MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

DESIGUALDAD DE JENSEN

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

RESUMEN. Usamos la desigualdad de Jensen para demostrar que la media geométrica es menor o igual que la aritmética.

Enunciado
El teorema de la desigualdad de Jensen, se expresa en los siguientes términos: Sea $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida con $\mu(\Omega) = 1$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que:
a) $f \in L^1(\mu)$.
b) $a < f(x) < b$ para todo $x \in (a, b)$.
c) $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ es convexa.
Entonces, se verifica la desigualdad de Jenssen

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f)\, d\mu.$$

Sean $y_1, \ldots, y_n$ números positivos. Aplicar la desigualdad de Jensen para demostrar que

$$\sqrt[n]{y_1 \ldots y_n} \leq \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$$

es decir, que la media geométrica es menor o igual que la media aritmética.

Solución
Consideremos el espacio de medida $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ con $\Omega = \{p_1, \ldots, p_n\}$ un conjunto finito, $\mathscr{M} = \mathscr{P}(\Omega)$ y la medida μ determinada por $\mu(p_i) = 1/n$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Se verifica

$$\mu(\Omega) = \mu(p_1) + \ldots + \mu(p_n) = 1/n + \ldots + 1/n = 1.$$

Consideremos ahora la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $f(p_i) = x_i$ para $x_i \in \mathbb{R}$ genéricos. La función f es claramente simple y medible y $\int |f|\, d\mu = \sum_{i=1}^n |x_i|\, \mu(p_i) < +\infty$ es decir, $f \in L^1(\mu)$. Por otra parte, $a < f(x) < b$ para

$$a < \text{mín}\{x_1, \ldots, x_n\}, \quad \text{máx}\{x_1, \ldots, x_n\} < b.$$

Elijamos la función convexa en (a, b) dada por $\varphi(x) = e^x$. Tenemos,

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) = e^{\int_\Omega f d\mu} = e^{x_1(1/n)+\ldots+x_n(1/n)} = \sqrt[n]{e^{x_1} \ldots e^{x_n}},$$

$$\int_\Omega (\varphi \circ f)\, d\mu = \int_\Omega e^f d\mu = e^{x_1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + e^{x_n} \cdot \frac{1}{n}.$$

Key words and phrases. Desigualdad, Jensen.

Por la desigualdad de Jensen,

$$\sqrt[n]{e^{x_1}\ldots e^{x_n}} \leq \frac{e^{x_1}+\ldots+e^{x_n}}{n}.$$

Dados los números positivos $y_1, \ldots, y_n$ y eligiendo $x_1, \ldots, x_n$ tales que $y_i = e^{x_i}$ para todo $i = 1, \ldots, n$ queda

$$\sqrt[n]{y_1\ldots y_n} \leq \frac{y_1+\ldots+y_n}{n}.$$

□

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`