MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

TRASCENDENCIA DEL NÚMERO e

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Demostramos que el número e es trascendente.

Teorema
El número real e es trascendente sobre $\mathbb{Q}$, es decir que no existe $p \in \mathbb{Q}[x]$ no nulo tal que $p(e) = 0$.

Demostración
Sea $f \in \mathbb{R}[x]$ de grado r y sea

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(r)}(x).$$

Hallemos la derivada de $h(x) = e^{-x}F(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = -e^{-x}\left(f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(r)}(x)\right)$$

$$+e^{-x}\left(f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(r)}(x) + f^{(r+1)}(x)\right) \underbrace{=}_{f^{(r+1)}(x)=0} e^{-x}f(x).$$

La función h satisface las hipótesis del valor medio de Lagrange en todo intervalo de la forma $[0, k]$ con $k > 0$ es decir, existe $\xi_k \in (0, k)$ tal que

$$h'(\xi_k) = \frac{h(k) - h(0)}{k - 0} = \frac{e^{-k}F(k) - F(0)}{k}.$$

Dado que $\xi_k = \theta_k k$ con $0 < \theta_k < 1$, y que $h'(\xi_k) = -e^{-\xi_k}f(\xi_k)$ podemos escribir $e^{-k}F(k) - F(0) = -e^{-\theta_k k}f(\theta_k k)\, k$ con $0 < \theta_k < 1$. Multiplicando pr e^k obtenemos $F(k) - e^kF(0) = -e^{(1-\theta_k)k}f(\theta_k k)\, k$ con $0 < \theta_k < 1$. Para $k = 1, 2, \ldots n$ obtenemos

$$\begin{aligned} &F(1) - eF(0) = -e^{(1-\theta_1)}f(\theta_1) = \epsilon_1 \\ &F(2) - e^2F(0) = -2e^{2(1-\theta_2)}f(2\theta_k) = \epsilon_2 \\ &\ldots \\ &F(n) - e^nF(0) = -ne^{n(1-\theta_n)}f(n\theta_n) = \epsilon_n. \end{aligned} \qquad (1)$$

Supongamos que e no es trascendente sobre $\mathbb{Q}$, entonces se satisface una relación de la forma $b_ne^n + b_{n-1}e^{n-1} + \cdots + b_1e + b_0 = 0$ con los $b_j \in \mathbb{Q}$ no

Key words and phrases. Trascendencia, número e.

todos nulos. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que se satisface una relación de la forma

$$c_n e^n + c_{n-1} e^{n-1} + \cdots + c_1 e + c_0 = 0 \qquad (2)$$

con los $c_j \in \mathbb{Z}$ y $c_0 > 0$. En las relaciones (1) multipliquemos la primera igualdad por c_1, la segunda por c_2, etc. Sumando obtenemos

$$c_1 F(1) + c_2 F(2) + \cdots + c_n F(n) - F(0) \left(c_1 e + c_2 e^2 + \ldots + c_n e^n \right)$$
$$= c_1 \epsilon_1 + c_2 \epsilon_2 + \ldots + c_n \epsilon_n.$$

Usando (2) queda

$$c_0 F(0) + c_1 F(1) + c_2 F(2) + \cdots + c_n F(n) = c_1 \epsilon_1 + c_2 \epsilon_2 + \ldots + c_n \epsilon_n. \quad (3)$$

Todo el anterior desarrollo es válido para cualquier polinomio $f(x)$. Ahora, vamos a elegir en concreto el polinomio

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p (2-x)^p \cdots (n-x)^p$$

en donde p es un número primo con $p > n$ y $p > c_0$. Al desarrollar, obtenemos un polinomio de la forma

$$f(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{a_0}{(p-1)!} x^p + \frac{a_1}{(p-1)!} x^{p+1} + \cdots$$

con $a_1, a_2 \ldots,$ enteros. Demostremos que si $i \geq p$ la derivada i-ésima $f^{(i)}(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y todos múltiplos de p. En efecto el primer sumando es un monomio de grado $p-1$ y por tanto, su derivada i-ésima es 0 si $i \geq p$. Los demás monomios son de la forma $m_k(x) = \frac{a_k}{(p-1)!} x^{p+k}$ con $k \geq 0$. Hallemos sus derivadas sucesivas.

$$m_k(x) = \frac{a_k}{(p-1)!} x^{p+k},$$

$$m_k'(x) = \frac{a_k}{(p-1)!} (p+k) x^{p+k-1},$$

$$m_k''(x) = \frac{a_k}{(p-1)!} (p+k)(p+k-1) x^{p+k-2},$$

$$\ldots$$

$$m_k^{(p)}(x) = \frac{a_k}{(p-1)!} (p+k)(p+k-1) \ldots (p+k-(p-1)) x^{p+k-p}$$

$$= \frac{a_k}{(p-1)!} (p+k)(p+k-1) \ldots (k+1) x^k = \frac{a_k}{(p-1)!} \cdot \frac{(p+k)!}{k!} x^k$$

$$= \frac{a_k (p)!}{(p-1)!} \cdot \frac{(p+k)!}{(p!)(k!)} x^k = p a_k \binom{p+k}{k} x^k.$$

El coeficiente del monomio $m_k^{(p)}(x)$ es por tanto entero y múltiplo de p y obviamente de la misma manera será el coeficiente de $m_k^{(i)}(x)$ para $i \geq p$. Como consecuencia, para todo entero j se verifica $f^{(i)}(j)$ es entero y múltiplo de p si $i \geq p$.

Por su propia construcción, $f(x)$ tiene a $x = 1, 2, \ldots, n$ como raíces de multiplicidad p. Entonces, para $j = 1, 2, \ldots, n$ se verifica $f(j) = 0$, $f'(j) = 0$, $\ldots$, $f^{(p-1)}(j) = 0$ y por tanto

$$F(j) = f(j) + f'(j) + \cdots + f^{(p-1)}(j) + f^{(p)}(j) + \cdots + f^{(r)}(j)$$

y por lo demostrado anteriormente $F(j)$ es entero y múltiplo de p para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Como $x = 0$ es raíz de multiplicidad $p-1$ de $f(x)$, se verifica $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(p-2)}(0) = 0$. Para $i \geq p$, $f^{(i)}(0)$ es entero y múltiplo de p y $f^{(p-1)}(0) = (n!)^p$. Al ser p primo y $p > n$, $p \not| (n!)^p$ es decir $f^{(p-1)}(0)$ no es divisible por p. Al ser

$$F(0) = f(0) + f'(0) + \ldots + f^{(p-2)}(0) + f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \ldots + f^{(r)}(0)$$

$$= f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \ldots + f^{(r)}(0)$$

se cumple que $F(0)$ es entero y no divisible por p. Al ser

$$c_0 > 0,\ p > c_0,\ p \not| F(0),\ p \mid F(1),\ p \mid F(2)\ , \ldots ,\ p \mid F(n)$$

podemos asegurar que $c_0F(0) + c_1F(1) + \ldots + c_nF(n)$ es entero y no divisible por p.

Las relaciones (1) expresan $-ie^{i(1-\theta_i)}f(i\theta_i) = \epsilon_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ por tanto,

$$\epsilon_i = \frac{-ie^{i(1-\theta_i)}(i\theta_i)^{p-1}(1-i\theta_i)^p \ldots (n-i\theta_i)^p}{(p-1)!} \quad (0 < \theta_i < 1).$$

Acotemos los ϵ_i en valor absoluto:

$$|\epsilon_i| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}.$$

Hallemos el límite de los ϵ_i cuando $p \to +\infty$. Tenemos

$$0 \leq |\epsilon_i| = e^n(n \cdot n!) \cdot \frac{(n \cdot n!)^{p-1}}{(p-1)!} \underbrace{\to}_{\text{si } p \to +\infty} 0$$

pues la exponencial es un infinito de orden menor que el factorial. Es decir, $\epsilon_i \to 0$ cuando $p \to +\infty$.

Podemos elegir un primo mayor que n y que c_0 que sea suficientemente grande para que ocurra $|c_1\epsilon_1 + \ldots + c_n\epsilon_n| < 1$. Pero por (3), $c_1\epsilon_1 + \ldots + c_n\epsilon_n = c_0F(0) + \ldots + c_nF(n)$ y por tanto ha de ser entero. Dado que en valor absoluto es menor que 1, la única opción es que $c_0F(0) + \ldots + c_nF(n) = 0$. Pero habíamos visto que $p \not| c_0F(0) + \ldots + c_nF(n)$ y sin embargo $p \mid 0$ lo cual es una contradicción. Es decir, de suponer que e no es trascendente llagamos a una contradicción. Concluimos pues que e es trascendente. $\square$

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`