POLINOMIO QUE GENERA PRIMOS

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Demostramos que si un polinomio con coeficientes enteros proporciona primos a partir de un número natural, el polinomio ha de ser constante.

Teorema. (Goldbach 1752).
(1) Sea $f \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $f(n)$ es primo para todo $n \geq 0$ natural. Entonces, f es constante
(2) *Generalización.* Si $f \in \mathbb{Z}[x]$ tiene la propiedad de que $f(n)$ es primo para todo natural $n \geq n_0$ con n_0 natural, entonces f es constante.

Demostración.
(1) Se verifica $f(0) = p$ primo, por tanto $f(x)$ es de la forma

$$f(x) = p + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, $f(pn) = p + a_1 pn + a_2 p^2 n^2 + \ldots + a_r p^r n^r$, con lo cual $p | f(pn)$ para todo $n \geq 0$. Por hipótesis $f(pn)$ primo, luego $f(pn) = p$ para todo $n \geq 0$. Esto implica que el polinomio $f(px) - p$ tiene infinitas raíces, luego $f(px) - p$ es el polinomio nulo. Es decir,

$$f(px) - p = a_1 px + a_2 p^2 x^2 + \ldots + a_r p^r x^r = 0,$$

luego $a_1 p = a_2 p^2 = \ldots = a_r p^r = 0$, con lo cual $a_1 = a_2 = \ldots = a_r = 0$. Concluimos pues que f es el polinomio constante $f(x) = p$.

(2) Consideremos el polinomio $g(x) = f(x + n_0) \in \mathbb{Z}[x]$. Por hipótesis $g(n)$ es primo para todo natural $n \geq 0$ por tanto, por el apartado anterior, g es constante lo cual implica que f es constante. En efecto, si f no fuera constante existirían $n_1 \neq n_2$ naturales con $f(n_1) \neq f(n_2)$. Pero si esto ocurriera, $n_1 - n_0 \neq n_2 - n_0$ y

$$g(n_1 - n_0) = f(n_1) \neq f(n_2) = g(n_2 - n_0).$$

Entonces, g no sería constante (contradicción). $\square$

Key words and phrases. Polinomio, genera, primos.

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

Email address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`