NORMAS DE MATRICES Y PERTURBACIÓN DE SISTEMAS

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Estudiamos las normas de matrices, las inducidas, las matriciales, la norma de Frobenius y damos un par de aplicaciones a las perturbaciones de sistemas lineales.

Índice

Convenios y Notaciones 1
1. Normas en $\mathbb{K}^{m\times n}$ 2
2. Normas inducidas 2
3. Normas inducidas 1, 2, ∞ 4
4. Normas matriciales 7
5. Norma de Frobenius 11
6. Aplicación a la perturbaciones de sistemas lineales 13
6.1. Perturbación de b en el sistema $Ax = b$ 13
6.2. Perturbación de A en el sistema $Ax = b$ 15
Referencia 16

Convenios y Notaciones

− $\mathbb{K}$: Cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
− $\mathbb{K}^{m\times n}$: Conjunto de las matrices $m \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$.
− $\| \|_p$: La norma vectorial en $\mathbb{K}^n$, $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$ ($p \geq 1$ real).
− $\| \|_\infty$: La norma vectorial en $\mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_k| : k = 1,\dots,n\}$.
− I_n : Matriz identidad de orden n (o simplemente I cuando el orden se sobreentienda).
− A^h : Traspuesta de la conjugada de A.
− $\rho(A)$: Radio espectral de la matriz A.
− tr (A) : Traza de la matriz A.
− Las componentes de los vectores de $\mathbb{K}^n$ se designarán por la misma letra que el vector, es decir $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$ etc.
− Las entradas de las matrices se designarán por la misma letra que la matriz, es decir $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ etc.

Key words and phrases. Norma de matrices, inducida, matricial, Frobenius, perturbación de sistemas, número de concición.

1. Normas en $\mathbb{K}^{m\times n}$

Dado que el conjunto $\mathbb{K}^{m\times n}$ de las matrices de órdenes $m \times n$ es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, una norma en $\mathbb{K}^{m\times n}$ es un caso particular del concepto de norma en cualquier espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, esto es:

Definición 1. Una norma en $\mathbb{K}^{m\times n}$ es una aplicación $\| \; \| : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $A \mapsto \|A\|$ que satisface los axiomas:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{N1}) \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0.\\
&(\mathbf{N2}) \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \ \forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}.\\
&(\mathbf{N3}) \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}.
\end{aligned}$$

EJERCICIO 1. En el espacio vectorial $\mathbb{K}^{m\times n}$ se define para toda A :

$$\|A\| = \max \{|a_{ij}|\} \ (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n).$$

Demostrar que $\| \; \|$ es una norma en $\mathbb{K}^{m\times n}$.

Solución. Claramente, $\|A\| \geq 0$ para toda $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Además,
a) Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ Entonces,

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow \max \{|a_{ij}|\} = 0 \Leftrightarrow |a_{ij}| = 0 \ \forall i, j \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \ \forall i, j \Leftrightarrow A = 0.$$

b) Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y para todo $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$,

$$\|\alpha A\| = \max \{|\alpha a_{ij}|\} = \max \{|\alpha| \, |a_{ij}|\} = |\alpha| \max \{|a_{ij}|\} = |\alpha| \, \|A\| .$$

c) Para todo $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$$\|A + B\| = \max \{|a_{ij} + b_{ij}|\} \leq \max \{|a_{ij}|\} + \max \{|b_{ij}|\} \leq \|A\| + \|B\| .$$

EJERCICIO 2. Demostrar que si $\| \; \|$ es norma en $\mathbb{K}^{m\times n}$, también lo es $\|A\|_* = C\|A\|$ con $C > 0$ constante. Es decir, un múltiplo positivo de una norma también es norma.

Solución. Claramente $\|A\|_* \geq 0$ para toda $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Por otra parte,

$$\|A\|_* = 0 \Leftrightarrow C\|A\| = 0 \Leftrightarrow \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0,$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad \|\alpha A\|_* = C\|\alpha A\| = C|\alpha|\|A\| = |\alpha|\|A\|_*,$$

$$\begin{aligned}
\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad \|A + B\|_* &= C\|A + B\| \leq C(\|A\| + \|B\|)\\
&= C\|A\| + C\|B\| = \|A\|_* + \|B\|_*.
\end{aligned}$$

2. Normas inducidas

El primer tipo de normas en $\mathbb{K}^{m\times n}$ que vamos a estudiar son aquellas construidas a partir de unas normas vectoriales dadas $\| \; \|_*$ y $\| \; \|_{**}$ en $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$ respectivamente. Por simplificar la notación y aunque en general serán distintas, las designaremos ambas por $\| \; \|$, pues no habrá lugar a confusión.

Definición 2. Supongamos definidas sendas normas en $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$. Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, se define

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Nótese que la norma del numerador es la norma dada en $\mathbb{K}^m$ y la del denominador en $\mathbb{K}^n$.

***Observación* 1.** El número $\|A\|$ proporciona la máxima dilatación de las imágenes de los vectores de $\mathbb{K}^n$ por medio de la matriz A.

***Observación* 2.** Se verifica

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \left\| A\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\|.$$

Teorema 1. El cociente $\|Ax\| / \|x\|$ con $x \neq 0$ alcanza su supremo en el conjunto $S = \{u \in \mathbb{K}^n : \|u\| = 1\}$, es decir, existe $v \in \mathbb{K}^n$ tal que $\|v\| = 1$ y $\|Av\| = \|A\|$.

Demostración. El conjunto S es cerrado y acotado en $\mathbb{K}^n$ luego es compacto. Las funciones $u \mapsto Au$ e $y \mapsto \|y\|$ son continuas, por tanto lo es la composición $u \mapsto \|Au\|$. Es decir, el máximo de $\|Ax\| / \|x\|$ con $x \neq 0$ se obtiene en S. □

***Observación* 3.** Podemos por tanto escribir

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Teorema 2. La aplicación $\| \; \| : \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $A \mapsto \|A\|$ es norma en el espacio vectorial $\mathbb{K}^{m\times n}$.

Demostración. 1. Es claro que $\|A\| \geq 0$ para todo $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Por otra parte:

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Leftrightarrow \|Ax\| = 0 \; \forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$$
$$\Leftrightarrow Ax = 0 \; \forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \Leftrightarrow A = 0.$$

2. Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y para toda $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$,

$$\|\alpha A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|\alpha Ax\|}{\|x\|} = |\alpha| \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\alpha| \, \|A\|.$$

3. Para cada par de matrices $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$\|A + B\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax + Bx\|}{\|x\|} \leq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|}$$
$$\leq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \max_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|.$$

□

Definición 3. A la norma anterior, se la llama *norma inducida* (por las normas dadas en $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$).

Teorema 3. Sea $\| \ \|$ una norma inducida en $\mathbb{K}^{m\times n}$. Entonces para todo $x \in \mathbb{K}^n$ y para toda $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ se verifica $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$.

Demostración. Si $x = 0$ la desigualdad es trivial. Si $x \neq 0$, al ser $\|A\| = \text{máx}_{x\neq 0} \|Ax\| \,/\, \|x\|$, tenemos $\|Ax\| \,/\, \|x\| \leq \|A\|$, es decir $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$. $\square$

Teorema 4. Sea $\| \ \|$ es una norma inducida y $m = n$. Entonces para todo $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se verifica

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \quad \text{(propiedad sub-multiplicativa).}$$

Demostración. Si $x \in \mathbb{K}^n$, por el teorema anterior, $\|ABx\| \leq \|A\| \, \|Bx\| \leq \|A\| \, \|B\| \, \|x\|$. Por tanto,

$$\|AB\| = \underset{\|u\|=1}{\text{máx}} \|ABu\| \leq \underset{\|u\|=1}{\text{máx}} \|A\| \, \|B\| \, \|u\| = \|A\| \, \|B\| \, .$$

$\square$

Definición 4. Si $m = n$ y las normas en $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$ coinciden, a la norma inducida se la llama *norma equi-inducida*.

Teorema 5. Si $\| \ \|$ es una norma equi-inducida, entonces $\|I\| = 1$.

Demostración. En efecto, $\|I\| = \text{máx}_{x\neq 0} \|Ix\| \,/\, \|x\| = \text{máx}_{x\neq 0} \|x\| \,/\, \|x\| = \text{máx}_{x\neq 0} 1 = 1$. $\square$

***Observación* 4.** La propiedad anterior no es válida si la norma no es equi-inducida. Por ejemplo, basta considerar $m = n = 2$, la norma $\| \ \|_2$ en $\mathbb{K}^n$ y la norma $\| \ \|_1$ en $\mathbb{K}^m$. Eligiendo $u = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ tenemos $\|u\|_2 = 1$ y $\|u\|_1 = \sqrt{2}$. Entonces,

$$\frac{\|Iu\|_1}{\|u\|_2} = \frac{\|u\|_1}{\|u\|_2} = \sqrt{2} > 1 \Rightarrow \|I\| > 1.$$

3. Normas inducidas 1, 2, ∞

***Observación* 5.** Las normas de $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$ que permiten definir la norma inducida son normas cualesquiera, ahora bien es frecuente el caso en el que las normas en $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$ sean del mismo tipo (por ejercicio, norma p en ambos o norma ∞ en ambos) con lo cual es natural denotar:

$$\|A\|_p = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}, \quad \|A\|_\infty = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

En esta sección vamos a dar teoremas que permiten calcular las normas 1, 2, ∞.

Teorema 6 (Cálculo de la norma ∞)**.** Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ entonces,

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

En otras palabras, $\|A\|_\infty$ es el máximo de las sumas de los módulos de las filas de A, o de otra manera

$$A = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} \Rightarrow \|A\|_\infty = \max\left\{\|F_1\|_1, \ldots, \|F_m\|_1\right\}.$$

(Máximo de las normas 1 de las filas).

Demostración. Para todo $x \in \mathbb{K}^n$ tenemos

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le m} |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| \le \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \le$$

$$\left(\max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) \max_{1\le j\le n} |x_j| = \left(\max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) \|x\|_\infty .$$

Entonces, se verifica

$$\max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \le \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| := K,$$

lo cual implica que una cota superior de $\max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$ es K. Bastará demostrar que dicho valor de K se alcanza para algún x con $\|x\|_\infty = 1$. Sea k un subíndice para el cual la expresión de K alcanza su máximo, es decir $K = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$. Definamos el vector u como

$$u = \begin{bmatrix} \operatorname{sgn} a_{k1} \\ \vdots \\ \operatorname{sgn} a_{kn} \end{bmatrix} \quad \text{con } \operatorname{sgn} z = \begin{cases} \dfrac{z}{|z|} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0. \end{cases}$$

Entonces, $\|u\|_\infty = 1$ y $\|Au\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = K$. □

Teorema 7 (Cálculo de la norma 1)**.** Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ entonces,

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

En otras palabras, $\|A\|_\infty$ es el máximo de las sumas de los módulos de las columnas de A, o de otra manera

$$A = \left[\, C_1 \mid \ \ldots \ \mid C_n \,\right] \Rightarrow \|A\|_1 = \max\left\{\|C_1\|_1, \ldots, \|C_n\|_1\right\}.$$

(Máximo de las normas 1 de las columnas).

Demostración. Sea $x \in \mathbb{K}^n$ con $\|x\|_1 = 1$. Entonces,

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right)$$

$$\leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right\} \cdot \|x\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right\} := K$$

$$\Rightarrow \|A\|_1 = \max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 \leq K.$$

Por tanto, una cota superior de $\|A\|_1$ es K. Por otra parte, existe k con $1 \leq k \leq n$ tal que $K = \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}|$. Si $e_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (con 1 en la $k-$ésima posición), entonces, $\|e_k\|_1 = 1$ y

$$\|Ae_k\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| = K,$$

es decir la cota superior K se alcanza y así $\|A\|_1 = K$. $\square$

EJERCICIO 3. Hallar las normas 1 e ∞ de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1+3i & -2 & -1+i & 1 \\ -1 & 3 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \end{bmatrix}$$

Solución. Tenemos $\|C_1\|_1 = 1 + \sqrt{10}$, $\|C_2\|_1 = 6$, $\|C_3\|_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\|C_4\|_1 = 2$ por tanto,

$$\|A\|_1 = \max \{ \|C_1\|_1, \|C_2\|_1, \|C_3\|_1, \|C_4\|_1 \} = 6.$$

Por otra parte, $\|F_1\|_1 = 3 + \sqrt{2} + \sqrt{10}$, $\|F_2\|_1 = 5$, $\|F_3\|_1 = 2$ tanto,

$$\|A\|_\infty = \max \{ \|F_1\|_1, \|F_2\|_1, \|F_3\|_1 \} = 3 + \sqrt{2} + \sqrt{10}.$$

Teorema 8 (Cálculo de la norma 2)**.** Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Entonces,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^h A)}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{K}^n$ tal que $\|x\|_2 = 1$. Entonces,

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax \rangle = (Ax)^h (Ax) = x^h A^h Ax.$$

La matriz $A^h A$ es de orden $n \times n$ y hermítica con lo cual, por el teorema espectral, existe $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ unitaria tal que

$$A^h A = U^h D U \text{ con } D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0)$$

con $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Por tanto,

$$\|Ax\|_2^2 = x^h (A^h A) x = x^h U^h D U x = (Ux)^h D (Ux).$$

Dado que U es unitaria, en invertible y conserva la norma, luego $\|Ux\|_2 = \|y\|_2$ si $y = Ux$. Entonces,

$$\|Ax\|_2^2 = y^h D y = \lambda_1 |y_1|^2 + \ldots + \lambda_r |y_r|^2$$

Podemos suponer sin falta de generalidad que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0$, en consecuencia

$$\|Ax\|_2^2 \leq \lambda_1 \left(|y_1|^2 + \ldots + |y_n|^2\right) = \lambda_1,$$

luego $\|A\|_2 \leq \sqrt{\lambda_1}$. Por otra parte, si $\hat{y} = e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, llamemos $\hat{x} = U^{-1}\hat{y}$. Como U^{-1} es unitaria se verifica $\|\hat{x}\|_2 = 1$ y $\|A\hat{x}\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$ luego el valor de la cota superior $\sqrt{\lambda_1}$ se alcanza. Concluimos que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^h A)}$ □

EJERCICIO 4. Calcular $\|A\|_2$ siendo

$$A = \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Solución. Tenemos

$$A^h A = A^T A = \ldots = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 45 & -3 \\ -3 & 45 \end{bmatrix}.$$

Hallemos los valores propios de $18A^T A$, para ello restamos a la segunda fila la primera y luego a la primera columna le sumamos la segunda

$$\begin{vmatrix} 45 - \lambda & -3 \\ -3 & 45 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 45 - \lambda & -3 \\ -48 + \lambda & 48 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 42 - \lambda & -3 \\ 0 & 48 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (42 - \lambda)(48 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 42 \ \vee \lambda = 48.$$

Los valores propios de $A^T A$ son por tanto $\lambda_1 = 42/18 = 7/3$ y $\lambda_2 = 48/18 = 8/3$. En consecuencia, $\|A\|_2 = \sqrt{8/3} = 2\sqrt{2}/\sqrt{3} = (2/3)\sqrt{6}$.

4. Normas matriciales

En el espacio vectorial $\mathbb{K}^{n\times n}$ tenemos definida además la operación producto. Parece natural definir un tipo de norma que regule el comportamiento de tal operación.

Definición 5. Sea una aplicación $\| \ \| : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $A \mapsto \|A\|$. Se dice que tal aplicación es una *norma matricial* si se satisfacen los axiomas:

(**N1**) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

(**N2**) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \, \forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

(**N3**) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

(**N4**) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Por tanto, una norma matricial en $\mathbb{K}^{n\times n}$ es sencillamente una norma que además cumple la propiedad (**N4**) (llamada propiedad *sub-multiplicativa*).

***Observación* 6.** Debido al teorema 4, toda norma inducida es una norma matricial.

EJERCICIO 5. Demostrar que la aplicación $\| \ \| : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ es una norma matricial.

Solución. Claramente $\|A\| \geq 0$ para toda $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = 0 \Leftrightarrow a_{i,j} = 0 \ \ \forall i,j \Leftrightarrow A = 0.$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y para toda $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$,

$$\|\alpha A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha a_{ij}| = |\alpha| \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = |\alpha| \, \|A\| \, .$$

Para cualquier par $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$,

$$\|A + B\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| = \|A\| + \|B\| \, .$$

Por tanto, $\| \ \|$ es norma. Veamos ahora que es norma matricial.

$$\|AB\| = \sum_{i,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{i,j,k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \leq \sum_{i,j,k,s=1}^{n} |a_{ik}||b_{sj}|$$
$$= \left(\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}| \right) \left(\sum_{s,j=1}^{n} |b_{sj}| \right) = \|A\| \, \|B\| \, .$$

Vemos a continuación un ejemplo de una norma no matricial.

EJERCICIO 6. En el ejercicio 1, vimos que $\|A\| = \text{máx}\,\{|a_{ij}|\}$ es una norma en $\mathbb{K}^{m\times n}$ (y por tanto en $\mathbb{K}^{n\times n}$). Demostrar que no es norma matricial.

Solución. Consideremos las matrices $A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\|A\| = \|B\| = 1$ y $\|AB\| = 2$ con lo cual, $\|AB\| \not\leq \|A\| \, \|B\|$. No es norma matricial.

Teorema 9. Si $\| \ \|$ es norma matricial en $\mathbb{K}^{n\times n}$, entonces $\|I\| \geq 1$.

Demostración. En efecto, $1 \leq \|I\| = \|II\| \leq \|I\| \, \|I\|$, luego $\|I\| \geq 1$. □

Teorema 10. Si $\| \ \|$ es norma matricial en $\mathbb{K}^{n\times n}$ y A es invertible, entonces $\left\|A^{-1}\right\| \geq \|A\|^{-1}$.

Demostración. En efecto, $1 \leq \|I\| = \left\|AA^{-1}\right\| \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$, luego $\left\|A^{-1}\right\| \geq \|A\|^{-1}$. □

Teorema 11. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si $\| \ \|$ es una norma matricial en $\mathbb{K}^{n\times n}$ se verifica $\rho(A) \leq \|A\|$.

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de A y $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$ un correspondiente vector propio. Consideremos la matriz $X = [\ x \mid \ \ldots \ \mid x\ ] \in \mathbb{C}^{n\times n} \backslash \{0\}$. Entonces,

$$AX = [\ Ax \mid \ \ldots \ \mid Ax\ ] = [\ \lambda x \mid \ \ldots \ \mid \lambda\, x\ ] = \lambda[\ x \mid \ \ldots \ \mid x\ ] = \lambda X.$$

En consecuencia, $|\lambda| \|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\| \|X\|$. Como $X \neq 0$ también $\|X\| \neq 0$, con lo cual $|\lambda| \leq \|A\|$ para todo valor propio de A de lo cual se concluye que $\rho(A) \leq \|A\|$. □

El teorema anterior no es válido si la norma no es matricial como prueba el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 7. Demostrar que la norma $\|A\| = \text{máx}\{|a_{ij}|\}$ en $\mathbb{K}^{n\times n}$, (que según vimos en el ejercicio 6 no es matricial), no satisface en general que $\rho(A) \leq \|A\|$.

Solución. Consideremos $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces, $\|A\| = 1$. El polinomio característico de A es $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$ y sus valores propios 2 y 0, con lo cual $\rho(A) = 2$. No se verifica $\rho(A) \leq \|A\|$.

En el siguiente ejercicio, construimos una norma matricial a partir de otra dada.

EJERCICIO 8. Sea $\| \ \|$ una norma en $\mathbb{K}^{n\times n}$ y $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz no singular.
(1) Demostrar que $\| \ \|_* : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $\|A\|_* = \left\|P^{-1}AP\right\|$ es norma.
(2) Demostrar que si $\| \ \|$ es norma matricial, también lo es $\| \ \|_*$.

Solución. (1) Claramente, $\|A\|_* = \left\|P^{-1}AP\right\| \geq 0$ para toda $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

$$\|A\|_* = 0 \Leftrightarrow \left\|P^{-1}AP\right\| = 0 \Leftrightarrow P^{-1}AP = 0 \Leftrightarrow A = P0P^{-1} \Leftrightarrow A = 0.$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y para toda $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$,

$$\|\alpha A\|_* = \left\|P^{-1}(\alpha AP)\right\| = \left\|\alpha(P^{-1}AP)\right\| = |\alpha| \left\|P^{-1}AP\right\| = |\alpha| \|A\|_*.$$

Para cualquier par $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$,

$$\|A + B\|_* = \left\|P^{-1}(A + B)P\right\| = \left\|P^{-1}AP + P^{-1}BP\right\|$$
$$\leq \left\|P^{-1}AP\right\| + \left\|P^{-1}BP\right\| = \|A\|_* + \|B\|_*.$$

Por tanto, $\| \ \|_*$ es norma.
(2) Si $\| \ \|$ es norma matricial,

$$\|AB\|_* = \left\|P^{-1}(AB)P\right\| = \left\|(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)\right\|$$
$$\leq \left\|P^{-1}AP\right\| \left\|P^{-1}BP\right\| = \|A\|_* \|B\|_*,$$

luego $\| \ \|_*$ es norma matricial.

Teorema 12. Dados $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\epsilon > 0$, existe una norma matricial $\| \ \|$ en $\mathbb{K}^{n\times n}$ tal que

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \epsilon.$$

Demostración. La matriz A tiene forma canónica de Jordan en $\mathbb{C}$ que será del tipo

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los valores propios de A y $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Sea $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$A = P \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix} P^{-1}$$

y consideremos

$$D(s) = \begin{bmatrix} D_{n_1}(s) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D_{n_2}(s) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & D_{n_k}(s) \end{bmatrix}, \quad \text{con } D_l(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & s^l \end{bmatrix}.$$

Si $J_l(\lambda)$ es un bloque de Jordan de J de orden l, tenemos

$$D_l(1/\epsilon)J_l(\lambda)D_l(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1/\epsilon & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1/\epsilon^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1/\epsilon^{l-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1/\epsilon^l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & \epsilon^{l-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \epsilon^l \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} \lambda & \epsilon & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & \epsilon \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix} := B_l(\lambda, \epsilon)$$

Entonces,

$$D(1/\epsilon)P^{-1}APD(\epsilon) = D(1/\epsilon)JD(\epsilon) = \begin{bmatrix} B_{n_1}(\lambda_1,\epsilon) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & B_{n_2}(\lambda_2,\epsilon) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & B_{n_k}(\lambda_k,\epsilon) \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, podemos expresar $D(1/\epsilon)P^{-1}APD(\epsilon) = (PD(\epsilon))^{-1} A \,(PD(\epsilon))$. Al ser $PD(\epsilon)$ no singular, se deduce del ejercicio 8 que si $\| \ \|$ es una norma matricial en $\mathbb{K}^{n\times n}$ entonces,

$$\|M\|_* = \| \, (PD(\epsilon))^{-1} M \ (PD(\epsilon))\|$$

es también una norma matricial. En particular, eligiendo la norma $\| \|_1$ de $\mathbb{K}^{n\times n}$ (que es inducida y por tanto matricial), tenemos

$$\|A\|_* = \| (PD(\epsilon))^{-1} A\, (PD(\epsilon))\|_1 = \max_{i=1,2,\ldots,n} \{|\lambda_i| + \epsilon\} \leq \rho(A) + \epsilon.$$

Por el teorema 11, $\rho(A) \leq \|A\|_*$ lo cual completa la demostración. □

Corolario 1. Para toda matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se verifica

$$\rho(A) = \text{ínf}\{\|A\| : \| \| \text{ es norma matricial en } \mathbb{K}^{n\times n}\}.$$

Teorema 13 (Fórmula de Gelfand)**.** Si $\| \|$ es norma matricial en $\mathbb{K}^{n\times n}$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se verifica

$$\rho(A) = \lim_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k}.$$

Demostración. Si $k \geq 1$, por el teorema 11 podemos escribir,

$$\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\|, \text{ o bien } \rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}.$$

Para demostrar que $\lim_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$ bastará demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|A^k\|^{1/k} < \rho(A)+\epsilon$ si $k \geq k_0$. Por el teorema 12, existe una norma matricial $\| \|_*$ tal que $\|A\|_* \leq \rho(A) + \epsilon/2$. Como $\mathbb{K}^{n\times n}$ es espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas en dicho espacio son equivalentes. Existe pues una constante $C > 0$ tal que $\|M\| \leq C\|M\|_*$ para todo $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces, para todo $k \geq 1$,

$$\|A^k\| \leq C\|A^k\|_* \leq C\|A\|_*^k \leq C(\rho(A) + \epsilon/2)^k,$$
$$\|A^k\|^{1/k} \leq C^{1/k}(\rho(A) + \epsilon/2) \underbrace{\longrightarrow}_{k\to+\infty} \rho(A) + \epsilon/2,$$

lo cual implica que existe k_0 tal que $\|A_k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \epsilon$ para $k \geq k_0$ como se buscaba. □

5. Norma de Frobenius

En esta sección construimos una norma matricial que no es inducida.

Teorema 14. La siguiente aplicación

$$\langle \, , \, \rangle : \mathbb{K}^{m\times n} \times \mathbb{K}^{m\times n} \to \mathbb{K}, \quad \langle A, B\rangle = \text{tr } (B^h A)$$

es un producto interno en $\mathbb{K}^{m\times n}$.

Demostración. 1) Para toda terna $A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$\langle A + B, C\rangle = \text{tr } [C^h(A + B)] = \text{tr } (C^h A + C^h B)$$
$$= \text{tr } (C^h A) + \text{tr } (C^h B) = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle\,.$$

2) Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y para todo par $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$\langle \alpha A, B\rangle = \text{tr } [B^h(\alpha A)] = \alpha \text{ tr } (B^h A) = \alpha \langle A, B\rangle\,.$$

3) Para todo par $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

$$\overline{\langle B, A\rangle} = \overline{\text{tr } (A^h B)} = \text{tr } [(A^h B)^h] = \text{tr } (B^h A) = \langle A, B\rangle\,.$$

4) Sea $0 \neq A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Entonces,

$$\langle A, A\rangle = \text{tr }(A^hA) = \sum_{k=1}^{n}\left(A^hA\right)_{kk}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(A^h\right)_{kj}(A)_{jk}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|^2 .$$

Dado que $a_{ij} \neq 0$ para algún i, j se concluye que $\langle A, A\rangle > 0$. □

Definición 6. A la norma en $\mathbb{K}^{m\times n}$ determinada por el producto interno anterior de la llama *norma de Frobenius* y de la representa por $\|\ \|_F$. Es decir, $\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A\rangle}$.

Corolario 2 (Cálculo de la norma de Frobenius)**.** Del apartado 4) de la demostración del teorema 14 se concluye que si $A = [a_{ij}]$, entonces

$$\|A\|_F = \|a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}\|_2 .$$

EJERCICIO 9. Calcular $\|A\|_F$ siendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 0 & -1 \\ 3 & -i \end{bmatrix}$$

Solución. Tenemos

$$\|A\|_F = \|(2,\ 1+i,\ 0,\ -1,\ 3,\ -i)\|_2 = \sqrt{4+2+0+1+9+1} = \sqrt{17}.$$

Teorema 15. La norma de Frobenius en $\mathbb{K}^{n\times n}$ es norma matricial.

Demostración. Para cada par de matrices $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|^2 \underbrace{\leq}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\sum_{l=1}^{n}|b_{lj}|^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k,l=1}^{n}|a_{ik}|^2|b_{lj}|^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{lj}|^2 = \|A\|_F^2\|B\|_F^2.$$

Es decir, $\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F$. □

EJERCICIO 10. Una norma $\|\ \|$ en $\mathbb{K}^{m\times n}$ se dice que es *unitariamente invariante* si para toda matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ se verifica

$$\|UAV\| = \|A\| \quad \forall U \in \mathbb{K}^{m\times m}\ \ \forall V \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ unitarias.}$$

Demostrar que la norma de Frobenius es unitariamente invariante.

Solución. Usando que $U^hU = I_m$, $V^hV = I_n$ y que $\text{tr }(MN) = \text{tr }(NM)$,

$$\|UAV\|_F^2 = \text{tr }[(UAV)^h(UAV)] = \text{tr }(V^hA^hU^hUAV)$$

$$= \text{tr }(V^hA^hAV) = \text{tr }(VV^hA^hA) = \text{tr }(A^hA) = \|A\|_F^2.$$

***Observación* 7.** Si $n > 1$, se verifica $\|I_n\|_F = \sqrt{n} \neq 1$ lo cual implica por el teorema 5 que la norma de Frobenius no es equi-inducida. También se puede demostrar (ver [1]), que tampoco es inducida.

6. Aplicación a la perturbaciones de sistemas lineales

En esta sección vemos una aplicación de la norma al estudio de las perturbaciones de sistemas lineales $Ax = b$ cuando se perturba el lado derecho b y cuando se perturba la matriz A. La única norma matricial que se usará a partir de ahora es la norma $\| \ \|_2$ que la denotamos simplemente por $\| \ \|$.

6.1. Perturbación de b en el sistema $Ax = b$.

Teorema 16. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible, $0 \neq b \in \mathbb{K}^n$ y el sistema lineal

$$S_I : \quad Ax = b \quad \text{(sistema inicial)}.$$

Sea $\Delta b \in \mathbb{K}^n$ y consideremos el sistema lineal

$$S_P : \quad Ax = b + \Delta b \quad \text{(sistema perturbado)}.$$

Si denominamos x_0 a la única solución del sistema inicial S_I (que será $\neq 0$), la solución del perturbado será $x_0 + \Delta x_0$. Entonces, se verifica:

$$\frac{\|\Delta x_0\|}{\|x_0\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Demostración. Efectivamente,

$$A(x_0 + \Delta x_0) = b + \Delta b \Leftrightarrow Ax_0 + A(\Delta x_0) = b + \Delta b$$

$$\Leftrightarrow A(\Delta x_0) = \Delta b \Leftrightarrow \Delta x_0 = A^{-1}(\Delta b).$$

Tomando normas en $\Delta x_0 = A^{-1}(\Delta b)$ y dado que $\| \ \|$ es norma inducida, $\|\Delta x_0\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta b\|$. De la misma manera, de $Ax_0 = b$ se deduce $\|b\| \leq \|A\|\|x_0\|$ o bien, $1/\|x_0\| \leq \|A\|/\|b\|$. Concluimos que

$$\frac{\|\Delta x_0\|}{\|x_0\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

□

***Observación* 8.** El valor $\dfrac{\|\Delta x_0\|}{\|x_0\|}$ es el error relativo cometido al tomar $x_0 + \Delta x_0$ como solución del sistema inicial en vez de la auténtica solución que es x_0.

Definición 7. Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es invertible, a $c(A) = \|A\|\|A\|^{-1}$ se le llama *número de condición* de A.
Queda por tanto

$$\frac{\|\Delta x_0\|}{\|x_0\|} \leq c(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Teorema 17 (Propiedades del número de condición)**.** Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible. Se verifica
(i) $c(A) \geq 1$.
(ii) Si A es hermítica (i.e. $A^h = A$), entonces,

$$c(A) = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}$$

siendo $0 < |\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_n|$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de A.

Demostración. (i) Como $\| \ \|$ es norma matricial, $\|A^{-1}\| \geq \|A\|^{-1}$ luego $c(A) = \|A\|\|A\|^{-1} \geq 1$.
(ii) Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de A con $0 < |\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_n|$. Como $A^h = A$, los valores propios de $A^hA = A^2$ son $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ con $0 < \lambda_1^2 \leq \ldots \leq \lambda_n^2$. En consecuencia,

$$\|A\| = \sqrt{\rho(A^hA)} = \sqrt{\lambda_n^2} = |\lambda_n|.$$

Por otra parte sabemos que $(A^h)^{-1} = (A^{-1})^h$ y al ser $A^h = A$ se verifica $A^{-1} = (A^{-1})^h$. Por tanto, los valores propios de $(A^{-1})^h(A^{-1}) = (A^{-1})^2$ son $1/\lambda_1^2, \ldots, 1/\lambda_n^2$ y se verifica $0 < 1/\lambda_n^2 \leq \ldots \leq 1/\lambda_1^2$, luego

$$\|A^{-1}\| = \sqrt{\rho[(A^{-1})^h(A^{-1})]} = \sqrt{\rho[(A^{-1})^2]} = \sqrt{1/\lambda_1^2} = 1/|\lambda_1|.$$

Podemos concluir

$$c(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_1|}.$$

□

***Observación* 9.** Dado que $c(A) \geq 1$, del teorema 16 se deduce que la cota del error será mejor si $c(A)$ está cerca de 1 (matriz bien condicionada) y peor cuando esté lejos de 1 (matriz mal condicionada).

EJERCICIO 11. Se considera el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1{,}0001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Resolverlo por el método de Gauss.
(ii) Resolver por el método de Gauss el sistema perturbado con $\Delta b = (0, 10^{-4})^T$.
(iii) Hallar el número de condición de la matriz A del sistema.
(iv) Comentar los resultados.

Solución. (i) Inmediatamente obtenemos la solución $(2, 0)^T$.
(ii) Inmediatamente obtenemos la solución $(1, 1)^T$.
(iii) El polinomio característico de A es $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2{,}0001\lambda + 0{,}0001$ y hallando sus raíces obtenemos $\lambda_1 \approx 10^{-4}/2$ y $\lambda_2 = 2{,}0005$. Al ser A simétrica (por tanto hermítica) obtenemos

$$c(A) = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \approx \frac{2{,}0005}{10^{-4}/2} = 4{,}001 \cdot 10^4.$$

(iv) El número de condición de la matriz A es excesivamente grande (matriz mal condicionada), lo cual traduce el mal comportamiento del sistema incluso frente a pequeñas perturbaciones. En nuestro caso el paso de la solución $(2,0)^T$ a la esencialmente distinta $(1,1)^T$.

EJERCICIO 12. Se considera el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1 \\ 1{,}9 \end{bmatrix}.$$

(i) Resolverlo por el método de Gauss.
(ii) Resolver por el método de Gauss el sistema perturbado con $\Delta b = (0{,}1, 0{,}1)^T$.
(iii) Hallar el número de condición de la matriz A del sistema.
(iv) Comentar los resultados.

Solución. (i) Inmediatamente obtenemos la solución $(0{,}9, -1)^T$.
(ii) Inmediatamente obtenemos la solución $(1, -1)^T$.
(iii) El polinomio característico de A es $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2$ cuyas raíces son $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ y $\lambda_2 = \sqrt{2}$. Al ser A simétrica obtenemos

$$c(A) = \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} = 1.$$

(iv) A diferencia del ejercicio anterior, el número de condición de la matriz A es el mejor posible: 1 (matriz bien condicionada), lo cual traduce un comportamiento no esencialmente distinto del paso de la solución $(0{,}9, -1)^T$ a la $(1, -1)^T$.

6.2. Perturbación de A en el sistema $Ax = b$.

Teorema 18. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertible, $0 \neq b \in \mathbb{K}^n$ y el sistema lineal

$$S_I : \quad Ax = b \quad \text{(sistema inicial)}.$$

Sea $\Delta A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con $A + \Delta A$ invertible y consideremos el sistema lineal

$$S_P : \quad (A + \Delta A)x = b \quad \text{(sistema perturbado)}.$$

Si denominamos x_0 a la única solución del sistema inicial S_I (que será $\neq 0$), la solución del perturbado será $x_0 + \Delta x_0$. Entonces, se verifica:

$$\frac{\|\Delta x_0\|}{\|x_0 + \Delta x_0\|} \leq c(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Demostración. Tenemos,

$$(A + \Delta A)(x_0 + \Delta x_0) = b \Leftrightarrow Ax_0 + (\Delta A)x_0 + A(\Delta x_0) + (\Delta A)\Delta x_0 = b$$

$$\Leftrightarrow (\Delta A)x_0 + A(\Delta x_0) + (\Delta A)\Delta x_0 = 0 \Leftrightarrow A(\Delta x_0) = -(\Delta A)x_0 - (\Delta A)\Delta x_0$$

$$\Leftrightarrow \Delta x_0 = -A^{-1}(\Delta A)(x_0 + \Delta x_0).$$

Tomando normas en la última expresión, $\|\Delta x_0\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|x_0 + \Delta x_0\|$ de lo cual se deduce

$$\frac{\|\Delta x_0\|}{\|x_0 + \Delta x_0\|} \leq \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

lo cual demuestra el teorema. $\square$

Referencia

[1] Vijaya Sekhar Chellaboina and Wassim M. Haddad *Is the Frobenius norm induced?*, IEEE Transactions on Automatic Control, volume 40, pages 2137-2139, 1995.

Más material en http://www.fernandorevilla.es .

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

Email address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`