ARITMÉTICA CARDINAL

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Definimos el concepto de cardinal de un conjunto, establecemos una relación de orden entre cardinales y definimos entre ellos las operaciones suma, producto y potenciación.

Índice

1. Cardinalidad

En ésta sección generalizamos el concepto de cardinal de un conjunto finito a cualquier conjunto.

1.1. Conjuntos equivalentes.

Definición 1.1. Sean A y B dos conjuntos. Se dice que A es equivalente a B y se escribe $A \sim B$ si existe una aplicación biyectiva $f : A \to B$.

***Ejemplo* 1.1.** Los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$ son equivalentes. Efectivamente, la aplicación $f : A \to B$, $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$ es biyectiva.

***Ejemplo* 1.2.** Los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$ no son equivalentes pues no existe aplicación biyectiva entre A y B.

Key words and phrases. Cardinales, Orden total, Suma, Producto, Potenciación.

***Ejemplo* 1.3.** Si $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$ la aplicación $f : \mathbb{N} \to P$ dada por $f(n) = 2n$ es biyectiva y por tanto $\mathbb{N} \sim P$.

***Ejemplo* 1.4.** Veamos que el intervalo abierto $(-1, 1)$ de $\mathbb{R}$ es equivalente al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Para ello consideremos la aplicación

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 - |x|}.$$

La función está bien definida pues si $x \in (-1, 1)$, entonces $|x| \leq 1$ y el denominador $1 - |x|$ no se anula. Veamos que es inyectiva.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1 - |x_1|} = \frac{x_2}{1 - |x_2|}. \quad (1)$$

Tomando módulos queda

$$\frac{|x_1|}{1 - |x_1|} = \frac{|x_2|}{1 - |x_2|}$$

o bien, $|x_1| - |x_1||x_2| = |x_2| - |x_1||x_2|$ lo cual implica $|x_1| = |x_2|$, y consecuentemente $1 - |x_1| = 1 - |x_2|$. Sustituyendo en (1), queda $x_1 = x_2$.Veamos que f es sobreyectiva. Podemos expresar $f(x)$ en la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 - x} \text{ si } & x \in [0, 1) \\ \dfrac{x}{1 + x} \text{si} & x \in (-1, 0). \end{cases}$$

Si $y \geq 0$, entonces igualando $y = \frac{x}{1-x}$ obtenemos $x = \frac{y}{1+y} \in [0, 1)$. Si $y < 0$, entonces igualando $y = \frac{x}{1+x}$ obtenemos $x = \frac{y}{1-y} \in (-1, 0)$. Es decir, para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in (-1, 1)$ tal que $y = f(x)$ y por tanto, f es sobreyectiva.

***Ejemplo* 1.5.** Veamos que $\mathbb{N}$ es equivalente a $\mathbb{Z}$. Para ello demostremos que la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si} \quad n \text{ par} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si} \quad n \text{ impar} \end{cases}$$

es biyectiva. En efecto, sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $f(m) = f(n)$. Si m y n son pares entonces, $m/2 = n/2$ y por tanto $m = n$. Si m y n son impares entonces, $-(m + 1)/2 = -(n + 1)/2$ y por tanto $m = n$. Es imposible que m sea par y n impar pues entonces $m/2 = -(n + 1)/2$ con lo cual $m + n = -1$ con m y n naturales, lo cual es absurdo. Mismo argumento para m es impar y n par. Es decir, f es inyectiva.

Veamos que también es sobreyectiva. Sea $z \in \mathbb{Z}$. Si $z > 0$ entonces $2z > 0$ por tanto $2z \in \mathbb{N}$ y $2z$ es par, con lo cual $f(2z) = 2z/2 = z$. Si $z = 0$ entonces $f(0) = 0/2 = 0$. Si $z < 0$ entonces $-2z - 1 > 0$ luego $-2z - 1 \in \mathbb{N}$ y $-2z - 1$ es impar, con lo cual $f(-2z - 1) = -((-2z - 1) + 1)/2 = z$.

Definición 1.2. Un conjunto A se dice que es finito si es vacío o equivalente a $\{1, 2, \ldots, n\}$ para algún n natural, en otro caso se dice que es infinito.

Claramente dos conjuntos finitos son equivalentes si y sólo si contienen el mismo número de elementos.

Teorema 1.1. En cualquier clase $\mathcal{C}$ de conjuntos, la relación $A \sim B$ es de equivalencia.

Demostración. Para todo $A \in \mathcal{C}$ la aplicación identidad $I_A : A \to A$ es biyectiva, y por tanto $A \sim A$. Si $A \sim B$ existe $f : A \to B$ biyectiva. Pero $f^{-1} : B \to A$ es biyectiva con lo cual $B \sim A$. Si $A \sim B$ y $B \sim C$ existen aplicaciones biyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Pero $g \circ f : A \to C$ es biyectiva con lo cual $A \sim C$. $\square$

1.2. Conjuntos numerables y contables.

Definición 1.3. Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los números naturales. Un conjunto X se dice que es *numerable* o que tiene *cardinalidad* $\aleph_0$ (se lee “alef sub cero”), si X es equivalente a $\mathbb{N}$. Un conjunto X se dice que es *contable* si es finito o numerable

***Ejemplo* 1.6.** Toda sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ formada por distintos términos dos a dos es numerable pues la aplicación $f : \mathbb{N} \to \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ dada por $f(n) = a_n$ es biyectiva.

***Ejemplo* 1.7.** El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. En efecto, sea $n \geq 1$ un número natural. Por el teorema fundamental de la aritmética existen únicos números naturales $k \geq 1$, $m \geq 1$ tales que $n = 2^{k-1}(2m-1)$. Definamos la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $f(n) = (m, k)$. Entonces, f es sobreyectiva pues $f(2^{k-1}(2m-1)) = (k, m)$ y f es inyectiva porque si $(m_1, k_1) = (m_2, k_2)$ entonces $2^{k_1-1}(2m_1-1) = 2^{k_2-1}(2m_2-1)$.

Teorema 1.2. Cada conjunto infinito contiene un conjunto numerable.

Demostración. Sea X un conjunto infinito y sea $f : \mathcal{P}(X) \to X$ una función de elección, es decir para cada $\emptyset \neq A \subset X$ se verifica $f(A) \in A$. Construimos la sucesión:

$$a_1 = f(X),\ a_2 = f\left(X - \{a_1\}\right),\ a_3 = f\left(X - \{a_1, a_2\}\right),$$
$$\ldots,\ a_n = f\left(X - \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}\right),\ \ldots$$

Como X es infinito, $X - \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ es no vacío para todo n y claramente $a_n \neq a_i$ para todo $i < n$, es decir, los a_n son distintos por tanto, $\{a_1, a_2, \ldots\}$ es un subconjunto numerable de X. $\square$

Teorema 1.3. Cualquier subconjunto de un conjunto contable es contable.

Demostración. Si X es contable entonces X es numerable o contable. Sea $X = \{a_1, a_2, \ldots\}$ numerable y $A \subset X$. Si $A = \emptyset$ entonces A es finito. Si $A \neq \emptyset$, sea n_1 el menor entero positivo tal que $a_{n_1} \in A$. Sea n_2 el menor entero positivo tal que $n_2 > n_1$ y $a_{n_2} \in A$, etc. Entonces, $A = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\}$. Si el conjunto $\{n_1, n_2, \ldots\}$ es acotado, A es finito y si no lo es, A es numerable. Si X es finito cualquiera de sus subconjuntos es finito y por tanto contable. $\square$

Teorema 1.4. Un conjunto es infinito si y sólo si es equivalente a un subconjunto propio.

Demostración. Si X es finito con n elementos, cualquier subconjunto propio Y tiene m elementos con $m < n$ con lo cual no existe biyección entre X e Y. Si X es infinito, por el teorema 1.2 contiene a un conjunto numerable $Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$. La aplicación $f : Y \to Y - \{y_1\}$ dada por $f(y_i) = y_{i+1}$ es biyectiva. La extensión $\bar{f} : X \to X - \{y_1\}$ de f dada por $\bar{f}(x) = x$ si $x \notin Y$ y $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in Y$ también es biyectiva, con lo cual X es equivalente a su subconjunto propio $X - \{y_1\}$. □

Teorema 1.5. Sea $\{A_1, A_2, \ldots\}$ una familia numerable y disjunta de conjuntos numerables. Entonces, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable.

Demostración. Al ser $A_1, A_2, \ldots$ numerables podemos escribir

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\},\ A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\},$$
$$\ldots,\ A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots\},\ \ldots$$

Entonces, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{ij} : (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$. La función $f(a_{ij}) = (i, j)$ es trivialmente biyectiva y por el ejemplo 1.7, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable con lo cual $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable. □

Si $\{B_i : i \in I\}$ es una familia contable de conjuntos contables la unión, $\cup_{i \in I} B_i$ puede fácilmente considerarse como incluida en una familia $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ del tipo del teorema anterior, con lo cual obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.1. Si $\{B_i : i \in I\}$ es una familia contable de conjuntos contables, la unión, $\cup_{i \in I} B_i$ es contable.

***Ejemplo* 1.8.** El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es numerable. Efectivamente, $\mathbb{Z}$ es unión contable de los conjuntos numerables $\mathbb{N}$, $\{0\}$ y $\{-n; n \in \mathbb{N}\}$, por tanto $\mathbb{Z}$ es contable y al ser infinito, es numerable.

En el ejemplo 1.5 se demostró lo mismo, construyendo de manera explícita una biyección.

Teorema 1.6. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable.

Demostración. Sea $\mathbb{Q}^+$ el conjunto de los números reales positivos y $\mathbb{Q}^-$ el de los racionales negativos. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $f(p/q) = (p, q)$. Esta aplicación es inyectiva, por tanto $\mathbb{Q}^+$ es equivalente a un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (que por el ejemplo 1.7 es numerable) y por el teorema 1.3, $\mathbb{Q}^+$ es numerable. De la misma manera, $\mathbb{Q}^-$ es numerable con lo cual $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ es numerable por el corolario 1.1. □

1.3. Potencia del continuo.

Teorema 1.7. El intervalo $[0, 1]$ no es numerable.

Demostración. Por reducción al absurdo. Si $[0,1]$ es numerable, podemos escribir $[0,1] = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Consideremos los tres subintervalos de $[0,1]$: $[0,1/3]$, $[1/3,2/3]$, $[2/3,1]$. Cada uno de los intervalos tiene longitud $1/3$ y el elemento x_1 no puede estar en los tres intervalos. Sea $I_1 = [a_1, b_1]$ uno de los tres intervalos tales que $x_1 \notin I_1$. Consideramos los tres subintervalos de I_1 : $[a_1, a_1 + 1/9]$, $[a_1 + 1/9, a_1 + 2/9]$, $[a_1 + 2/9, b_1]$ (nótese que $a_1 + 2/9 < a_1 + 1/3 = b_1$). Cada uno de los intervalos anteriores tiene longitud $1/9$. Sea I_2 uno de los tres intervalos anteriores tal que $x_2 \notin I_2$.

Continuando de esta manera, tenemos construida una sucesión de intervalos cerrados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ tales que $x_n \notin I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la longitud de cada I_n es $l(I_n) = 1/3^n$. Por el principio de los intervalos encajados, existe un número real $y \in [0,1]$ tal que y pertenece a todos los intervalos I_n (es además único pues $l(I_n) \to 0$). Pero $y \in [0,1] = \{x_1, x_2, \ldots\}$ implica que $y = x_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y por construcción $y = x_m \notin I_m$ lo cual es una contradicción. $\square$

Definición 1.4. Se dice que un conjunto X tiene la *potencia del continuo* o que tiene *cardinalidad* $\mathbf{c}$ si es equivalente al intervalo $[0,1]$.

Lema 1.1. Los intervalos $(0,1)$, $[0,1)$ y $(0,1]$ tienen cardinalidad $\mathbf{c}$.

Demostración. Si $A = [0,1] - \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$, entonces

$$[0,1] = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\} \cup A, \quad (0,1) = \{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\} \cup A$$

y la aplicación $f : [0,1] \to (0,1)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1/(n+2) & \text{si} \quad x = 1/n, \ (n \in \mathbb{N}) \\ x & \text{si} \quad x \in A \end{cases}$$

es biyectiva, es decir $[0,1] \sim (0,1)$. La aplicación $g : [0,1] \to [0,1)$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1/(n+1) & \text{si} \quad x = 1/n \ (n \in \mathbb{N}) \\ x & \text{si} \quad x \neq 1/n \ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

es biyectiva, es decir $[0,1] \sim [0,1)$. La aplicación $h : [0,1) \to (0,1]$ dada por $h(x) = 1 - x$ es biyectiva, en consecuencia $(0,1) \sim [0,1) \sim (0,1] \sim [0,1]$. Concluimos que los intervalos $(0,1)$, $[0,1)$ y $(0,1]$ tienen cardinalidad $\mathbf{c}$. $\square$

Teorema 1.8. Sean a, b números reales con $a < b$. Entonces, los intervalos $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$ y $(a,b]$ tienen cardinalidad $\mathbf{c}$.

Demostración. Cada una de las siguientes funciones dadas por $f(x) = a + (b-a)x$:

$$[0,1] \xrightarrow{f} [a,b], \quad [0,1) \xrightarrow{f} [a,b), \quad (0,1) \xrightarrow{f} (a,b), \quad (0,1] \xrightarrow{f} (a,b]$$

es biyectiva. Usando el lema anterior y el que la relación $A \sim B$ es de equivalencia concluimos que los intervalos $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$ y $(a,b]$ tienen cardinalidad $\mathbf{c}$. $\square$

Teorema 1.9. $\mathbb{R}$ tiene cardinalidad $\mathbf{c}$.

Demostración. Por el ejemplo 1.4, $(-1,1) \sim \mathbb{R}$ y por el teorema 1.8, $(-1,1)$ tiene cardinalidad $\mathbf{c}$, por tanto $\mathbb{R}$ tiene cardinalidad $\mathbf{c}$. $\square$

Definición 1.5. Sea $\mathscr{C}$ la clase de todos los conjuntos. Sabemos que la relación en $\mathscr{C}$, $A \sim B \Leftrightarrow$ existe una aplicación biyectiva de A en B, es de equivalencia. Si $A \sim B$ decimos que A y B tienen la *misma cardinalidad* o el mismo *cardinal.*

Al cardinal de un conjunto A lse le denota por $\#A$, card$A$ o $|A|$, y optaremos por esta última notación. Por tanto, si $A \sim B$ tenemos $|A| = |B|$ y si $\bar{A}$ representa el elemento del conjunto cociente $\mathscr{C}/\sim$ al que pertenece A, tiene sentido definir el cardinal de $\bar{A}$ como $|\bar{A}| = |A|$ y a cada elemento de $\mathscr{C}/\sim$ le llamamos *cardinal.* En consecuencia, un objeto α es un cardinal o *número cardinal* si y sólo si existe un conjunto A tal que $\alpha = |A|$.

***Ejemplo* 1.9.** Tenemos,

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|,$$
$$\mathbf{c} = |[0,1]| = |[a,b]| = [(a,b)| = [(a,b]| = [[a,b)| = |\mathbb{R}|.$$

Denotamos al cardinal de los conjuntos

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

por $0, 1, 2, 3, \ldots$ respectivamente, lo cual corresponde a nuestra idea intuitiva de cardinal de un conjunto finito.

2. Orden cardinal

En ésta sección vamos a definir una relación de orden en la clase de los cardinales.

2.1. Teorema de Cantor-Bernstein.

Teorema 2.1 (Cantor-Bernstein)**.** Sean A y B dos conjuntos tales que existen aplicaciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to A$. Entonces, existe una biyección entre A y B.

Demostración. Sea $b_1 \in B$. Vamos a construir una sucesión de elementos $b_1, a_1, b_2, a_2, b_3, a_3, \ldots$ de elementos con $b_i \in B$ y $a_i \in A$ de la siguiente manera. Puede existir o no $a_1 \in A$ tal que $f(a_1) = b_1$, pero al ser f inyectiva si tal a_1 existe, es único y ya tendríamos a_1. De nuevo, puede existir o no $b_2 \in B$ tal que $g(b_2) = a_1$ pero si tal elemento existe es único y ya tendríamos b_2. De forma similar, elegimos a_2 como el único elemento que cumple $f(a_2) = b_2$ si tal a_2 existe. Se pueden presentar los siguientes casos:
(1) Llegamos a un a_n y paramos porque no existe $b \in B$ tal que $g(b) = a_n$.
(2) Llegamos a un b_n y paramos porque no existe $a \in A$ tal que $f(a) = b_n$.
(3) El proceso continúa indefinidamente.

Entonces, para todo $b \in B$ y eligiéndolo como b_1 estamos en uno y sólo uno de los tres casos anteriores. Podemos por tanto particionar B en tres subconjuntos

$$\begin{aligned} B_A &= \{b \in B : \text{ el proceso termina en un } a_n\}, \\ B_B &= \{b \in B : \text{ el proceso termina en un } b_n\}, \\ B_\infty &= \{b \in B : \text{ el proceso nunca termina}\}. \end{aligned}$$

El mismo proceso se puede aplicar para todo $a \in A$ (y tomándolo como a_1) se puede particionar A en los siguientes subconjuntos:

$$\begin{aligned} A_A &= \{a \in A : \text{ el proceso termina en un } a_n\}, \\ A_B &= \{a \in A : \text{ el proceso termina en un } b_n\}, \\ A_\infty &= \{a \in A : \text{ el proceso nunca termina}\}. \end{aligned}$$

Para demostrar que existe una biyección entre A y B, bastara demostrar que existe una biyección entre A_A y B_A, una entre A_B y B_B y otra entre A_∞ y B_∞. Veamos que la restricción de f a A_A es una biyección entre A_A y B_A. Para ello y dado que f es inyectiva, bastará demostrar dos cosas:

(a) $a \in A_A \Rightarrow f(a) \in B_A$.

(b) $\forall b \in B_A \; \exists a \in A_A : f(a) = b$.

Si $a \in A_A$ el proceso aplicado a a termina en A. Consideremos el proceso aplicado a $f(a)$. El primer paso del proceso nos devuelve a con lo cual el proceso continúa hasta finalizar en A, es decir $f(a) \in B_A$ y por tanto se verifica (a).

Por otra parte, si $b \in B_A$ el proceso aplicado a b termina en A y por tanto ha de tener una primera etapa pues en caso contrario terminaría en $b \in B$. Es decir, existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$. Pero el proceso aplicado a este a es el mismo que la prolongación del proceso aplicado a b y por tanto termina en A con lo cual $a \in A_A$. En consecuencia, $f : A_A \to B_A$ es una biyección.

Razonando de manera análoga demostramos que $g : B_B \to A_B$ es una biyección, y por tanto $g^{-1} : A_B \to B_B$ es biyección.

Por último, demostremos que $f : A_\infty \to B_\infty$ es una biyección. Es una inyección pues $f : A \to B$ lo es por hipótesis. Si $b \in B_\infty$ entonces, $b = f(a)$ para algún $a \in A$ y éste a pertenece a A_∞ pues el proceso que empieza en a es el mismo que el que empieza en b después del primer paso y el proceso nunca termina pues $b \in B_\infty$.

Resumiendo, $F : A \to B$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A_A \\ f(x) & \text{si} \quad x \in A_\infty \\ g^{-1}(x) & \text{si} \quad x \in A_B. \end{cases}$$

es una biyección pues A_A, A_B y A_∞ forma una partición de A, B_A, B_B y B_∞ forman una partición de B y las aplicaciones $f : A_A \to B_A$, $f : A_\infty \to B_\infty$, $g^{-1} : A_B \to B_B$ son biyecciones. Queda pues demostrado el teorema de Cantor-Bernstein. $\square$

2.2. Relación de orden en el conjunto de los cardinales.

Teorema 2.2. Sean $|A|$ y $|B|$ dos cardinales. Entonces, la relación

$$|A| \leq |B| \Leftrightarrow \exists B^* \subset B : A \sim B^*$$

está bien definida y es una relación de orden.

Demostración. Hay que demostrar que la relación no depende del representante elegido de cada clase. En efecto, supongamos que $|A| = |A_1|$, $|B| = |B_1|$ y que $|A| \leq |B|$. Entonces, existe una aplicación biyectiva $F : A \to A_1$, una aplicación biyectiva $G : B \to B_1$ y existe una aplicación biyectiva $f : A \to B^*$ con $B^* \subset B$. Tenemos,

$$A_1 \overset{F^{-1}}{\to} A \overset{f}{\to} B^* \overset{G}{\to} G(B^*).$$

Las aplicaciones F^{-1}, f y G son biyectivas y por tanto $G \circ f \circ F^{-1} : A_1 \to G(B^*)$ es biyectiva y $G(B^*) \subset B_1$ lo cual demuestra que $|A_1| \leq |B_1|$.

Veamos que la relación es de orden. Para todo conjunto A la aplicación $id : A \to A \subset A$ es biyectiva y por tanto $|A| \leq |A|$. Si A, B son conjuntos con $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$ entonces existen aplicaciones biyectivas $f : A \to B^* \subset B$ y $g : B \to A^* \subset A$ con lo cual las aplicaciones $f : A \to B$ y $g : B \to A$ son inyectivas. Por el teorema 2.1 de Cantor-Bernstein existe una aplicación biyectiva entre A y B, es decir $A \sim B$ y por tanto $|A| = |B|$.

Por último, si A, B, C son conjuntos con $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$ existen aplicaciones biyectivas $f : A \to B^* \subset B$ y $g : B \to C^* \subset C$ lo cual implica que $g \circ f : A \to C^* \subset C$ es inyectiva y por tanto, $|A| \leq |C|$. Concluimos que la relación $\leq$ en el conjunto de los cardinales es de orden. □

***Nota* 2.1.** Obsérvese que $|A| \leq |B|$ equivale a decir que existe una aplicación inyetiva $f : A \to B$.

***Nota* 2.2.** Para todo conjunto A la aplicación vacía $f_\emptyset : \emptyset \to \emptyset \subset A$ es inyectiva. En efecto, $\forall x, y \in \emptyset, x \neq y \Rightarrow f_\emptyset(x) \neq f_\emptyset(y)$ pues al no haber elementos en el conjunto vacío la implicación anterior es cierta para cada par de elementos en el conjunto vacío (ninguno). Es decir, se verifica $|\emptyset| \leq |A|$ para todo conjunto A y por tanto, $0 = |\emptyset|$ es elemento mínimo de la relación de orden definida.

Teorema 2.3 (Cantor)**.** Si A es un conjunto, entonces el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de las partes de A tiene cardinalidad mayor que A.

Demostración. La aplicación $f : A \to \mathcal{P}(A)$ dada por $f(a) = \{a\}$ es inyectiva y por tanto, $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Demostremos que A no es equivalente a $\mathcal{P}(A)$. En efecto, supongamos que exista una aplicación biyectiva $g : A \to \mathcal{P}(A)$ y consideremos el subconjunto B de A dado por $B = \{x \in A : x \notin g(x)\}$. Al ser g sobreyectiva, existe $b \in A$ tal que $g(b) = B$. Si $b \in B$ entonces, $b \notin g(b) = B$ lo cual es absurdo. Si $b \notin B$ entonces, $b \in g(b) = B$ que también es una contradicción. Concluimos que A no es equivalente a $\mathcal{P}(A)$ y por tanto $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. □

El teorema anterior, demuestra que no existe máximo en la clase de los cardinales. A continuación demostramos que la relación de orden definida en la clase de los números cardinales es de orden total.

Teorema 2.4. Sean α y β dos números cardinales. Entonces, se verifica $\alpha \leq \beta$ o $\beta \leq \alpha$.

Demostración. Sean A y B dos conjuntos tales que $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$. Basta demostrar que existe una aplicación inyectiva $f : A \to B$ o una aplicación inyectiva $f : B \to A$.

Definimos el conjunto

$$\mathcal{X} = \{(C, D, g) : C \subset A,\ D \subset B,\ g : C \to D \text{ biyección}\}.$$

En $\mathcal{X}$ definimos la siguiente relación

$$(C, D, g) \preceq (C', D', g') \Leftrightarrow \begin{cases} C \subset C' \\ D \subset D' \\ g = g'|_C \end{cases}$$

Es sencillo verificar que $\preceq$ es relación de orden en $\mathcal{X}$. Sea $\mathcal{A} = \{(C_i, D_i, g_i) : i \in I\} \subset \mathcal{X}$ un subconjunto de $\mathcal{X}$ totalmente ordenado y veamos que $\mathcal{A}$ está acotado superiormente. Sean $C = \bigcup_{i \in I} C_i$, $D = \bigcup_{i \in I} D_i$ y definamos la aplicación:

$$g : C \to D, \quad g(x) = g_i(x) \text{ si } x \in C_i.$$

Es decir, $g|_{C_i} = g_i$ para todo $i \in I$. Esta aplicación está bien definida. En efecto, supongamos que $x \in C_i$ y $x \in C_j$. Al ser $\mathcal{A}$ totalmente ordenado, se verifica $C_i \subset C_j$ y $g_j|_{C_i} = g_i$, o bien $C_j \subset C_i$ y $g_i|_{C_j} = g_j$. Es decir, en ambos casos $g_i|_{C_i \cap C_j} = g_j|_{C_i \cap C_j}$ y por tanto, g está bien definida. Es biyectiva al serlo g_i para todo $i \in I$.

El elemento $(C, D, g) \in \mathcal{X}$ es claramente una cota superior de $\mathcal{A}$. Por el lema de Zorn, $\mathcal{X}$ posee al menos un elemento maximal (A_0, B_0, f).

Si demostramos que $A_0 = A$ o $B_0 = B$ el teorema está demostrado pues si $A_0 = A$, al ser $(A, B_0, f) \in \mathcal{X}$ tenemos $B_0 \subset B$ y $f : A \to B_0$ biyectiva con lo cual $f : A \to B \supset B_0$ es inyectiva (i.e. $\alpha \leq \beta$). Si $B_0 = B$, al ser $(A_0, B, f) \in \mathcal{X}$ tenemos $A_0 \subset A$ y $f : A_0 \to B$ biyectiva con lo cual $f^{-1} : B \to A_0$ es biyectiva y $f^{-1} : B \to A \supset A_0$ inyectiva (i.e. $\beta \leq \alpha$).

Veamos que $A_0 = A$ o $B_0 = B$ por contradicción. Si $A_0 \neq A$ y $B_0 \neq B$ entonces, $A_0 \subsetneq A$ y $B_0 \subsetneq B$ con lo cual existe $a \in A \setminus A_0$ y existe $b \in B \setminus B_0$. Podemos definir la biyección $g : A_0 \cup \{a\} \to B_0 \cup \{b\}$ dada por $g(a) = b$ y $g|_{A_0} = f$. Entonces, $(A_0 \cup \{a\}, B_0 \cup \{b\}, g) \in \mathcal{X}$ y

$$(A_0, B_0, f) \prec (A_0 \cup \{a\}, B_0 \cup \{b\}, g)$$

lo cual contradice el hecho de ser (A_0, B_0, f) maximal. □

Hipótesis del continuo. La hipótesis del continuo, consiste en el siguiente enunciado: *"No existe conjunto A tal que $\aleph_0 < |A| < \mathbf{c}$".* En 1963, el matemático Paul Cohen, demostró ([1]) que la hipótesis del continuo es indecidible: partiendo de los axiomas de la teoría de conjuntos no puede probarse ni refutarse. Ocurre en el mismo sentido que el quinto axioma de Euclides sobre las rectas paralelas: es independiente de los demás axiomas de la geometría.

3. Operaciones con cardinales

En ésta sección definimos operaciones en la clase de los números cardinales.

3.1. Suma de cardinales. Si α y β son dos cardinales entonces, siempre existen conjuntos disjuntos A y B tales que $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$. En efecto, si $\alpha = |A'|$ y $\beta = |B'|$ basta elegir $A = A' \times \{0\}$ y $B = B' \times \{1\}$. Entonces, $A \cap B = \emptyset$ y $|A| = |A'|$, $|B| = |B'|$.

La siguiente definición, generaliza para cardinales cualesquiera el conocido concepto de suma de cardinales finitos.

Definición 3.1. Sean α y β dos cardinales y sean A y B conjuntos disjuntos tales que $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$ con $A \cap B = \emptyset$. Se define su suma como $\alpha + \beta := |A \cup B|$.

La definición no depende de los conjuntos A y B elegidos pues si $\alpha = |A_1|$ y $\beta = |B_1|$ con $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ entonces, existe una obvia biyección entre $A \cup B$ y $A_1 \cup B_1$ y por tanto $|A \cup B| = |A_1 \cup B_1|$.

***Ejemplo* 3.1.** Tenemos $1 = |\{(1,0)\}|$, $2 = |\{(1,1),(2,1)\}|$. Entonces,

$$1 + 2 = |\{(1,0)\} \cup \{(1,1),(2,1)\}| = |\{(1,0),(1,1),(2,1)\}| = 3.$$

Teorema 3.1. Para todo α, β, γ cardinales se verifica
(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
(2) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.
(3) $0 + \alpha = \alpha$.
(4) Si $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ son cardinales, $\alpha_1 \le \alpha_2 \wedge \beta_1 \le \beta_2 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \le \alpha_2 + \beta_2$.
(5) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Demostración.
(1) Sean $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$ con $A \cap B = \emptyset$. Entonces, $B \cap A = \emptyset$ luego $\alpha + \beta = |A \cup B| = |B \cup A| = \beta + \alpha$.

(2) Sean $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$, $\gamma = |C|$ con $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap C = \emptyset$. Entonces, $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ y $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ y por tanto

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta + \gamma) &= |A| + |B \cup C| = |A \cup (B \cup C)| = |(A \cup B) \cup C| \\ &= |A \cup B| + |C| = (\alpha + \beta) + \gamma.\end{aligned}$$

(3) Tenemos $0 = |\emptyset|$ y sea $\alpha = |A|$. Como $\emptyset \cap A = \emptyset$, se verifica $0 + \alpha = |\emptyset \cup A| = |A| = \alpha$.

(4) Sean $\alpha_1 = |A_1|$, $\alpha_2 = |A_2|$, $\beta_1 = |B_1|$, $\beta_2 = |B_2|$ con $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ y $A_2 \cap B_2 = \emptyset$. Como $\alpha_1 \le \alpha_2$ y $\beta_1 \le \beta_2$, existen aplcaciones inyectivas $f : A_1 \to A_2$ y $g : B_1 \to B_2$. Entonces, la aplicación $h : A_1 \cup B_1 \to A_2 \cup B_2$ dada por $h(x) = f(x)$ si $x \in A_1$ y $h(x) = g(x)$ si $x \in B_1$ es inyectiva. Por tanto, $\alpha_1 + \beta_1 = |A_1 \cup B_1| \le |A_2 \cup B_2| = \alpha_2 + \beta_2$.

(5) Tenemos $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ y también $\aleph_0 = |\mathbb{N} \times \{0\}|$. Al ser $\mathbb{N} \cap (\mathbb{N} \times \{0\}) = \emptyset$, se verifica $\aleph_0 + \aleph_0 = |\mathbb{N} \cup (\mathbb{N} \times \{0\})|$. Pero $\mathbb{N} \cup (\mathbb{N} \times \{0\})$ es contable al ser unión contable de contables y al ser infinito, es numerable. En consecuencia, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. $\square$

De la propiedad $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ se deduce que existen cardinales infinitos no regulares para la suma. En efecto, $\aleph_0 + \aleph_0 = 0 + \aleph_0$ y sin embargo, $\aleph_0 \neq 0$.

3.2. Producto de cardinales.

Definición 3.2. Sean $\alpha = |A|$, y $\beta = |B|$ dos cardinales. Se define su producto como $\alpha\beta := |A \times B|$.

La operación está bien definida pues si $\alpha = |A_1|$ y $\beta = |B_1|$ entonces existen biyecciones $f : A \to A_1$, $g : B \to B_1$ y la aplicación $f \times g : A \times B \to A_1 \times B_1$ dada por $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$ es claramente biyectiva. Es decir, $|A \times B| = |A_1 \times B_1|$.

La definición anterior generaliza para cardinales cualesquiera el conocido concepto producto de cardinales finitos.

***Ejemplo* 3.2.** Tenemos $2 = |\{a, b\}|$, $3 = |\{c, d, e\}|$. Entonces,

$$2 \cdot 3 = |\{a, b\} \times \{c, d, e\}| = |\{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}| = 6.$$

Teorema 3.2. Para todo α, β, γ cardinales se verifica
(1) $\alpha\beta = \beta\alpha$.
(2) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.
(3) $1\alpha = \alpha$.
(4) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
(5) Si $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ son cardinales, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \wedge \beta_1 \leq \beta_2 \Rightarrow \alpha_1\beta_1 \leq \alpha_2\beta_2$.
(6) $\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$.

Demostración.
(1) Sean $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$. La aplicación $f : A \times B \to B \times A$ dada por $f(a, b) = (b, a)$ es claramente biyectiva, por tanto $\alpha\beta = |A \times B| = |B \times A| = \beta\alpha$.

(2) Sean $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$, $\gamma = |C|$. La aplicación $f : A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$ dada por $f(a, (b, c)) = ((a, b), c)$ es claramente biyectiva. Entonces,

$$\begin{aligned}\alpha(\beta\gamma) &= |A||B \times C| = |A \times (B \times C)| \\ &= |(A \times B) \times C| = |A \times B||C| = (\alpha\beta)\gamma.\end{aligned}$$

(3) Sean $\alpha = |A|$ y $1 = |\{0\}|$. La aplicación $f : \{0\} \times A \to A$ dada por $f(0, a) = a$ es biyectiva, por tanto $1\alpha = |\{0\} \times A| = |A| = \alpha$.

(4) Sean $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$, $\gamma = |C|$ con $B \cap C = \emptyset$. Sabemos que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, y de la condición $B \cap C = \emptyset$ se deduce $(A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\alpha(\beta + \gamma) &= |A||B \cup C| = |A \times (B \cup C)| = |(A \times B) \cup (A \times C)| \\ &= |A \times B| + |A \times C| = \alpha\beta + \alpha\gamma.\end{aligned}$$

(5) Sean $\alpha_1 = |A_1|$, $\alpha_2 = |A_2|$, $\beta_1 = |B_1|$, $\beta_2 = |B_2|$. Como $\alpha_1 \leq \alpha_2$ y $\beta_1 \leq \beta_2$, existen aplcaciones inyectivas $f : A_1 \to A_2$ y $g : B_1 \to B_2$. Entonces, la aplicación $f \times g : A_1 \times B_1 \to A_2 \times B_2$ dada por $(f \times g)(a, b)) = (f(a), f(b))$ es inyectiva. Por tanto, $\alpha_1\beta_1 = |A_1 \times B_1| \leq |A_2 \times B_2| = \alpha_2\beta_2$.

(6) De acuerdo con el ejemplo 1.7, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable por tanto, $\aleph_0\aleph_0 = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$. □

De la propiedad $\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$ se deduce que existen cardinales infinitos no regulares para el producto. En efecto, $\aleph_0\aleph_0 = 1\aleph_0$ y sin embargo, $\aleph_0 \neq 1$.

3.3. Potenciación de cardinales. Sean A y B dos conjuntos y $A^B = \{f : B \to A \text{ con } f \text{ aplicación}\}$. Si A y B son finitos con m y n elementos respectivamente, el número de elementos de A^B son las variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n es decir, $VR_{m,n} = m^n$ y por tanto $|A^B| = |A|^{|B|}$. Generalizamos esto para cardinales cualesquiera.

Definición 3.3. Sean α y β dos cardinales y sean A y B conjuntos tales que $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$. Se define $\alpha^\beta := |A^B|$.

Veamos que la operación está bien definida. Si $\alpha = |A| = |A_1|$ y $\beta = |B| = |B_1|$, existen aplicaciones biyectivas $F : A \to A_1$, $G : B \to B_1$. Para cada aplicación $f \in A^B$ tenemos la siguiente situación.

$$B_1 \xrightarrow{G^{-1}} B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{F} A_1.$$

Definimos la aplicación $\phi : A^B \to A_1^{B_1}$ tal que $\phi(f) = FfG^{-1}$. La aplicación ϕ es inyectiva pues si $\phi(f_1) = \phi(f_2)$ entonces, $Ff_1G^{-1} = Ff_2G^{-1}$ y operando a la izquierda por F^{-1} y a la derecha por G, obtenemos $f_1 = f_2$.

La aplicación ϕ también es sobreyectiva, pues si $g \in A_1^{B_1}$ entonces la aplicación $f = F^{-1}g\,G : B \to A$ satisface

$$\phi(f) = \phi\left(F^{-1}g\,G\right) = F\left(F^{-1}g\,G\right)G^{-1} = g.$$

Concluimos que $|A^B| = |A_1^{B_1}|$ con lo cual, la operación potenciación α^β está bien definida.

Teorema 3.3. Para todo α, β, γ cardinales se verifica
(1) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma$.
(2) $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$.
(3) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.
(4) Si $\alpha \leq \beta$, entonces $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.
(5) $\alpha^2 = \alpha\alpha$.

Demostración.
(1) Sean $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$, $\gamma = |C|$ con B y C disjuntos. Basta demostrar que $A^{B\cup C}$ y $A^B \times A^C$ son equivalentes. Sea $f \in A^{B\cup C}$ y llamemos f_1 y f_2 las restricciones de f a B y a C respectivamente. Definimos $F : A^{B\cup C} \to A^B \times A^C$ mediante $F(f) = (f_1, f_2)$. La aplicación F es inyectiva pues si $F(f) = F(g)$ entonces, $(f_1, f_2) = (g_1, g_2)$, luego $f_1 = g_1$ y $f_2 = g_2$ de lo cual se deduce que $f = g$.

La aplicación F es sobreyectiva pues si $(h_1, h_2) \in A^B \times A^C$, la aplicación $f \in A^{B\cup C}$ dada por $f(x) = g_1(x)$ si $x \in B$, $f(x) = g_2(x)$ si $x \in C$ entonces $F(f) = (h_1, h_2)$.

(2) Sean $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$, $\gamma = |C|$. Tenemos que demostrar que $|(A \times B)^C| = |A^C \times B^C|$ o bien que existe una biyección $F : (A\times B)^C \to A^C \times B^C$. Todo elemento $f \in (A \times B)^C$ es una aplicación $f : C \to A \times B$ que se puede escribir en la forma $f = (f_1, f_2)$ donde f_1 y f_2 son las proyecciones de f sobre A y B respectivamente. La aplicación

$$F : (A \times B)^C \to A^C \times B^C, \quad F(f) = (f_1, f_2)$$

es claramente biyectiva de lo cual se deduce $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$.

(3) Sean $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$, $\gamma = |C|$. Tenemos que demostrar que $|(A^B)^C| = |A^{B\times C}|$, que existe una biyeeción $F : A^{B\times C} \to (A^B)^C$. Sea $f \in A^{B\times C}$ es decir, una aplicación $f : B \times C \to A$. Definimos la aplicación

$$F : A^{B\times C} \to (A^B)^C, \quad F(f) : C \to A^B$$
$$F(f)(c) : B \to A, \quad (F(f)(c))(b) = f(b, c) \;\; \forall b \in B.$$

La aplicación F es inyectiva pues si $F(f) = F(g)$, entonces $F(f)(c) = F(g)(c)$ para todo $c \in C$ con lo cual $f(b, c) = g(b, c)$ para todo $(b, c) \in B\times C$ es decir, $f = g$.

La aplicación F es también sobreyectiva. En efecto, si $h \in (A^B)^C$ entonces h es aplicación $h : C \to A^B$ con lo cual para cada $c \in C$ tenemos $h(c) : B \to A$. Elijamos $f : B \times C \to A$ dada por $f(b, c) = (h(c))(b)$. Entonces,

$$(F(f)(c))(b) = f(b, c) = (h(c))(b) \;\forall b \in B \Rightarrow$$
$$F(f)(c) = h(c) \;\forall c \in C \Rightarrow F(f) = h.$$

(4) Sea $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$ y $\gamma = |C|$. Como $\alpha \leq \beta$ existe $f : A \to B$ inyectiva, luego $f : A \to f(A) \subset B$ es biyectiva. Llamando $B_1 = f(A)$ tenemos $\alpha = |B_1|$ con $B_1 \subset B$. La aplicación $F : B_1^C \to B^C$ dada por $F(f) = f$ es claramente inyectiva, por tanto $|B_1^C| \leq |B^C|$ lo cual demuestra que $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

(5) Sea $\alpha = |A|$. Entonces, $\alpha\alpha = |A \times A|$ y $\alpha^2 = |A^{\{0,1\}}|$. La aplicación

$$F : A \times A \to A^{\{0,1\}}, \; F\left((a, b)\right) = f \text{ con } f(0) = a, \; f(1) = b$$

es claramente biyectiva, por tanto $\alpha^2 = |A^{\{0,1\}}| = |A \times A| = \alpha\alpha$. □

Teorema 3.4. Si X es un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de las partes de X, se verifica $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

Demostración. Consideremos $\{0, 1\}^X = \{f : X \to \{0, 1\}$ con f aplicación$\}$. Es claro que cada $f \in \{0, 1\}^X$ queda determinado conociendo $f^{-1}(0)$. Definamos la aplicación $F : \{0, 1\}^X \to \mathcal{P}(X)$ dada por $F(f) = f^{-1}(0)$. Es inyectiva pues si $F(f) = F(g)$ entonces, $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$ con lo cual $f = g$. Es sobreyectiva pues dado $A \in \mathcal{P}(X)$ la función $f : X \to \{0, 1\}$ dada por $f(x) = 0$ si $x \in A$ y $f(x) = 1$ si $x \notin A$ satisface $A = f^{-1}(0) = F(f)$. Existe pues biyección entre $\{0, 1\}^X$ y $\mathcal{P}(X)$, luego $|\mathcal{P}(X)| = |\{0, 1\}^X| = 2^{|X|}$ □

Teorema 3.5. Se verifica $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Demostración. Claramente se cumple $2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ por tanto, $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. □

Teorema 3.6. Se verifica $\mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$.

Demostración. Dado que $\mathbf{c} = |\mathbb{R}| = |[0,1)|$ y $2^{\aleph_0} = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$, bastará demostrar que $|[0,1)| \leq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$ y que $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq [0,1)|$.

Sabemos que la representación binaria de un número $x \in [0,1)$ dada por

$$0.a_1a_2a_3\ldots = \sum_{i\geq 1} \frac{a_i}{2^i}, \quad a_i \in \{0,1\}$$

es única si excluimos las representaciones con una cola de infinitos 1s. Por ejemplo, $0{,}0111\ldots = 0{,}1$ con lo cual excluiríamos la primera representación. Entonces, la aplicación $f : [0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dada por $f(x) = (a_1, a_2, \ldots)$ es inyectiva con lo cual, $|[0,1)| \leq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

Establezcamos ahora una inyección de $2^{\mathbb{N}}$ a $[0,1)$. Dada una sucesión $(a_1, a_2, \ldots) \in 2^{\mathbb{N}}$ podríamos verla como la representación binaria de un número y considerar $(a_1, a_2, \ldots) \mapsto \sum_{i\geq 1} a_i/2^i$. Ahora bien, ésta aplicación no sería inyectiva (por la cuestíon de la infinitas colas de unos). Podemos sin embargo considerar la aplicación $g : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1)$ dada por $g(a_1, a_2, \ldots) = \sum_{i\geq 1} a_i/10^i$ (representación decimal de x). Esta aplicación es inyectiva pues las únicas representaciones decimales ambiguas son aquellas con colas de infinitos 9s y ahora $a_i \neq 9$ para todo i. Es decir, $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq [0,1)|$. □

Bibliografía

[1] Cohen P., *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Dover Books on Mathematics.
[2] Godement R., *Álgebra*, capítulo 5, Editorial Tecnos, Madrid.
[3] Holz M., Steffens K., Weitz E., *Introduction to Cardinal Arithmetic*, Springer Science, Business Media, 1999.
[4] Lipschutz S., *General Topology*, chapter 3, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill.
[5] Shelah S., *Cardinal Arithmetic*, Oxford Logic Guides.

Más material en http://www.fernandorevilla.es .

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

E-mail address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`