MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

CURVAS RECTIFICABLES Y LONGITUD DE ARCO

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Definimos los conceptos de arco de curva rectificable y longitud de arco. Demostramos una fórmula para calcular la longitud de los arcos de curvas de clase C^1.

Índice

1. Curvas rectificables

1.1. Definición. Sea C un arco de curva en $\mathbb{R}^n$ dada por la función

$$\mathbf{x} : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(t),$$

y no se imponen condiciones a $\mathbf{x}$. Consideremos el conjunto

$$\mathscr{P} = \{P : P \text{ es partición de } [a, b]\}.$$

Para cada partición $P : a = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_m = b$ de $[a, b]$ consideramos la poligonal de $E : \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1), \ldots, \mathbf{x}(t_{m-1}), \mathbf{x}(t_m)$ y su correspondiente longitud

$$s(P) = |\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_0)| + |\mathbf{x}(t_2) - \mathbf{x}(t_1)| + \ldots + |\mathbf{x}(t_m) - \mathbf{x}(t_{m-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})| \,.$$

Se dice que C es *rectificable* si el conjunto $\{s(P) : P \in \mathscr{P}\}$ está acotado.

1.2. Definición. Si C es un arco de curva rectificable, definimos su longitud $L(C)$ como

$$L(C) = \sup\{s(P) : P \in \mathscr{P}\}.$$

Key words and phrases. Curvas rectificables, longitud, arco.

1.3. Ejemplo. El arco de parábola C dado por $\mathbf{x}(t) = (t, t^2)$ con $t \in [0, 1]$ es rectificable. En efecto sea la partición P de $[0, 1]$ dada por $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$. Tenemos

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left|(t_i, t_i^2) - (t_{i-1}, t_{i-1}^2)\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|(t_i - t_{i-1}, t_i^2 - t_{i-1}^2)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(|t_i - t_{i-1}| + \left|t_i^2 - t_{i-1}^2\right|\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(|t_i - t_{i-1}| + |t_i - t_{i-1}| \, |t_i + t_{i-1}|\right) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})(1 + t_{i-1} + t_i).$$

Ahora bien, se verifica $0 \leq t_{i-1} < t_i \leq 1$ y por tanto $1 + t_{i-1} + t_i \leq 3$. Por otra parte, $\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = 1$ con lo cual $s(P) \leq 3\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = 3$ es decir, el arco C es rectificable.

1.4. Ejemplo. La curva del plano

$$\Gamma : \begin{cases} x = t \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ y = \begin{cases} t\cos\dfrac{1}{t} \quad \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ 0 \quad \text{si} \quad t = 0. \end{cases} \end{cases}$$

no es rectificable. Para demostrarlo, consideramos particiones de $[0, 1]$ de la forma

$$P : \; 0, \; \frac{1}{(n-1)\pi}, \; \frac{1}{(n-2)\pi}, \; \ldots, \; \frac{1}{2\pi}, \; \frac{1}{\pi}, \; 1.$$

Los puntos de la poligonal que corresponden a la partición P son

$$M_0 = (0, 0), \; M_1 = \left(\frac{1}{(n-1)\pi}, \frac{1}{(n-1)\pi}\cos(n-1)\pi\right),$$

$$M_2 = \left(\frac{1}{(n-2)\pi}, \frac{1}{(n-2)\pi}\cos(n-2)\pi\right),$$

$$\ldots$$

$$M_{n-2} = \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}\cos 2\pi\right), M_{n-1} = \left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\cos\pi\right), \; M_n = (1, \cos 1).$$

La suma de las distancias de los segmentos de la poligonal es

$$s(P) = |M_0M_1| + |M_1M_2| + \cdots + |M_{n-2}M_{n-1}| + |M_{n-1}M_n|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{(n-1)\pi}, \frac{1}{(n-1)\pi}\cos(n-1)\pi\right)\right|$$

$$+ \left|\left(\frac{1}{(n-2)\pi} - \frac{1}{(n-1)\pi}, \frac{1}{(n-2)\pi}\cos(n-2)\pi - \frac{1}{(n-1)\pi}\cos(n-1)\pi\right)\right|$$

$$+ \cdots + \left|\left(1 - \frac{1}{\pi}, \cos 1 - \frac{1}{\pi}\cos\pi\right)\right|.$$

Eliminando el primer y último término de la suma anterior,

$$\begin{aligned}
s(P) &\geq \sum_{k=1}^{n-2} \left| \left(\frac{1}{k\pi} - \frac{1}{(k+1)\pi}, \frac{1}{k\pi}\cos k\pi - \frac{1}{(k+1)\pi}\cos(k+1)\pi \right) \right| \\
&\geq \sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{1}{k\pi}\cos k\pi - \frac{1}{(k+1)\pi}\cos(k+1)\pi \right| \\
&\geq \sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{(-1)^k}{k\pi} - \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\pi} \right| = \sum_{k=1}^{n-2} \left| \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{(k+1)\pi} \right| \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to+\infty} s(P) \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k+1} = +\infty,$$

lo cual implica que Γ no es rectificable.

2. Curvas de clase C^1

2.1. Teorema. Todo arco de curva de clase C^1 es rectificable.

Demostración. Sea $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un arco de curva de clase C^1. Entonces, las funciones $x_1', \ldots, x_n'$ son continuas en $[a,b]$ y por tanto están acotadas es decir, existen constantes positivas $M_1, \ldots, M_n$ tales que

$$\left|x_n'(t)\right| \leq M_1, \ldots, \left|x_n'(t)\right| \leq M_n \quad \forall t \in [a,b].$$

Sea P una partición de $[a,b]$ determinada por los puntos $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ tenemos

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})| &= \sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + \ldots + (x_n(t_i) - x_n(t_{i-1}))^2} \\
&\leq |x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})| + \ldots + |x_n(t_i) - x_n(t_{i-1})|.
\end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio de Lagrange, existen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ en el intervalo (t_{i-1}, t_i) tales que

$$\begin{aligned}
&|x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})| = \left|x_1'(\xi_1)\right|(t_i - t_{i-1}) \\
&\ldots \\
&|x_n(t_i) - x_n(t_{i-1})| = \left|x_n'(\xi_n)\right|(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})| \leq |x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})| + \ldots + |x_n(t_i) - x_n(t_{i-1})| \\
&\leq \left(\left|x_1'(\xi_1)\right| + \ldots + \left|x_n'(\xi_n)\right|\right)(t_i - t_{i-1}) \leq (M_1 + \ldots + M_n)(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

Si $s(P)$ es la longitud de la poligonal determinada por P tenemos

$$\begin{aligned}
s(P) &= \sum_{i=1}^{m} |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})| \leq (M_1 + \ldots + M_n)\sum_{i=1}^{m}(t_i - t_{i-1}) \\
&= (M_1 + \ldots + M_n)(b - a).
\end{aligned}$$

Es decir, el conjunto $\{s(P) : P \in \mathscr{P}\}$ está acotado y por tanto el arco de curva es rectificable. $\square$

2.2. Teorema. Sea $\mathbf{x} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un arco de curva de clase C^1 (y por tanto rectificable). Entonces, su longitud es

$$s = \int_a^b \left|\mathbf{x}'(t)\right| dt.$$

Demostración. Si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ entonces

$$\left|\mathbf{x}'(t)\right| = \sqrt{(x_1'(t))^2 + \ldots + (x_n'(t))^2}$$

y al ser las funciones x_i' continuas en $[a,b]$ también es continua $\mathbf{x}'$ en $[a,b]$ y por tanto existe $\int_a^b |\mathbf{x}'(t)|\, dt$. Por definición de longitud de arco, $s = \sup\{s(P) : P \in \mathscr{P}\}$ y tenemos que demostrar que para todo $\epsilon > 0$ se verifica la desigualdad

$$\left| s - \int_a^b \left|\mathbf{x}'(t)\right| dt \right| < \epsilon.$$

Al ser las funciones $x_1', \ldots, x_n'$ continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$, son uniformemente continuas y por tanto existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\left|x_k'(t) - |x_k'(t')\right| < \frac{\epsilon}{3n(b-a)} \quad \text{si} \quad t, t' \in [a,b] \text{ con } \left|t - t'\right| < \delta_1 \quad (1)$$

y para todo $k = 1, \ldots, n$. Por definición de integral, existe $\delta_2 > 0$ tal que para toda partición $P : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ que cumple $|t_i - t_{i-1}| < \delta_2$ se verifica

$$\left| \int_a^b \left|\mathbf{x}'(t)\right| dt - \sum_{i=1}^m \left|\mathbf{x}'(\theta_i)(t_i - t_{i-1})\right| \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (2)$$

si $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Intercalando convenientemente valores en la partición anterior, podemos suponer que P verifica $|t_i - t_{i-1}| < \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ y podemos aplicar a P las desigualdades (1) y (2). Tenemos

$$\left| s - \int_a^b \left|\mathbf{x}'(t)\right| dt \right| \le |s - s(P)| + \left| s(P) - \int_a^b \left|\mathbf{x}'(t)\right| dt \right|$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \left| s(P) - \int_a^b \left|\mathbf{x}'(t)\right| dt \right|. \quad (3)$$

Aplicando el teorema del valor medio de Lagrange a las funciones $x_1, \ldots, x_n$ a cada uno de los intervalos $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\ldots$, $[t_{m-1}, t_m]$ existen valores $\theta_{k,i} \in [t_{i-1}, t_i]$ con $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$ tales que

$$x_k(t_i) - x_k(t_{i-1}) = x_k'(\theta_{k,i})(t_i - t_{i-1}).$$

Entonces,

$$s(P) = \sum_{i=1}^m |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^m |(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}), \ldots, x_n(t_i) - x_n(t_{i-1}))|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left| \left(x_1'(\theta_{1,i}), \ldots, x_1'(\theta_{n,i}) \right) \right| (t_i - t_{i-1}).$$

Sumando y restando $\sum_{i=1}^{m} |\mathbf{x}'(t)| (t_i - t_{i-1})$,

$$\left| s(P) - \int_a^b \left|\mathbf{x}'(t)\right| dt \right| \leq \left| \left(\sum_{i=1}^{m} \left| \left(x_1'(\theta_{1,i}), \ldots, x_1'(\theta_{n,i}) \right) \right| - \left|\mathbf{x}'(t)\right| \right) (t_i - t_{i-1}) \right|$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^{m} \left|\mathbf{x}'(t)\right| (t_i - t_{i-1}) - \int_a^b \left|\mathbf{x}'(t)\right| dt \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \left|\left| \left(x_1'(\theta_{1,i}), \ldots, x_1'(\theta_{n,i}) \right) \right| - \left|\mathbf{x}'(t)\right|\right|$$

$$+ \left| \sum_{i=1}^{m} \left|\mathbf{x}'(t)\right| (t_i - t_{i-1}) - \int_a^b \left|\mathbf{x}'(t)\right| dt \right|. \quad (4)$$

Por la desigualdad (2) tenemos

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \left|\mathbf{x}'(t_i)(t_i - t_{i-1})\right| - \int_a^b \left|\mathbf{x}'(t)\right| dt \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por otra parte, si $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ se verifica

$$||u| - |v|| \leq |u - v| \leq \sum_{k=1}^{n} |u_k - v_k|$$

y por la desigualdad (1) se verifica para $i = 1, \ldots, m$:

$$\left|\left| \left(x_1'(\theta_{1,i}), \ldots, x_1'(\theta_{n,i}) \right) \right| - \left|\mathbf{x}'(t)\right|\right| \leq \left| x_1'(\theta_{1,i}) - x_1'(t_i) \right| + \ldots + \left| x_n'(\theta_{n,i}) - x_n'(t_i) \right|$$

$$< \frac{\epsilon}{3n(b-a)} + \ldots + \frac{\epsilon}{3n(b-a)} = \frac{\epsilon}{3(b-a)}.$$

De las desigualdades (4) deducimos

$$\left| s(P) - \int_a^b \left|\mathbf{x}'(t)\right| dt \right| < \frac{\epsilon}{3(b-a)} \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) + \frac{\epsilon}{3} = \frac{\epsilon(b-a)}{b-a} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}.$$

Aplicando la desigualdad (3),

$$\left| s - \int_a^b \left|\mathbf{x}'(t)\right| dt \right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon$$

que es lo que queríamos demostrar.

$\square$

2.3. Ejemplo. Calculemos la longitud del arco de la hélice circular

$$\mathbf{x}(t) : \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t \qquad t \in [0, 1]. \\ z(t) = bt. \end{cases}$$

Las funciones $x(t)$, $y(x)$, $z(t)$ son de clase 1 (más aún de clase infinito) en $\mathbb{R}$, en consecuencia la hélice circular es rectificable en todo intervalo real $[\alpha, \beta]$. Su longitud es

$$s = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`