

MONOGRAFÍAS MATEMÁTICAS

MATRICES IDEMPOTENTES DE ORDEN 2 SOBRE UN CUERPO

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

RESUMEN. Determinamos todas las matrices idempotentes de orden 2 sobre cualquier cuerpo.

Enunciado

Para cualquier cuerpo \mathbb{K} , determinar todas las matrices idempotentes de $\mathbb{K}^{2 \times 2}$.

Solución

Sabemos que todo endomorfismo idempotente $f : E \rightarrow E$ en un espacio vectorial de dimensión finita E es diagonalizable con valores propios a lo sumo 0 y 1. Por tanto, si $A \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ es idempotente, es diagonalizable con matriz diagonal de alguna de las formas

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si $A \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ es idempotente existe una matriz $P \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ invertible tal que $A = PD_iP^{-1}$ para algún $i = 1, 2, 3, 4$. Recíprocamente, si una matriz es de la forma PD_iP^{-1} satisface

$$(PD_iP^{-1})^2 = PD_iP^{-1}PD_iP^{-1} = PD_i^2P^{-1} = PD_iP^{-1}$$

y por tanto es idempotente. Toda matriz invertible de $\mathbb{K}^{2 \times 2}$ es de la forma

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad ad - bc \neq 0$$

y su inversa es

$$P^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, todas las matrices idempotentes de $\mathbb{K}^{2 \times 2}$ son de alguna de las formas

$$PD_1P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$PD_2P^{-1} = \dots = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} -bc & ab \\ -cd & ad \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{K}, \quad ad - bc \neq 0,$$

$$PD_3P^{-1} = \dots = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad & -ab \\ cd & -bc \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{K}, \quad ad - bc \neq 0,$$

$$PD_4P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

© *Monografías matemáticas* por Fernando Revilla Jiménez se distribuye bajo la licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional.

Más material en <http://www.fernandorevilla.es>

Fernando Revilla Jiménez. JEFE DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DEL IES SANTA TERESA DE JESÚS DE LA COMUNIDAD DE MADRID Y PROFESOR DE MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA UNIVERSIDAD ALFONSO X EL SABIO DE VILLANUEVA DE LA CAÑADA, MADRID (HASTA EL CURSO ACADÉMICO 2008-2009).

E-mail address: frej0002@ficus.pntic.mec.es