(v_1,\ldots,v_n) \in Z$. Como φ es multilineal, anula a los generadores 6.1 de U_0 y por tanto $U_0 \subset \ker T_0$. Por un conocido teorema de isomorfía, T_0 induce una aplicación lineal $T : U/U_0 \to W$ tal que

$$T\left(\delta_{(v_1,\ldots,v_n)} + U_0\right) = T_0\left(\delta_{(v_1,\ldots,v_n)}\right) = \varphi(v_1,\ldots,v_n),$$

para todo $(v_1,\ldots,v_n) \in Z$. Dado que $\phi(v_1,\ldots,v_n) = \delta_{(v_1,\ldots,v_n)} + U_0$, se verifica $T \circ \phi = \varphi$.

Por último, supongamos que $T' : V \to W$ es una aplicación lineal que verifica $T' \circ \phi = \varphi$. Tenemos que demostrar que $T' = T$. Dado que $T' \circ \phi = \phi$, se verifica $T' = T$ sobre Im ϕ. Pero de la construcción de V y ϕ es Im $\phi = V$ y por tanto $T' = T$. $\square$

7. Producto tensorial de espacios vectoriales

Definición 7.1. El espacio $V = U/U_0$ se llama *producto tensorial* de los espacios vectoriales $V_1,\ldots,V_n$ y se representa por $V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n$ o simplemente por $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ cuando el cuerpo K se sobreentienda.

Resumimos el proceso que nos lleva a la construcción del producto tensorial $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

1. Partimos de n espacios vectoriales $V_1,\ldots,V_n$ sobre el cuerpo K.
2. Construimos el espacio vectorial suma directa externa
$$U = \bigoplus_{(v_1,\ldots,v_n)\in V_1\times\ldots\times V_n} K$$
3. Consideramos el subespacio U_0 de U generado por los vectores de la forma
$$\delta_{(v_1,\ldots,v_i+v_i',\ldots,v_n)} - \delta_{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)} - \delta_{(v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_n)},$$
$$\delta_{(v_1,\ldots,\alpha v_i,\ldots,v_n)} - \alpha\delta_{(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_n)},$$
con $\delta_i(j) = \delta_{ij}$ (deltas de Kronecker).
4. El producto tensorial de los espacios $V_1,\ldots,V_n$ es por definición
$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n := U/U_0.$$
5. El siguiente diagrama
$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \arrow[dl, "T"] \\ & W & \end{tikzcd}$$
con $\phi(v_1,\ldots,v_n) = \delta_{(v_1,\ldots,v_n)} + U_0$ permite visualizar el objetivo del producto tensorial: toda forma multilineal $\varphi \in \mathrm{Mul}_K(V_1\times\ldots\times V_n, W)$ es de la forma $\varphi = T \circ \phi$ con $T \in \mathrm{Lin}_K(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W)$ única.

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`