MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

ISOMETRÍAS EN $\mathbb{R}^n$

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Demostramos que todas las isometrías de $\mathbb{R}^n$ son exactamente las aplicaciones de la forma $f(x) = Ax + b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y $b \in \mathbb{R}^n$ fijo.

Enunciado

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ los escribimos en columna y a sus componentes las designamos por la misma letra, por ejemplo si $x \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Consideramos en $\mathbb{R}^n$ el producto escalar usual $x \cdot y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$, que también lo podemos expresar en la forma $x \cdot y = x^T y$. En $\mathbb{R}^n$ la norma euclídea es $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ con lo cual $\|x\|^2 = x \cdot x$. La distancia euclídea entre los elementos x e y de $\mathbb{R}^n$ viene dada por $d(x, y) = \|x - y\|$.

1. Se dice que la aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una *isometría* si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se verifica $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ es decir, si conserva las distancias. Demostrar que:
(a) Cualquier traslación en $\mathbb{R}^n$ es isometría.
(b) Toda aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la forma $f(x) = Ax + b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y $b \in \mathbb{R}^n$ fijo es una isometría.
(c) La composición de dos isometrías es una isometría.

2. Demostrar que toda isometría $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se puede expresar de manera única en la forma $f = t \circ g$ siendo t una traslación y g una isometría que fija el origen.

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación. Demostrar que son equivalentes:
(i) f es una isometría y $f(0) = 0$.
(ii) f conserva el prodicto escalar i.e. $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

4. Demostrar que la única isometría de $\mathbb{R}^n$ que deja fijo el origen y los elementos de la base canónica es la identidad.

Key words and phrases. Isometrías, $\mathbb{R}^n$.

5. Demostrar que toda isometría $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que fija el origen es de la forma $f(x) = Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal. Como consecuencia, f es lineal e invertible.

6. (Forma de las isometrías de $\mathbb{R}^n$). Demostrar que toda aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la forma $f(x) = Ax+b$ con A ortogonal y $b \in \mathbb{R}^n$ fijo es una isometría. Recíprocamente. demostrar que toda isometría $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de la forma $f(x) = Ax + b$ con A ortogonal y $b \in \mathbb{R}^n$ fijo.

7. (Grupo de las isometrías). Demostrar que el conjunto $\mathcal{I}_n$ de las isometrías de $\mathbb{R}^n$ forman grupo con respecto de la operación composición.

Solución

1. (a) En efecto, una traslación t en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la forma $t(x) = x + b$ con $b \in \mathbb{R}^n$ fijo. Entonces, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se verifica

$$d(t(x), t(y)) = \|t(x) - t(y)\| = \|x + b - y - b\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

(b) Como A es ortogonal se verifica $A^TA = I$. Entonces, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$d(f(x), f(y))^2 = \|f(x) - f(y)\|^2 = \|Ax + b - Ay - b\|^2 = \|A(x - y)\|^2$$

$$= A(x - y) \cdot A(x - y) = (A(x - y))^T (A(x - y)) = (x - y)^T A^T A(x - y)$$

$$= (x-y)^T I(x-y) = (x-y)^T(x-y) = (x-y)\cdot(x-y) = \|x - y\|^2 = d(x, y)^2$$

y por tanto, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$

(c) Si f, g son isometrías, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se verifica

$$d((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) = \|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)\| = \|g(f(x)) - g(f(y)\|$$

$$\underbrace{=}_{g \text{ isom.}} \|f(x) - f(y)\| \underbrace{=}_{f \text{ isom.}} \|x - y\| = d(x, y).$$

2. $i)$ *Unicidad.* Supongamos que $f = t\circ g$ con $t(x) = x+b$ y g isometría cumpliendo $g(0) = 0$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica $f(x) = t(g(x)) = g(x) + b$. Haciendo $x = 0$ queda $b = f(0)$, luego la traslación está definida de manera única por f. Por otra parte ha de ser necesariamente $g(x) = f(x) - f(0)$ luego g está también determinada de manera única por f.
$ii)$ *Existencia.* Dada la isometría f consideremos la traslación $t(x) = x+f(0)$ y definamos $g(x) = f(x) - f(0)$. La función g es claramente una isometría que fija el origen y además $t(g(x)) = g(x)+f(0) = f(x)-f(0)+f(0) = f(x)$ luego $f = t \circ g$.

3. $(i) \Rightarrow (ii)$. Al ser f isometría se verifica

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{0.1}$$

Como $f(0) = 0$, haciendo $y = 0$ queda $\|f(x)\| = \|x\|$ o bien $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Elevando al cuadrado la igualdad (0.1) queda para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$: $(f(x) - f(y)) \cdot (f(x) - f(y)) = (x - y) \cdot (x - y)$ y desarrollando,

$$\|f(x)\|^2 - 2f(x) \cdot f(y) + \|f(y)\|^2 = \|x\|^2 - 2x \cdot y + \|y\|^2 .$$

Cancelado obtenemos $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
$(ii) \Rightarrow (i)$. Por hipótesis

$$f(x) \cdot f(y) = x \cdot y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{0.2}$$

Desarrollando $\|f(x) - f(y)\|^2$:

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = (f(x) - f(y)) \cdot (f(x) - f(y))$$

$$= f(x) \cdot f(x) - 2f(x) \cdot f(y) + f(y) \cdot f(y) = x \cdot x - 2x \cdot y + y \cdot y$$

$$= (x - y) \cdot (x - y) = \|x - y\|^2 ,$$

es decir $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y por tanto f es isometría. Haciendo $x = y = 0$ en la igualdad (0.2) obtenemos $\|f(0)\|^2 = \|0\|^2 = 0$ con lo cual, $f(0) = 0$

4. Al ser f isometría con $f(0) = 0$, se verifica por el apartado 3 que $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Fijando x y recorriendo y los vectores de la base canónica $e_1, \ldots, e_n$ obtenemos $f(x) \cdot f(e_i) = x \cdot e_i$ para todo i y al fijar f los vectores e_i queda

$$f(x) \cdot e_i = x \cdot e_i \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Escribiendo $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ queda $f(x) \cdot e_i = x \cdot e_i = x_i$ para todo i. La componente i-ésima de $f(x)$ es por tanto igual a x_i para todo i lo cual implica que $f(x) = x$. El razonamiento es válido para x genérico, luego $f = id$.

5. Por el apartado 3, se verifica $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Haciendo $x = y = e_i$ (i-ésimo vector de la base canónica), queda $f(e_i) \cdot f(e_i) = e_i \cdot e_i = 1$ con lo cual $\|f(e_i)\|^2 = 1$ es decir, los vectores $f(e_i)$ son unitarios para todo $i = 1, \ldots, n$. Haciendo $x = e_i$, $y = e_j$ con $i \neq j$ queda $f(e_i) \cdot f(e_j) = e_i \cdot e_j = 0$. Es decir, los vectores $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ forman un sistema ortonormal en $\mathbb{R}^n$ y por tanto la matriz de orden n

$$A = \left[f(e_1), \ldots, f(e_n) \right]$$

es ortogonal. Pero por el apartado 1 (b), $g(x) = Ax$ es una isometría en $\mathbb{R}^n$ que fija el origen. Además, $g(e_i) = Ae_i = f(e_i)$ para todo i. Al ser A matriz ortogonal, es invertible y por tanto lo es g. Entonces, $g^{-1}(f(e_i)) = g^{-1}(g(e_i)) = e_i$. Por el apartado 4 ha de ser $g^{-1} \circ f = id$ y por tanto $f = g$, es decir $f(x) = Ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Nótese que f es claramente lineal e invertible (al serlo A).

6. La primera parte se demostró en el apartado 1 (b). Sea ahora $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría. Según el apartado 2 f se puede expresar de manera única en la forma $f = t \circ g$ siendo t una traslación y g una isometría que fija el origen. Por el apartado 5, g es de la forma $g(x) = Ax$ con A ortogonal y t es de la forma $t(x) = x + b$ con $b \in \mathbb{R}^n$ fijo por tanto $f(x) = t(g(x)) = f(Ax) = Ax + b$.

7. Si $f_1, f_2 \in \mathcal{I}_n$ entonces $f_1(x) = A_1x + b_1$ y $f_2(x) = A_2x + b_2$ con A_1, A_2 ortogonales y $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\begin{aligned}(f_1 \circ f_2)(x) &= f_1(f_2(x)) = f_1\left(A_2x + b_2\right)\\ &= A_1\left(A_2x + b_2\right) + b_1 = A_1A_2x + \left(A_1b_2 + b_1\right).\end{aligned}$$

La matriz A_1A_2 es ortogonal por ser producto de ortogonales y además $A_1b_2 + b_1 \in \mathbb{R}^n$ luego $f_1 \circ f_2 \in \mathcal{I}_n$. La composición de aplicaciones es asociativa, por tanto lo es en $\mathcal{I}_n$. La aplicación identidad $id(x) = x$ es de la forma $id(x) = Ix + 0$ siendo I ortogonal, luego $id \in \mathcal{I}_n$ es elemento neutro de $\mathcal{I}_n$. Por último, sea $f(x) = Ax + b$ una isometría de $\mathbb{R}^n$. Como A es ortogonal, también lo es A^{-1} y por tanto $g(x) := A^{-1}x - A^{-1}b$ es isometría en $\mathbb{R}^n$. Además,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f\left(A^{-1}x - A^{-1}b\right)\\ &= A\left(A^{-1}x - A^{-1}b\right) + b = x - b + b = x.\end{aligned}$$

con lo cual, $f \circ g = id$. De manera análoga $g \circ f = id$ con lo cual $g = f^{-1}$ es elemento inverso de f en $\mathcal{I}_n$.

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`