MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

TEOREMA DEL VALOR MEDIO ESCALAR

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Proporcionamos la demostración del teorema del valor medio escalar, un ejemplo y la impostibilidad de extenderlo a campos no escalares.

Enunciado
1) Demostrar el teorema del valor medio escalar:
Sea E un espacio nornado, $A \subset E$ abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ diferenciable. Sean $a, b \in A$ con $a \neq b$ tales que el segmento $[a, b] \subset A$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que
$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a).$$
2) Verificar la validez del teorema del valor medio escalar para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada for $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ en el intervalo $[a, b]$ con $a = (0, 0)$, $b = (1, 1)$.
3) Demostrar que el teorema del valor medio escalar no se puede extender a campos no escalares. Para ello, considerar $f : E = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$f(t) = (\cos t, \sin t)^T \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
y cualquier intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ de amplitud 2π.

Solución
1) Consideremos la función $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = f((1 - t)a + tb)$. Ésta función es continua en $[0, 1]$ y por la regla de la cadena,
$$\varphi'(t) = Df((1 - t)a + tb)(b - a) \quad \forall t \in (0, 1).$$
Aplicando a φ el teorema del valor medio para funciones reales de variable real, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que
$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0) = Df((1 - t_0)a + t_0b)(b - a).$$
Basta ahora elegir $c = (1 - t_0)a + t_0b$.
2) Las parciales de f son $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y$, que son continuas en $\mathbb{R}^2$ y por tanto f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. El segmento (a, b) es
$$(a, b) = \{(1 - t)(0, 0) + t(1, 1) : 0 < t < 1\} = \{(t, t) : 0 < t < 1\}.$$

Key words and phrases. Teorema, valor medio, escalar.

Cualquier $c \in (a, b)$ es por tanto de la forma $c = (t, t)$ con $0 < t < 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) = Df(c)(b - a) &\Leftrightarrow 3 - 0 = \nabla f(t, t) \cdot (1, 1) \\ &\Leftrightarrow 3 = (2t, 6t) \cdot (1, 1) \Leftrightarrow 3 = 8t \Leftrightarrow t = 3/8, \end{aligned}$$

y $c = (3/8, 3/8) \in (a, b)$.

3) Las funciones componentes de f son $f_1(t) = \cos t$ y $f_2(t) = \sin t$ y

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = -\sin t, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = \cos t$$

que son continuas en todo $\mathbb{R}$, y por tanto f es diferenciable en $\mathbb{R}$. Si consideramos el intervalo cerrado $[a, b] = [a, a + 2\pi]$ y $c \in (a, b)$, entonces,

$$Df(c)(b - a) = \begin{pmatrix} -\sin c \\ \cos c \end{pmatrix} (2\pi).$$

Por otra parte,

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \cos(a + 2\pi) \\ \sin(a + 2\pi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pero $Df(c)(b-a) \neq (0, 0)^T$ para todo c, con lo cual no se verifica $f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$. $\square$

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`