MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍA FINAL

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

RESUMEN. Definimos la topología final y estudiamos propiedades de la misma.

Enunciado
Sea $f_i : (X, T_i) \to Y, i \in I$ una familia de aplicaciones de los espacios topológicos (X_i, T_i) en el conjunto Y.

1) Demostrar que $T_F = \{V \subset Y : f_i^{-1}(V) \in T_i \ \ \forall i \in T_i\}$ es una topología en Y. A la topología T_F se la llama topología *final* determinada por las aplicaciones f_i.
2) Demostrar que la topología final T_F es la mayor topología en Y de entre todas las que hacen a las f_i continuas.
3) Sea $f_i : (X, T_i) \to Y, i \in I$ una familia de aplicaciones de los espacios topológicos (X_i, T_i) en el conjunto Y. Sea (Z, T) un espacio topológico. Demostrar que una aplicación $g : (Y, T_F) \to (Z, T)$ es continua si y sólo si todas las composiciones $g \circ f_i$ son continuas.
4) Recíprocamente, demostrar que si una topología T' en Y cumple

$$g : (Y, T') \to (Z, T) \text{ es continua} \Leftrightarrow g \circ f_i \text{ es continua para todo } i \in I$$

entonces, T' es la topología final T_F.

Solución
1) Se verifican los tres axiomas de topología:
(i) $f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T_i$ para todo $i \in I$ luego $\emptyset \in T_F$. Por orta parte, $f_i^{-1}(Y) = \emptyset \in T_i$ para todo $i \in I$ y por tanto $T \in T_F$.
(ii) Si $\{V_j : j \in J\}$ es una colección de elementos de T_F, para todo $i \in I$ se verifica

$$f_i^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} V_j\right) = \bigcup_{j \in J} \underbrace{f_i^{-1}(V_j)}_{\in T_i} \in T_i,$$

lo cual implica que $\cup_{j \in J} V_j \in T_F$.
(iii) Si V_1, V_2 son elementos de T_F, para todo $i \in I$ se verifica

$$f_i^{-1}(V_1 \cap V_2) = \underbrace{f_i^{-1}(V_1)}_{\in T_i} \cap \underbrace{f_i^{-1}(V_2)}_{\in T_i} \in T_i$$

Key words and phrases. Topología, final.

lo cual implica que $V_1 \cap V_2 \in T_F$.
2) En efecto, sea T una topología en Y tal que todas las f_i son continuas. Si $V \in T$, entonces $f_i^{-1}(V) \in T_i$ para todo $i \in V$ y por tanto $V \in T_F$. Es decir, $T \subset T_F$.
3) La aplicaciones $f_i : (X_i, T_i) \to (Y, T_F)$ son continuas, por tanto si $g : (Y, T_F) \to (Z, T)$ es continua las $g \circ f_i$ también lo son (composición de continuas). Supongamos ahora que las aplicaciones $g \circ f_i$ son continuas. Si $W \in T$,
$$f_i^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f_i)^{-1}(W) \in T_i \text{ para todo } i,$$
con lo cual $g^{-1}(W) \in T_F$ y por tanto g es continua.
4) Consideremos las composiciones
$$f_i : (X, T_i) \xrightarrow{f_i} (Y, T') \xrightarrow{I_1} (Y, T_F),$$
$$f_i : (X, T_i) \xrightarrow{f_i} (Y, T_F) \xrightarrow{I_2} (Y, T'),$$
en donde tanto I_1 como I_2 representan la aplicación identidad en Y. Por el apartado anterior, la continuidad de las aplicaciones $f_i = I_1 \circ f_i$ para todo i implica que I_1 es continua, por tanto si $V \in T_F$ entonces $I_1^{-1}(V) = V \in T'$, es decir $T_F \subset T'$. Por hipótesis, la continuidad de las aplicaciones $f_i = I_2 \circ f_i$ para todo i implica que I_2 es continua, por tanto si $V \in T'$ entonces $I_2^{-1}(V) = V \in T_F$, es decir $T' \subset T_F$. Concluimos que T' es la topología final T_F. □

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`