TRES INTEGRALES A PARTIR DE LA DE DIRICHLET

FERNANDO REVILLA JIMÉNEZ

Resumen. Calculamos tres integrales a partir de la de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

Enunciado.

(1) Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$.

(2) Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

(3) Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}dx$.

Solución.

(1) Integramos por partes con $u = 1-\cos x$ y $dv = 1/x^2$ con lo cual, $du = \sin x$, $v = -1/x$. Entonces,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \left[-\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

Ahora bien,

$$\left[-\frac{1-\cos x}{x}\right]_0^{+\infty} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x}$$

$$= \underbrace{0}_{\text{acot. por infinités.}} + \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2/2}{x}}_{1-\cos x\sim x^2/2\ (x\to 0)} = 0.$$

En consecuencia,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}}$$

(2) Integramos por partes con $u = \sin^2 x$ y $dv = 1/x^2$ con lo cual, $du = 2\sin x\cos x = \sin 2x$ $v = -1/x$. Entonces,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \left[-\frac{\sin^2 x}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}dx.$$

Key words and phrases. Integrales, Dirichlet.

Ahora bien,

$$\left[-\frac{\sin^2 x}{x}\right]_0^{+\infty} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^2 x}{x} + \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$= \underbrace{0}_{\text{acot. por infinités.}} + \underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}}_{\sin\sim x\ (x\to 0)} = 0.$$

En consecuencia, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx$. Efectuando el cambio $t = 2x$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t/2}(dt/2) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}}$$

(3) Tenemos,

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = (1-\cos^2 x)^2 = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$$

$$= (1-\cos^2 x) + \cos^2 x(\cos^2 x - 1) = \sin^2 x - \cos^2 x\sin^2 x = \sin^2 x - \frac{1}{4}\sin^2 2x.$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 2x}{x^2}dx$$

$$\underbrace{=}_{t=2x}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2/4}(dt/2) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{4}}$$

□

Más material en http://www.fernandorevilla.es

Fernando Revilla Jiménez. Jefe del Departamento de Matemáticas del IES Santa Teresa de Jesús de la Comunidad de Madrid y Profesor de Métodos Matemáticos de la Universidad Alfonso X El Sabio de Villanueva de la Cañada, Madrid (Hasta el curso académico 2008-2009).

Email address: `frej0002@ficus.pntic.mec.es`